

## 攻角约束下的二阶滑模控制器的协同制导律设计

史震,何晨迪,郑岩

(哈尔滨工程大学 自动化学院,黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:** 针对多弹协同拦截单个机动目标的问题,提出了一种协同制导律能够同时满足攻击时间和攻击角度约束。首先,根据系统动态方程和一致性算法选取了包含飞行时间变量的积分滑模变量,基于此设计了二阶滑模控制器作为导弹在视线方向上的制导律,以保证所有导弹同时拦截目标;然后,基于高阶滑模干扰观测器对视线角方程中的干扰进行估计补偿,设计了导弹在视线法向上的滑模制导律,以满足期望视线角约束和零化视线角速率的要求;另外,基于李雅普诺夫稳定性理论分别证明了制导系统两个子通道的稳定性;最后,仿真验证了所设计协同制导律的有效性。

**关键词:** 协同制导; 多智能体一致性; 滑模控制; 干扰观测器

**中图分类号:** V448.2 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201847.0617006

## Cooperative guidance law design with impact angle constraint based on second-order sliding mode controller

Shi Zhen, He Chendi, Zheng Yan

(College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** For the problem of multi-missiles intercepting single maneuvering target, the cooperative guidance law with impact time and angle constraints was presented. Firstly, considering the system dynamics equation and the multi-agent consensus algorithm, a second order sliding mode controller along the line of sight (LOS) was proposed based on integral sliding mode control concept to guarantee salvo interception. Then an higher order sliding mode observer (HOSMO) was designed to estimate external disturbances of the perpendicular to the LOS. In addition, the sliding mode controller with HOSMO was proposed to guarantee the LOS angles converge to desired commands and the LOS angle rates converge to zero. Moreover, the stability of the two subsystem channels were proved by Lyapunov theorem. Simulation results illustrate the effectiveness of the proposed cooperative guidance law.

**Key words:** cooperative guidance; multi-agent consensus; sliding mode control; disturbance observer

收稿日期:2018-01-05; 修订日期:2018-02-03

作者简介:史震(1961-),男,教授,博士生导师,主要从事导航、制导与控制方面的研究。Email:shizhen@hrbeu.edu.cn

## 0 引言

随着现代武器防御系统的升级和目标机动性的提高,导弹的打击难度不断增加。为进一步提高导弹的攻击能力,一方面可以通过提高单个导弹的精确制导能力<sup>[1-2]</sup>;另一方面可以通过多弹协同达到饱和攻击,各成员分别从不同角度攻击能进一步提高杀伤效果。近年来,多导弹协同制导问题得到了广泛关注。

I.-S. Jeon 团队<sup>[3]</sup>开创了时间一致的多弹协同制导先河,在比例导引律上附加修正项设计了攻击时间可控制导律 (Impact-Time-Control Guidance, ITCG)。后来基于此又增加了终端角度控制回路 (Impact-Angle-Control Guidance, IACG),实现了时间和角度的共同约束。Nathan Harl 等<sup>[4]</sup>通过事先为每枚导弹指定导引时间,利用二阶滑模控制跟踪标称的视线角速率实现了时间和角度的双重控制。Tal Shima 等<sup>[5]</sup>基于最优控制提出了一种满足相对角度约束的协同制导律,实现导弹从不同方向协同攻击,但该控制器求解复杂。

同期,我国学者也针对多弹协同问题开展了多方面研究工作。赵世钰等<sup>[6]</sup>基于协调变量的协同控制提出了一种“双层协同制导结构”,选择剩余飞行时间的广义加权平均值作为协调变量,利用集中式协调策略实现上层协调控制,利用本地制导律实现底层控制;又在此基础上利用加权平均一致算法改进成分布式时间协同制导律,各导弹成员只需与其邻居交互信息。赵江等<sup>[7]</sup>给出了三种普遍形式的基于协调变量的协同制导律,并验证了分布式协同制导律具有更好性能。张友安等<sup>[8]</sup>基于“Leader-Follower”提出了一种“领弹-从弹”协同制导结构,利用动态逆的方法设计了多弹协同制导律;该团队还进一步设计了非线性模型下的基于偏置比例导引的时间角度双重约束下的协同制导律<sup>[9]</sup>,但该制导律要求导弹拥有较小的前置角。

多弹协同拦截问题的研究以往多基于集中式协调策略或者跟踪控制,需要预先指定到达时间作为协调变量。然而,协调变量的赋值会影响控制器的性能,集中式策略下的多弹协同中又没有成员信息交互,并非真正的“协同”。另外,大部分研究还建立在线性模型、小攻角、目标固定或小机动的前提下。

近年来,随着协同控制理论的发展,基于多智能体一致性协议的分布式协同控制策略备受关注。张鹏等<sup>[10]</sup>将剩余飞行时间作为状态变量引入多弹协同系统方程中,设计了基于时间一致性协议的分布式协同制导律,但对视线角控制未做研究。宋俊红等<sup>[11]</sup>利用分布式一致性协议和自适应滑模控制设计了时间和角度约束下的多弹协同制导律。然而,传统自适应滑模方法的切换增益<sup>[11-12]</sup>总是伴随着时间单调增加。

