

## 切向双脚架-运动学支撑结构的柔度研究

安明鑫<sup>1,2</sup>, 薛 闯<sup>1</sup>, 张立浩<sup>1</sup>, 徐抒岩<sup>1</sup>, 董吉洪<sup>1</sup>

- (1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;
2. 中国科学院大学, 北京 100049)

**摘 要:** 为了实现高精度的运动学支撑结构的设计, 研究了切向双脚架-运动学支撑结构的柔度。介绍了切向双脚架-运动学支撑结构的设计原理。根据单边直圆柔性铰链的柔度公式, 推导了双脚架在  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  轴方向的等效柔度  $C_x$ 、 $C_y$  和  $C_z$  的解析式。采用有限元分析和试验验证的方法, 对双脚架的柔度解析式进行了分析验证。结果表明: 解析式结果与有限元结果、试验结果基本一致, 且误差均小于 9.8%。研究了单边直圆柔性铰链的柔槽深度  $R$  和最小厚度  $t$  对双脚架柔度  $C_x$ 、 $C_y$  和  $C_z$  的影响, 得到了双脚架的等效柔度均与柔槽深度  $R$  成正比, 与最小厚度  $t$  成反比的结论。为空间相机上的科学仪器的切向双脚架-运动学支撑结构的设计提供理论参考。

**关键词:** 柔度; 运动学支撑结构; 双脚架; 单边直圆柔性铰链; 试验

中图分类号: V414.1 文献标志码: A DOI: 10.3788/IRLA201746.0718001

## Research on compliance of tangent bipod kinematic mount

An Mingxin<sup>1,2</sup>, Xue Chuang<sup>1</sup>, Zhang Lihao<sup>1</sup>, Xu Shuyan<sup>1</sup>, Dong Jihong<sup>1</sup>

- (1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** The compliance of the tangent bipod kinematic mount was investigated in order to realize the design of high precision kinematic mount. The design principle of the tangent bipod kinematic mount was introduced in detail. The equivalent compliances  $C_x$ ,  $C_y$  and  $C_z$  of the bipod in the  $X$ -axis,  $Y$ -axis, and  $Z$ -axis directions were deduced based on the compliance equations of the single-axis right circular flexure hinge. The compliance equations of bipod were verified by the finite elements and experiments. The results show that the theoretical results are in agreement with the finite element results and experimental results, and the deviation is less than 9.8%. The influence of the flexible groove depth  $R$  and minimum thickness  $t$  on the compliances of the bipod was analyzed. It was concluded that the equivalent compliances  $C_x$ ,  $C_y$  and  $C_z$  of the tangent bipod were proportional to the flexible groove depth  $R$  and inversely proportional to the minimum thickness  $t$ . It provides a theoretical reference for the design of tangent bipod kinematic mount which is widely used to support scientific instruments in space camera.

**Key words:** compliance; kinematic mount; bipod; single-axis right circular flexure hinge; experiment

收稿日期: 2016-11-05; 修订日期: 2016-12-03

基金项目: 国家自然科学基金(60507003)

作者简介: 安明鑫(1988-), 男, 博士生, 主要从事空间遥感器光机结构设计方面的研究。Email: anmingxin2014@163.com

导师简介: 徐抒岩(1963-), 男, 研究员, 硕士, 主要从事空间望远镜大口径光学方面的研究。Email: xusy0515@icloud.com

## 0 引言

对于大型高精度、高稳定性的空间相机而言,其框架结构的稳定性是空间相机满足光学系统成像要求的关键技术之一。由于空间相机的反射镜和科学仪器等组件均安装在框架结构上,由这些组件带来的未知应力对其稳定性产生一定的影响,因此需要设计一种能够隔离这些敏感性组件所造成的影响的支撑结构。运动学支撑结构是一种静定的、能够实现自由度全约束的支撑结构<sup>[1]</sup>。