针对多弹协同拦截机动目标的问题,文中提出了一种基于一致性协议和滑模控制的分布式协同制导律,该制导律能够同时满足攻击时间和攻击角度的双重约束。通过引入剩余飞行时间作为新的状态变量,在视线方向通道上设计了二阶滑模控制器使系统能够在有限时间内到达所设计滑模面,该控制器利用一致性协议调节各弹剩余飞行时间差,最终达到拦截时间一致。同时,二阶滑模能够有效抑制滑模的抖振现象。在视线法向通道上,基于跟踪控制的思想设计滑模控制器,该控制器利用高阶滑模观测器补偿目标机动带来的干扰,系统在有限时间内到达滑模面,视线角跟踪到期望值,视线角速率收敛到零。

## 1 模型建立

多弹协同拦截机动目标的几何关系如图 1 所示。

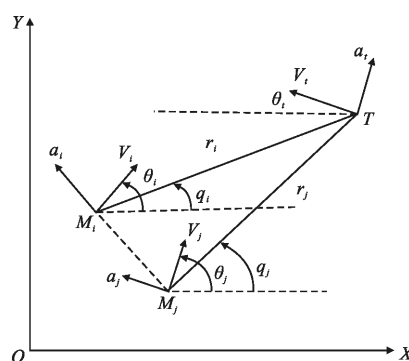


图 1 多弹协同拦截几何关系

Fig.1 Cooperative engagement geometry

弹目相对运动方程组如下:

$$\begin{cases} \dot{r} = V_i \cos(q - \theta_i) - V_m \cos(q - \theta_m) \\ r \dot{q} = V_m \sin(q - \theta_m) - V_i \sin(q - \theta_i) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $r$ 为弹目相对距离; $q$ 为视线角; $V_m$ 、 $V_i$ 分别为

导弹和目标的速度;  $\theta_m$ 、 $\theta_t$  分别为导弹弹道角和目标航向角,  $\dot{\theta}_m = a_m/V_m$ ,  $\dot{\theta}_t = a_t/V_t$ 。

对方程组(1)关于时间求导可得:

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{q} - u_r + w_r \\ \ddot{q} = -\frac{2\dot{r}\dot{q}}{r} - \frac{u_q}{r} + \frac{w_q}{r} \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $w_r = \dot{V}_t \cos(q - \theta_t) + V_t \dot{\theta}_t \sin(q - \theta_t)$  和  $w_q = V_t \dot{\theta}_t \cos(q - \theta_t) - \dot{V}_t \sin(q - \theta_t)$  分别为目标加速度沿着视线方向和和视线法向上的分量;  $u_r$ 、 $u_q$  分别为导弹沿着视线方向和视线法向上的加速度。

假设  $i=1, \dots, n$  代表  $n$  个导弹的一般成员。令  $x_1=r$ ,  $x_2=\dot{r}$ ,  $x_3=q-q_d$ ,  $x_4=\dot{q}$ ,  $q_d$  是期望终端视线角。导弹成员的动态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_4^2 - u_n + w_n \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{2x_2}{x_1} x_4 - \frac{u_{qi}}{x_1} + \frac{w_{qi}}{x_1} \end{cases} \quad (3)$$

考虑实际末制导中, 导弹与目标之间视线方向的相对速度变化较小, 剩余时间采用下式近似<sup>[10]</sup>:

$$t_{go,i} = -\frac{r_i}{\dot{r}_i} \quad (4)$$

求导可得:

$$\dot{t}_{go,i} = -1 + \frac{x_1 x_4^2}{x_2} - \frac{x_1}{x_2} u_n + \frac{x_1}{x_2} w_n \quad (5)$$

考虑多弹同时拦截目标的要求可知, 如果能保证所有导弹成员剩余飞行时间达到一致, 就可以实现同时拦截目标的任务。

将剩余飞行时间  $t_{go,i}$  作为系统变量引入可得新的方程组如下:

$$\begin{cases} \dot{t}_{go,i} = -1 + \frac{x_1 x_4^2}{x_2} - \frac{x_1}{x_2} u_n + \frac{x_1}{x_2} w_n \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{2x_2}{x_1} x_4 - \frac{u_{qi}}{x_1} + \frac{w_{qi}}{x_1} \end{cases} \quad (6)$$

又由  $t_{f,i} = t_{go,i}$  可得新变量的动态

$$\dot{t}_{f,i} = \frac{x_1 x_4^2}{x_2} - \frac{x_1}{x_2} u_n + \frac{x_1}{x_2} w_n \quad (7)$$

$$\dot{u}_n = -\frac{x_{1i}}{x_{2i}} u_n + \frac{x_{1i} x_{4i}}{x_{2i}}, \text{ 系统方程组(6)重新表示如下:}$$

下:

$$\begin{cases} \dot{t}_{f,i} = u_n + d_n \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{2x_2}{x_1} x_4 - \frac{u_{qi}}{x_1} + d_{qi} \end{cases} \quad (8)$$

其中  $d_n = \frac{x_{1i}}{x_{2i}} w_n$ ,  $d_{qi} = \frac{w_{qi}}{x_{1i}}$ 。

文中旨在设计视线方向上的制导律  $u_n$  以满足攻击时间约束; 设计视线法线方向上的制导律  $u_{qi}$  以满足零化视线角速率和期望视线角约束。

## 2 视线方向制导律设计

### 2.1 多智能体一致性协议

引理 1: 利用图论表示多智能体网络系统, 定义  $G(v, \varepsilon, A)$  是一个加权无向图表示通信拓扑。节点  $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  表示个体, 边  $\varepsilon = v \times v$ , 关联矩阵  $A = [a_{ij}]$ ,  $N_i = \{v_j \in v: (v_i, v_j) \in \varepsilon\}$  是节点  $v_i$  的邻居。有如下一致性协议能够解决多智能体平均一致性问题, 即有  $|x_i(t) - x_j(t)| \rightarrow 0$ 。

$$\dot{x}_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)) \quad (9)$$

式中:  $x_i$  表示个体状态, 一致性协议公式(9)包含自身及邻居状态信息。

### 2.2 基于二阶滑模和积分滑模的制导律

考虑公式(8)中第一个子系统:

$$\dot{t}_{f,i} = u_n + d_n \quad (10)$$

假设 1: 由于目标机动的物理限制, 且在拦截时刻弹目半径  $r_i \neq 0$ , 于是  $d_n$  及其导数  $\dot{d}_n$  存在且有上界。

假设 2: 一致性协议公式(9)及其一阶导数有界。

假设 3: 多弹通信拓扑无向且连通。

根据系统动态方程和一致性协议, 选取积分滑模变量<sup>[12]</sup>

$$s_i = t_{f,i} - t_{f,i}(0) - \int_0^t u_{nom,i}(\tau) d\tau \quad (11)$$

式中:  $t_{f,i}(0)$  为初始预测拦截时间;  $u_{nom,i}(\tau)$  为能使公式(10)所对应的标称系统稳定的控制器, 这里选取多智能体一致性协议公式(12)。

$$u_{\text{nom},i}(\tau) = \sum_{v \in N_i} a_{ij}(t_{f,j} - t_{f,i}) \quad (12)$$

对积分滑模变量关于时间求导可得：

$$\dot{s}_i = \dot{t}_{f,i} - u_{\text{nom},i}(\tau) \quad (13)$$

如果  $\dot{s}_i = 0$ , 有  $\dot{t}_{f,i} = u_{\text{nom},i}$ 。由引理 1 可知导弹成员的预测飞行时间  $t_{f,i}$  能达到一致, 即  $t_{f,i} = t_{f,j}$ , 同理剩余飞行时间也能达到一致,  $t_{\text{go},i} = t_{\text{go},j}$ 。于是, 此部分的目标是设计控制器  $\bar{u}_n$ , 使得  $s_i = \dot{s}_i = 0$ 。

对公式(13)进一步求导可得：

$$\ddot{s}_i = \ddot{u}_n + \dot{d}_n - \dot{u}_{\text{nom},i}(\tau) \quad (14)$$

得到二阶系统如下：

$$\begin{cases} \dot{s}_i = \dot{s}_i \\ \ddot{s}_i = \ddot{u}_n + \varphi_i \end{cases} \quad (15)$$

式中:  $\varphi_i = \dot{d}_n - \dot{u}_{\text{nom},i}$ 。根据假设 1、2 可知  $\varphi_i$  有界, 存在一个正常数使得  $|\varphi_i| < \Phi$ 。

由于各成员之间平等, 便于推导不考虑角标  $i$ 。

**定理 1:** 若假设 1、2、3 成立, 控制器(公式(16))能保证以  $s_i$  为滑模变量的二阶滑模可达, 系统能够在有限时间内稳定到原点, 系统状态沿着该滑模面最终收敛到达一致。

$$\dot{u}_i = -k_1 \text{sgns} - k_2 \text{sgn}\dot{s} \quad (16)$$

其中  $k_1 > k_2 + \Phi, k_2 > \Phi$ 。

证明: 选取如下形式的李雅普诺夫函数：

$$V(s, \dot{s}) = \begin{cases} \frac{m^2}{4} \left( \frac{\dot{s} \text{sgns}}{\gamma} + l \sqrt{|s| + \frac{\dot{s}^2}{2\gamma}} \right)^2 & s\dot{s} \neq 0 \\ \frac{m\dot{s}^2}{4}, m > 0 & s = 0 \\ \frac{|s|}{4} & \dot{s} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\gamma = k_1 + k_2 \text{sgn}(s\dot{s}) - \Phi \text{sgn}(s\dot{s}) \quad (18)$$

$$\begin{cases} m^2 \left( \frac{\dot{s} \text{sgns}}{\gamma} + \frac{l}{\sqrt{2\gamma}} \right)^2 = \bar{m}^2 \\ m^2 l^2 = 1 \end{cases} \quad (19)$$

$$m = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} |\sqrt{2\gamma} \bar{m} - 1| > 0, l = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \frac{\text{sgn}(s\dot{s})}{\sqrt{2\gamma} \bar{m} - 1} \quad (20)$$