文中研究的切向双脚架-运动学支撑结构是运动学支撑结构常见的结构形式之一,其基本原理是通过合理的柔度设计实现释放或降低敏感性组件的影响。这种运动学支撑结构是一种广泛应用空间相机的反射镜和科学仪器的支撑结构。例如詹姆斯韦伯望远镜(The JWST telescope)的桁架结构<sup>[2]</sup>、SNAP 望远镜的反射镜<sup>[3]</sup>和空间红外望远镜(SPICA)的主反射镜<sup>[4]</sup>等。

对于科学仪器的支撑结构而言,其设计要求为具有一定的释放热应力(柔度)和抵抗变形(刚度)的能力<sup>[5-6]</sup>,因此运动学支撑结构柔度的变化规律的研究是其结构设计的前提。文中推导了单边直圆柔性铰链的柔度解析式;建立了双脚架结构在 X、Y、Z 轴方向的等效柔度的数学模型;分析了单边直圆柔性铰链的设计参数对双脚架柔度性能的影响关系。通过有限元分析和试验验证,验证双脚架结构在 X、Y、Z 向柔度解析式的正确性。

## 1 切向双脚架-运动学支撑结构

运动学支撑结构由 3 个双脚架组成,其结构布局如图 1 所示。3 个双脚架均匀分布于一个半径为  $r$

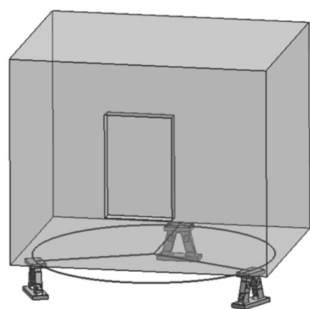


图 1 运动学支撑结构的布局

Fig.1 Layout of the tangent bipod kinematic mount

的圆上,且任意两个双脚架的夹角为  $120^\circ$ 。为了保证运动学支撑结构具有良好的力学稳定性和热稳定性,3 个双脚架有形同的结构参数,且双脚架两个支腿上的柔节对称布置。

图 2 所示为文中研究的双脚架结构,双脚架结构的柔节的布局方向为沿半径方向和切线方向。柔节的主要作用是释放当科学仪器温度发生变化时由材料不一致带来的热应力,降低对支撑结构的影响。除此之外,柔节的作用还有减小科学仪器的偏心误差、释放装配应力等作用<sup>[1]</sup>。由于单边直圆柔性铰链能够使所设计的结构应尽可能的紧凑,因此柔节将采用单边直圆柔性铰链<sup>[7]</sup>。

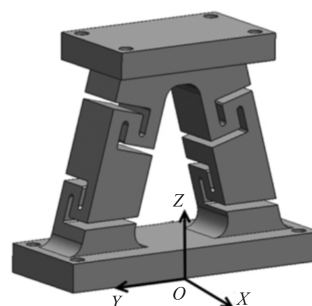


图 2 双脚架结构示意图

Fig.2 Sketch map of the bipod

## 2 柔度分析

运动学支撑结构由 3 个切向的双脚架组成,每个双脚架的支腿由 4 个单边直圆柔性铰链串联而成。对双脚架结构做出如下假设:(1)除了单边直圆柔性铰链以外的其他结构都为刚体;(2)忽略双脚架的重量。

### 2.1 单边直圆柔性铰链的柔度分析<sup>[8-10]</sup>

图 3 为单边直圆柔性铰链。其中  $R$  表示柔槽深

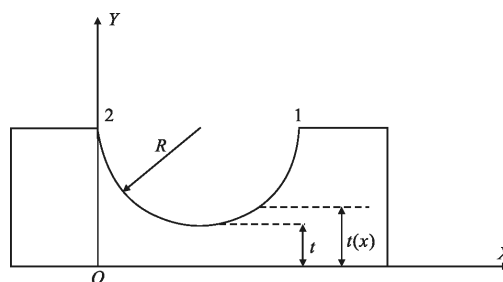


图 3 单边直圆柔性铰链的设计参数

Fig.3 Design parameters of the single-axis right circular flexure hinge

度,  $t$  表示最小厚度,  $b$  为柔性铰链厚度,  $t(x)$  为最小厚度函数, 则  $t(x)$  的表达式为:

$$t(x) = t + R - \sqrt{x(2R-x)}, x \in (0, 2R) \quad (1)$$

单边直圆柔性铰链被等效为小变形的悬臂梁, 如图 4 所示。其柔性铰链的一端固定, 另一端施加的载荷为沿  $X$ 、 $Y$  轴方向的载荷  $F_1$ 、 $F_2$  和绕  $Z$  轴的力矩  $M_3$ 。则点 2 的位移与载荷的关系式为<sup>[8]</sup>:

$$\begin{bmatrix} \theta_z \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{z1} \\ F_{y1} \\ F_{x1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中:  $\theta_z$  表示绕  $Z$  轴的转角;  $y$  表示沿  $Y$  轴的位移;  $x$  表示沿  $X$  轴的位移;  $C_{ij}$  表示柔度。

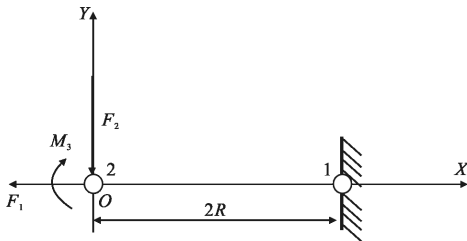


图 4 单边直圆柔性铰链的受力分析

Fig. 4 Stress analysis of the single-axis right circular flexure hinge

单边直圆柔性铰链的变性能为:

$$U = \frac{1}{2} \left( \int_0^{2R} \frac{F_x^2}{EA(x)} dx + \int_0^{2R} \frac{M_z^2}{EI_z(x)} dx \right) \quad (3)$$

式中:  $E$  为弹性模量;  $I$  为转动惯量。

$$\begin{aligned} A(x) &= bt(x), I(x) = \frac{bt(x)^3}{12}, \\ F_x &= F_1, M_z = M_3 - F_2x \end{aligned} \quad (4)$$

对公式(4)求导, 得到如下关系式:

$$\begin{cases} \theta_z = \frac{\partial U}{\partial M_{z1}} = \frac{12}{Eb} (M_{z1}I_1 - F_{y1}I_2) \\ y = \frac{\partial U}{\partial F_{y1}} = \frac{12}{Eb} (-M_{z1}I_2 + F_{y1}I_3) \\ x = \frac{\partial U}{\partial F_{x1}} = \frac{F_{x1}I_4}{Eb} \end{cases} \quad (5)$$

由公式(2)和(5)可知, 单边直圆柔性铰链的柔度为:

$$\begin{cases} C_{11} = \frac{12}{Eb} I_1 \\ C_{12} = -\frac{12}{Eb} I_2 \\ C_{22} = \frac{12}{Eb} I_3 \\ C_{33} = \frac{1}{Eb} I_4 \end{cases} \quad (6)$$

其中, 积分变量分别为:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2R} \frac{1}{t(x)^3} dx & I_2 &= \int_0^{2R} \frac{x}{t(x)^3} dx \\ I_3 &= \int_0^{2R} \frac{x^2}{t(x)^3} dx & I_4 &= \int_0^{2R} \frac{1}{t(x)} dx \end{aligned} \quad (7)$$

根据公式(1)和(7)代入公式(6), 得到单边直圆柔性铰链的柔度为:

$$\begin{cases} C_{11} = \frac{12}{Eb} \int_0^{2R} \frac{1}{[t+R-\sqrt{x(2R-x)}]^3} dx \\ C_{12} = -\frac{12}{Eb} \int_0^{2R} \frac{x}{[t+R-\sqrt{x(2R-x)}]^3} dx \\ C_{22} = \frac{12}{Eb} \int_0^{2R} \frac{x^2}{[t+R-\sqrt{x(2R-x)}]^3} dx \\ C_{33} = \frac{1}{Eb} \int_0^{2R} \frac{1}{t+R-\sqrt{x(2R-x)}} dx \end{cases} \quad (8)$$