系数满足公式(18)~(20), 函数  $V(s, \dot{s})$  连续。

由于  $k_1 > k_2 + \Phi, k_2 > \Phi$ , 可得不等式：

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2(k_1+k_2-\Phi)}} < \bar{m} < \frac{1}{\sqrt{2(k_1-k_2+\Phi)}} \\ m > 0, s\dot{s} \neq 0 \end{cases} \quad (21)$$

当  $s\dot{s} \neq 0$ , 对公式(17)关于时间求导可得：

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \dot{s}} \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{m^2}{2} \left( \frac{\text{sgns}\dot{s}}{\gamma} + l \sqrt{|s| + \frac{\dot{s}^2}{2\gamma}} \right) \cdot \\ &\frac{l}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{|s| + \frac{\dot{s}^2}{2\gamma}}} \text{sgns} \right) \dot{s} + \frac{m^2}{2} \left( \frac{\text{sgns}\dot{s}}{\gamma} + l \sqrt{|s| + \frac{\dot{s}^2}{2\gamma}} \right) \cdot \\ &\left( \frac{\text{sgns}}{\gamma} + \frac{l\dot{s}}{2\gamma \sqrt{|s| + \frac{\dot{s}^2}{2\gamma}}} \right) \ddot{s} = \\ &mV^{1/2} \left[ \frac{\text{sgns}}{\gamma} + \frac{l}{2} \frac{1}{\sqrt{|s| + \frac{\dot{s}^2}{2\gamma}}} \left( \dot{s} \text{sgns} + \frac{s\ddot{s}}{\gamma} \right) \right] = \\ &-mV^{1/2} \left[ -\frac{\gamma}{\gamma} + \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \frac{l \text{sgns}\dot{s}}{\sqrt{1 + \frac{2\gamma|s|}{\dot{s}^2}}} \left( \frac{\gamma}{\gamma} - 1 \right) \right] \quad (22) \end{aligned}$$

其中

$$\bar{\gamma} = k_1 + k_2 \text{sgn}(s\dot{s}) - \Phi \text{sgn}(s\dot{s}) \quad (23)$$

结合公式(18)可得：

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{\gamma} \geq 1 & s\dot{s} > 0 \\ 1 \leq \frac{\gamma}{\gamma} \leq \frac{k_1 - k_2 - \Phi}{k_1 - k_2 + \Phi} & s\dot{s} < 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$\frac{dV}{dt} \leq -k_{\min} \left( \frac{k_1 - k_2 - \Phi}{k_1 - k_2 + \Phi} \right) V^{1/2} \quad (25)$$

式中:  $k_{\min} = \min(k_1, k_2, m, l)$ 。

于是该二阶滑模面能够实现有限时间内可达。

再根据公式(13)有  $\dot{t}_{f,i} = u_{\text{nom},i}$ 。由引理 1 可知  $t_{f,i}, t_{\text{go},i}$  能达到一致, 即多枚导弹在同一时刻到达目标。

### 3 视线法向制导律设计

#### 3.1 滑模干扰观测器

引理 2: 考虑一阶单输入单输出系统<sup>[13]</sup>：

$$\dot{\sigma} = u + d \quad (26)$$

式中:  $\sigma$  为状态变量;  $u$  为输入;  $d$  为干扰。

若  $d$  满足  $m$  阶可导且有界  $|d^{(m)}| < L$ , 则有如下形式的高阶滑模干扰观测器：

$$\begin{cases} \dot{z}_0=v_0+u, v_0=h_0(z_0-\sigma)+z_1 \\ \dot{z}_1=v_1, v_1=h_1(z_1-v_0)+z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{m-1}=v_{m-1}, v_{m-1}=h_{m-1}(z_{m-1}-v_{m-2})+z_m \\ \dot{z}_m=h_m(z_m-v_{m-1}) \\ h_i(\cdot)=-\lambda_i L^{1/m-i+1}|\cdot|\text{sgn}(\cdot)-\mu_i(\cdot) \end{cases} \quad (27)$$

当参数  $\lambda_i, \mu_i$  选择适当时, 误差能够在有限时间内收敛到零, 有  $z_0=\sigma, z_1=d, \dots, z_m=\sigma_m-d^{(m-1)}$ 。

考虑后两个方程构成的子系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_{3i}=x_{4i} \\ \dot{x}_{4i}=-\frac{2x_{2i}}{x_{1i}}x_{4i}-\frac{u_{qi}}{x_{1i}}+\frac{w_{qi}}{x_{1i}} \end{cases} \quad (28)$$

假设 4: 由于目标机动的物理限制,  $w_{qi}$  及其二阶导数  $\ddot{w}_{qi}$  有上界。

滑模干扰观测器, 是现代控制中抑制干扰的有效手段, 用于控制工程各个领域<sup>[14-15]</sup>。考虑子系统方程干扰项  $w_{qi}/x_{1i}$  可知随着导弹接近目标, 该项会迅速增大, 直接估计该项比较困难。为有效利用形似公式(27)的滑模干扰观测器, 令  $x_{3i}=r_i, \dot{q}_i=x_{2i}x_{4i}$ , 得到新的等价方程:

$$x_{5i}=-x_{2i}x_{4i}-u_{qi}+w_{qi} \quad (29)$$

令  $x_5=(x_{51}, \dots, x_{5n})^T, w_q=(w_{q1}, \dots, w_{qn})^T, F(\cdot)=\{(f_1(\cdot), \dots, f_n(\cdot))^T, f_i(\cdot)=-x_{2i}x_{4i}\}, u_q=(u_{q1}, \dots, u_{qn})^T$ 。

设计滑模干扰观测器

$$\begin{cases} \dot{\xi}_0=v_0-F(\cdot)-u_q \\ v_0=-\lambda_2[L_i^{1/3} \text{sgn}^{2/3}(z_{0i}-x_{5i})]^T-\mu_2(z_0-x_5)+\xi_1 \\ \dot{\xi}_1=v_1 \\ v_1=-\lambda_1[L_i^{1/2} \text{sgn}^{1/2}(\xi_{1i}-v_{0i})]^T-\mu_1(z_1-v_0)+\xi_2 \\ \dot{\xi}_2=-\lambda_0[L_i \text{sgn}(\xi_{2i}-v_{1i})]-\mu_0(z_2-v_1) \\ \xi_1=\hat{w}_q \end{cases} \quad (30)$$

其中  $\text{sgn}^r x = \text{sgn}(x) \cdot |x|^r, L_i > |\ddot{w}_{qi}|$ 。

定义观测误差  $e_1=\xi_0-x_5, e_2=\xi_1-w_q, e_3=\xi_2-\dot{w}_q$ , 得到误差动态方程:

$$\begin{cases} \dot{e}_1=\dot{\xi}_0-\dot{x}_5=-\lambda_2[L_i^{1/3} \text{sgn}^{2/3}(e_{1i})]^T-\mu_2(z_0-x_1)+e_2 \\ \dot{e}_2=\dot{\xi}_1-\dot{w}_q=-\lambda_1[L_i^{1/2} \text{sgn}^{1/2}(e_{2i}-\dot{e}_{1i})]^T-\mu_1(z_1-v_0)+e_3 \\ \dot{e}_3=\dot{\xi}_2-\ddot{w}_q=-\lambda_0[L_i \text{sgn}(e_{3i}-\dot{e}_{2i})]^T-\mu_0(z_2-v_1)+\dot{w}_q \end{cases} \quad (31)$$

根据引理 2 可以知道在有限时间内  $\xi_1=\hat{w}_q$ 。参考文献[13]中给出了一种迭代选取的最优增益取值

$$L_i > \|\ddot{w}_{qi}\|_\infty, \lambda_0=1.5, \lambda_2=2, \mu_0=8, \mu_1=6, \mu_2=3。$$

### 3.2 滑模控制器设计

为便于设计, 令  $g_i(\cdot)=-\frac{2x_{2i}x_{4i}}{x_{1i}}, \bar{u}_{qi}=-\frac{u_{qi}}{x_{1i}}$ , 得到如下系统方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_3=x_4 \\ \dot{x}_4=G(\cdot)-\bar{u}_q+d_q \end{cases} \quad (32)$$

式中:  $x_3=(x_{31}, \dots, x_{3n})^T, x_4=(x_{41}, \dots, x_{4n})^T, G(\cdot)=(g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot))^T, \bar{u}_q=(\bar{u}_{q1}, \dots, \bar{u}_{qn})^T, d_q=(d_{q1}, \dots, d_{qn})^T$  分别对应各个导弹的动态。

考虑到期望终角视线角约束和零化视线角速率的目标, 选择滑模面

$$s_q=x_4+\kappa_q x_3 \quad (33)$$

式中:  $\kappa_q$  为正定对角阵。

对  $s_q$  关于时间求导可得:

$$\dot{s}_q=\dot{x}_4+\dot{x}_3=g(\cdot)+\bar{u}_q+d_q+\kappa_q x_4 \quad (34)$$

**定理 2:** 若假设 4 成立, 控制器公式(35)能使滑模面  $s_q$  在有限时间内可达, 系统公式(32)渐进稳定到原点。

$$\bar{u}_q=-g(\cdot)-\kappa_q x_4-\hat{w}_q/x_{1i}-\kappa_1 \text{sig}^\alpha(s_q)-\kappa_2 s_q \quad (35)$$