## 2.2 双脚架的柔度分析

双脚架的结构如图 2 所示, 每个支腿由 2 个相对垂直的柔节串联而成, 并且每个柔结由 2 个单边直圆柔性铰链串联而成。因此, 双脚架结构的柔度在  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  轴的等效柔度如下所示:

### (1) $X$ 轴方向等效柔度 $C_x$

根据公式(4)可知, 单边直圆柔性铰链的在  $X$  轴方向的柔度只与力  $F_1$  有关, 与  $F_2$  和  $M_3$  无关。因此, 双脚架在  $X$  轴方向的等效机械模型如图 5 所示<sup>[11]</sup>。

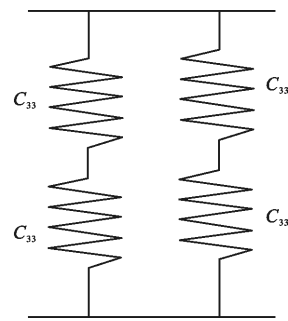


图 5 双脚架在  $X$  轴方向的等效机械模型

Fig. 5 Equivalent mechanical model of the bipod in the  $X$ -axis direction

根据串并联弹簧的计算原理, 双脚架在  $X$  轴方向的总柔度  $C_x$  为:

$$C_1 = 2C_{33} \quad (9)$$

$$C_x = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1}} = C_{33} \quad (10)$$

式中:  $C_1$  为双脚架的支腿在  $X$  轴方向的柔度。

(2) Y 轴方向等效柔度  $C_y$

双脚架在 Y 轴的受到的载荷为  $F_y$ ，一个支腿的柔性铰链受到的载荷情况如图 6 所示。在图中， $F_{y1}$ 、 $F_{y2}$  分别表示双脚架一个支腿上的两个柔性铰链的自由端受到的等效力， $M_{y1}$ 、 $M_{y2}$  分别表示这两个柔性铰链的自由端受到的等效力矩， $d_{y1}$ 、 $d_{y2}$  分别表示两个等效力到载荷  $F_y$  的垂直距离， $\theta$  为两个支腿的夹角。由于双脚架结构的对称性，能够得到如下关系式：

$$F_{y1}=F_{y2}=\frac{F_y}{2}$$

$$M_{y1}=F_{y1} \cdot d_{y1}, M_{y2}=F_{y2} \cdot d_{y2} \quad (11)$$

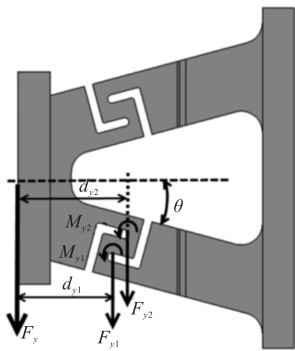


图 6 双脚架在 Y 轴方向受力分析

Fig.6 Stress analysis of the bipod in the Y-axis direction

根据公式(4)，能够得到两个柔性铰链的 Y 轴方向的位移为：

$$y_1=C_{12} \cdot M_{y1}+C_{22} \cdot F_{y1} \cdot \sin \theta$$

$$y_2=C_{33} \cdot F_{y1} \cdot \cos \theta$$

$$y_3=C_{12} \cdot M_{y2}+C_{22} \cdot F_{y2} \cdot \sin \theta$$

$$y_4=C_{33} \cdot F_{y2} \cdot \cos \theta \quad (12)$$

则双脚架在 Y 轴方向的总变形为：

$$y=\sum_{j=1}^4 y_j=F_y \left[ \frac{C_{12}}{2} (d_{y1}+d_{y2})+C_{22} \cdot \sin \theta+C_{33} \cdot \cos \theta \right] \quad (13)$$

所以双脚架在 Y 轴方向的等效柔度为：

$$C_y=\frac{y}{F_y}=\frac{C_{12}}{2} (d_{y1}+d_{y2})+C_{22} \cdot \sin \theta+C_{33} \cdot \cos \theta \quad (14)$$