式中:  $\xi_1=\hat{w}_q, \hat{w}_q/x_{1i}=(\hat{w}_{q1}/x_{11}, \dots, \hat{w}_{qn}/x_{1n})^T; \kappa_1, \kappa_2$  是正定对角阵,  $0 < \alpha < 1$ 。

证明: 选择李雅普诺夫函数

$$V_q=\frac{1}{2}s_q^T s_q \quad (36)$$

为使系统有限时间收敛到滑模面, 选取趋近律

$$\dot{s}_q=-\kappa_1 \text{sig}^\alpha(s_q)-\kappa_2 s_q \quad (37)$$

对李雅普诺夫函数公式(36)求导, 结合不等式(38)

$$\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{1+\rho} \geq \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1+\rho}{2}}, \rho \in (0, 1) \quad (38)$$

可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_q &= s_q^T \dot{s}_q = s_q^T (g(\cdot) + \bar{u}_q + d_q) = s_q^T (-\kappa_1 \text{sig}^\alpha(s_q) - \kappa_2 s_q) = \\ &= -\sum_{i=1}^n \kappa_1 \text{sig}^{(\alpha+1)}(s_{qi}) - \sum_{i=1}^n \kappa_2 s_{qi}^2 \leq \\ &= -V_q^{\frac{\alpha+1}{2}} - V_q \end{aligned} \quad (39)$$

$$\dot{V}_q + k_3 V_q + k_4 V_q^\alpha \leq 0 \quad (40)$$

式中： $k_3=2\min(\kappa_{li}), k_4=2^\alpha \min(\kappa_{li}), \alpha = \frac{\alpha+1}{2}$ ，且有  $k_3, k_4 > 0, 0 < \alpha < 1$ 。

因此，滑模面  $s_q$  在有限时间内可达，系统状态  $x_3, x_4$  逐渐稳定到原点。于是视线角误差收敛到零，视线角  $q$  收敛到期望视线角  $q_d$ ，视线角速率  $\dot{q}$  收敛到零。

### 4 仿真与分析

针对三枚导弹同时攻击单个机动目标的情形进行仿真与分析。导弹通信拓扑无向且连通，关联矩阵  $A=[0 \ 1 \ 0; 1 \ 0 \ 1; 0 \ 1 \ 0]$ 。各枚导弹从不同位置出发，弹目初始条件及期望视线角见表 1。机动目标的运动加速度和转动加速度分别为  $\dot{V}_t=4g \cdot \sin(0.5t)$  和  $\dot{\theta}_t=0.1 \cdot \sin(0.5t)\text{rad/s}$ 。导弹可提供的最大过载为  $30g, g=9.8\text{m/s}^2$  仿真步长取  $0.001\text{s}$ 。文中所设计的协同制导律参数选取如表 2 所示。

表 1 初始条件及期望视线角

Tab.1 Initial conditions and desired LOS

	Initial coordinate	Initial heading angle/rad	Initial velocity /m · s <sup>-1</sup>	Desired LOS angle q <sub>d</sub> /rad
Missile 1	(0,0)	$\pi/30$	600	$\pi/3$
Missile 2	(-200,500)	$\pi/24$	600	$\pi/4$
Missile 3	(500,200)	$\pi/36$	600	$\pi/2$
Target	(800,3 000)	$-\pi/18$	400	-

表 2 协同制导律相关参数

Tab.2 Parameters of cooperative guidance law

$k_1=\text{diag}[10, 10, 10]$	$k_2=\text{diag}[5, 5, 5]$
$\kappa_1=\text{diag}[0.5, 0.5, 0.5]$	$\kappa_2=\text{diag}[0.5, 0.5, 0.5]$
$\kappa_3=\text{diag}[0.5, 0.5, 0.5]$	$\alpha=0.6, L_t=100$
$\lambda_0=1.1, \lambda_1=1.5, \lambda_2=2$	$\mu_0=8, \mu_1=6, \mu_2=3$

图 2 是导弹拦截目标的剩余飞行时间，图 3 是弹目相对距离。可以看出三枚导弹能够在 17.56 s 时刻同时到达目标，表明拦截时间达到一致。从图 4 可以看出三枚导弹从不同方向对同一目标形成“夹击”态势，并且相对弹道平滑。

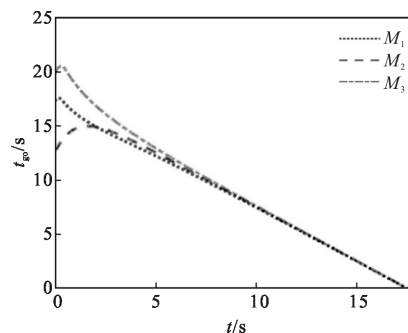


图 2 剩余飞行时间

Fig.2 Remain time-to-go histories

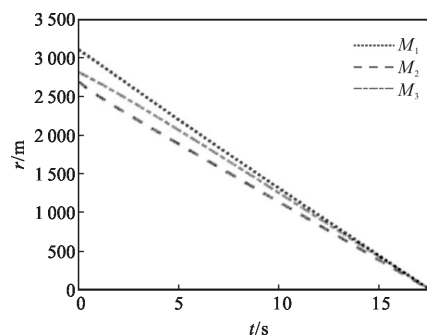


图 3 弹目相对距离

Fig.3 Missile-target relative distances

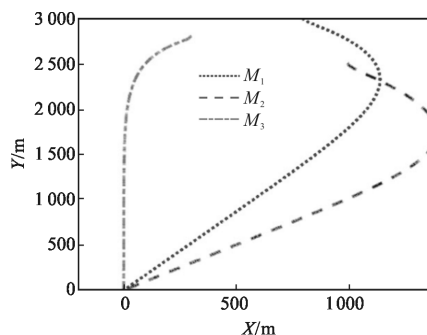
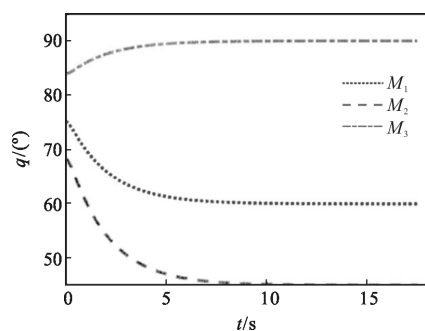


图 4 相对飞行弹道

Fig.4 Relative flight trajectories

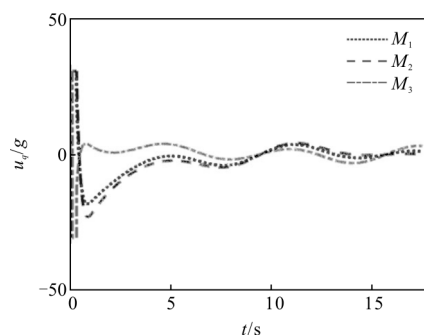
图 5(a)、(b)分别是导弹视线角和视线角速率响应曲线。可以看出视线角速率逐渐收敛到零，视线角能够快速收敛到各自期望值  $\pi/3, \pi/4, \pi/2$ 。





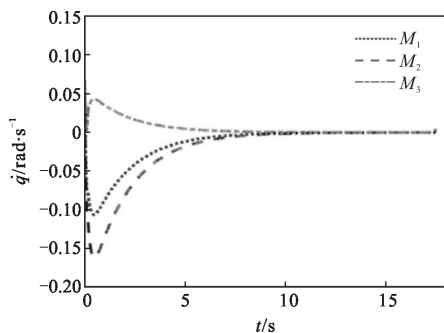
(a) 视线角跟踪曲线

(a) Line-of-sight angle tracking curve



(b) 视线法向加速度指令

(b) Acceleration commands perpendicular to LOS



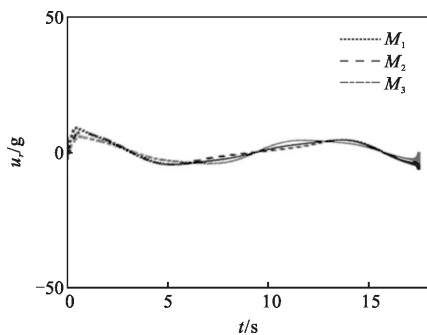
(b) 视线角速率

(b) Line-of-sight angle rate

图 5 视线角及角速率响应曲线

Fig.5 Response curves of line-of-sight angles and angle rates

图 6(a)是三枚导弹在视线方向上的加速度指令,可以看出由于采用二阶滑模控制器,滑模算法的抖振现象得到抑制。同时,随着剩余飞行时间一致,制导指令跟随目标机动干扰缓慢变化。能够看出,由于末尾时刻弹目距离减小,目标机动带来的相对干扰变大引起控制输入波动,但其幅值仍在允许范围之内,该短暂情况并没有影响整体控制性能。图 6(b)是沿着视线法向的加速度指令,由于初始角与期望



(a) 视线方向加速度指令

(a) Acceleration commands along LOS

图 6 两个通道的控制输入

Fig.6 Control inputs of the two channels

角差值较大,初始阶段控制输入大,考虑实际过载有限,文中在仿真中对控制输入做限幅处理。同时可以看出控制输入能够很快收敛到允许范围内,并且逐渐收敛直到跟随外界干扰缓慢变化。

图 7 是滑模干扰观测器估计值,可以看出该观测器能够在有限时间内快速跟踪到实际值,对于系统外界干扰有较高的估计精度,从而保证了控制器对干扰的抑制效果。

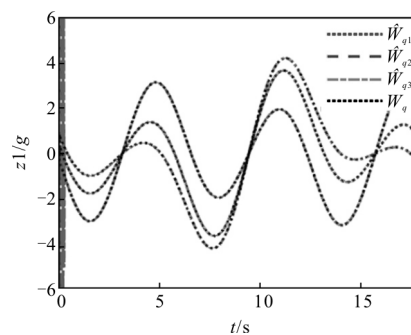


图 7 滑模干扰观测器的估算

Fig.7 Estimations of  $W_q$  by HOSMO

## 5 结论

文中设计了一种能够同时满足攻击时间和攻击角度双重约束的协同制导律。在视线方向上所设计的二阶滑模制导律能使提出的积分滑模有限时间可达,并能抑制滑模的抖振现象;当系统到达滑模面,根据一致性引理可知多枚导弹拦截目标的时间能够达到一致。同时,在视线法向上构造的高阶滑模观测器能够在有限时间内估计外界干扰,利用估计值所设计的滑模控制器能够保证视线角收敛到期望值,