(3) Z 轴方向等效柔度  $C_z$

图 7 为双脚架的一个支腿在 Z 轴方向的受力分析。图中， $F_z$  是双脚架在 Z 轴方向的受力； $d_z(i=1, 2, 3, 4)$  表示柔性铰链的受力端到力  $F_z$  的垂直距离，且  $d_{z3}-d_{z4}=2R$ ； $F_{zi}(i=1, 2, 3, 4)$  表示柔性铰链的自由端受到的力，且  $F_i=F_z/2$ ； $M_{zi}(i=1, 2, 3, 4)$  表示柔性铰链受到的力矩，其关系式为：

$$M_{zj}=F_{zj} \cdot d_{zj}(j=1, 2, 3), M_{z4}=-F_{z4} \cdot d_{z4} \quad (15)$$

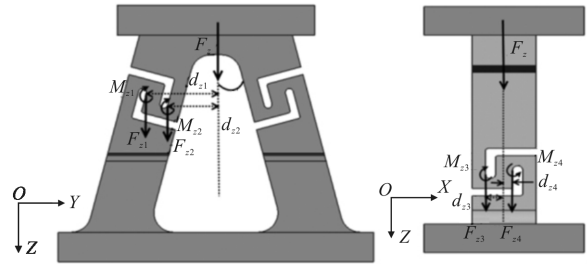


图 7 双脚架在 Z 轴方向受力分析

Fig.7 Stress analysis of the bipod in the Z-axis direction

根据公式(4)，得到单边直圆柔性铰链在 Z 轴的位移分别为：

$$z_1=C_{12} \cdot M_{z1}+C_{22} \cdot F_{z1} \cdot \cos \theta+C_{33} \cdot F_{z1} \cdot \sin \theta$$

$$z_2=C_{12} \cdot M_{z2}+C_{22} \cdot F_{z2} \cdot \cos \theta+C_{33} \cdot F_{z2} \cdot \sin \theta$$

$$z_3=C_{12} \cdot M_{z3}+C_{22} \cdot F_{z3}$$

$$z_4=C_{12} \cdot M_{z4}+C_{22} \cdot F_{z4} \quad (16)$$

则双脚架在 Z 轴方向的总位移 z 为：

$$z=\sum_{j=1}^4 z_j=F_z \left[ \frac{C_{12}}{2} (d_{z1}+d_{z2})+C_{22} \cdot \cos \theta+C_{33} \cdot \sin \theta+C_{12} \cdot R+C_{22} \right] \quad (17)$$

所以双脚架在 Z 轴方向的等效柔度为：

$$C_z=\frac{z}{F_z}=\frac{C_{12}}{2} (d_{z1}+d_{z2})+C_{22} \cdot \cos \theta+C_{33} \cdot \sin \theta+C_{12} \cdot R+C_{22} \quad (18)$$

3 结构参数对运动学支撑结构柔度的影响

根据公式(10)、(12)、(16)、(20)可知，双脚架的等效柔度均与弹性模量  $E$  和单边直圆柔性铰链的宽度  $b$  成反比。为了进一步分析单边直圆柔性铰链的柔槽深度  $R$  和最小厚度  $t$  对双脚架柔度的影响，假设弹性模量  $E=110 \text{ GPa}$ ，铰链宽度  $b=0.024 \text{ m}$ ， $d_{y1}+d_{y2}=0.059 \text{ m}$ ， $d_{z1}+d_{z2}=0.11 \text{ m}$ ， $\theta=16^\circ$ 。运用 Matlab 对双脚架的柔度进行计算，得到柔度  $C_x$ 、 $C_y$  和  $C_z$  随设计参数  $R$  和  $t$  的变化关系如图 8、9、10 所示。