视线角速率收敛到零。仿真结果表明文中所设计的协同制导律能够满足控制目标,具有良好性能。

#### 参考文献:

- [1] Zang Luyao, Hou Miao, Wang Hui, et al. A switched-gain proportional navigation applicable for infrared guidance munitions[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2017, 46(5): 0504004. (in Chinese)  
臧路尧, 侯淼, 王辉, 等. 一种适用于红外制导弹药的变增益比例导引律[J]. 红外与激光工程, 2017, 46(5): 0504004.
- [2] Wang Hui, Lin Defu, Qi Zaikang, et al. Time-varying optimal augmented proportional navigation and miss distance closed-form solutions [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(3): 692–698. (in Chinese)  
王辉, 林德福, 祁载康, 等. 时变最优的增强型比例导引及其脱靶量解析研究 [J]. 红外与激光工程, 2013, 42(3): 692–698.
- [3] Jeon I S, Lee J I, Tahk M J. Homing guidance law for cooperative attack of multiple missiles [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, 33(1): 275–280.
- [4] Harl N, Balakrishnan S N. Impact time and angle guidance with sliding mode control[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2012, 20(6): 1436–1449.
- [5] Vitaly Shaferman, Tal Shima. Cooperative optimal guidance laws for imposing a relative intercept angle [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, 38(8): 1395–1408.
- [6] Zhao Shiyu, Zhou Rui. Multi-missile cooperative guidance using coordination variables [J]. *Acta Aeronauticaet Astronautica Sinica*, 2008, 29(6): 1605–1611. (in Chinese)  
赵世钰, 周锐. 基于协调变量的多导弹协同制导 [J]. 航空学报, 2008, 29(6): 1605–1611.
- [7] Zhao J, Zhou R. Unified approach to cooperative guidance laws against stationary and maneuvering targets[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 81(4): 1635–1647.
- [8] Zhang Youan, Ma Guoxin, Wang Xingping. Time-cooperative guidance for multi-missiles: a leader-follower strategy [J]. *Acta Aeronauticaet Astronautica Sinica*, 2009, 30(6): 1109–1118. (in Chinese)  
张友安, 马国欣, 王兴平. 多导弹时间协同制导: 一种领弹-被领弹策略[J]. 航空学报, 2009, 30(6): 1109–1118.
- [9] Zhang Y, Ma G, Liu A. A distributed cooperative guidance law for salvo attack of multiple anti-ship missiles[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2015, 28(5): 1438–1450.
- [10] Zhang P, Hugh H T, Li X. Fault tolerance of cooperative interception using multiple flight vehicles [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, 350(9): 2373–2395.
- [11] Song Junhong, Song Shenmin, Xu Shengli. A cooperative guidance law for multiple missiles to intercept maneuvering target[J]. *Journal of Astronautics*, 2016, 37(12):1432–1440. (in Chinese)  
宋俊红, 宋申民, 徐胜利. 一种拦截机动目标的多导弹协同制导律[J]. 宇航学报, 2016, 37(12): 1432–1440.
- [12] Deng Yongting, Li Hongwen Wang Jianli, et al. Large telescope low speed control based on adaptive sliding mode control[J]. *Chinese Optics*, 2016, 9(6): 713–720. (in Chinese)  
邓永停, 李洪文, 王建立, 等. 基于自适应滑模控制的大型望远镜低速控制[J]. 中国光学, 2016, 9(6): 713–720.
- [13] Taleb M, Plestan F. Adaptive robust controller based on integral sliding mode concept [J]. *International Journal of Control*, 2017, 89(9): 1–23.
- [14] Zhao Changjun, Bai Yue, Gong Xun, et al. Hex-Rotor unmanned aerial vehicle controller and its flight experiment under aerodynamic disturbance [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2015, 23(4): 1088–1095. (in Chinese)  
赵常均, 白越, 宫勋, 等. 气动干扰下的 Hex-Rotor 无人飞行器控制器及其飞行实验 [J]. 光学精密工程, 2015, 23(4): 1088–1095.
- [15] Liu Jing, Li Hongwen, Deng Yongting. Current adaptive sliding mode control based on disturbance observer for permanent magnet synchronous motor [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2017, 25(5):1229–1241. (in Chinese)  
刘京, 李洪文, 邓永停. 基于扰动观测器的永磁同步电机电流环自适应滑模控制 [J]. 光学精密工程, 2017, 25(5): 1229–1241.