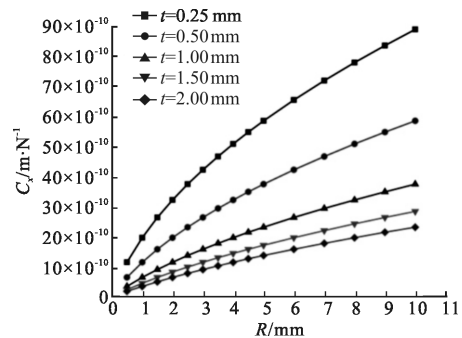


图 8 柔度  $C_x$  随设计参数  $R$  和  $t$  的变化关系

Fig.8 Changes between  $C_x$  and  $R, t$

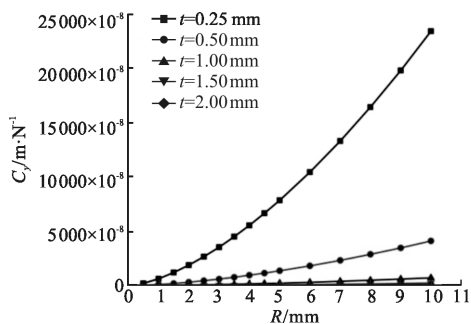


图 9 柔度  $C_y$  随设计参数  $R$  和  $t$  的变化关系  
Fig.9 Changes between  $C_y$  and  $R, t$

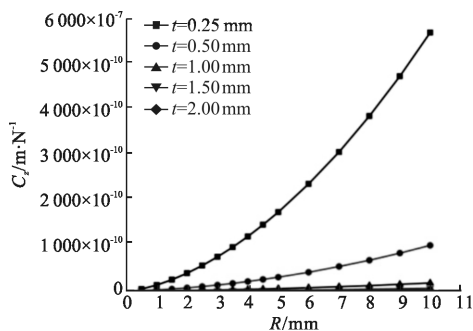


图 10 柔度  $C_z$  随设计参数  $R$  和  $t$  的变化关系  
Fig.10 Changes between  $C_z$  and  $R, t$

通过分析双脚架的柔度与设计参数  $R$  和  $t$  的变化关系,得到如下结论:

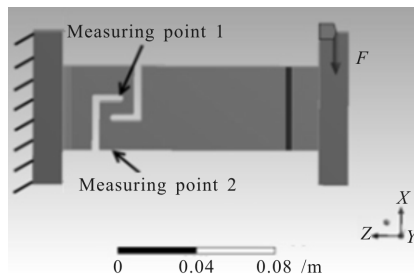
(1) 双脚架的三方向的柔度具有相同变化趋势相同。双脚架的柔度均与柔槽深度  $R$  呈正比,与最小厚度  $t$  成反比;(2) 对于双脚架柔度  $C_y$  和  $C_z$ ,当最小厚度  $t$  大于某一临界值时,这两个柔度的变化是趋于线性的,最小厚度  $t$  对双脚架柔度的影响较小。当最小厚度  $t$  小于某一临界值时,双脚架柔度的变化率随  $R$  的增加而增大;(3) 对于双脚架柔度  $C_x$ ,当最小厚度  $t$  一定时,双脚架柔度的变化率随设计参数  $R$  的增加而减小。

因此,在双脚架结构设计时,根据不同的设计目标应该合理的选择参数  $R$  和  $t$  的设计值,有利于设计出理想的运动学支撑结构。

#### 4 有限元分析

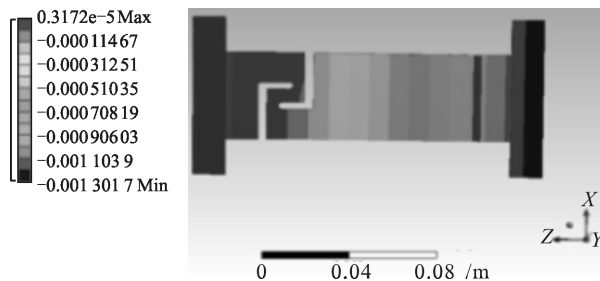
运用有限元方法,对双脚架的柔度  $C_x$ 、 $C_y$  和  $C_z$  进行分析验证,并取运动学支撑结构的设计参数: $R=2\text{ mm}$ , $t=5\text{ mm}$ 。双脚架的材料为 TC4,弹性模量为  $E=110\text{ GPa}$ ,双脚架的宽度  $b=0.024\text{ m}$ 。在双脚架的 3 个方向均施加载荷  $F(F=1\ 000\text{ N})$ ,计算测量点的位移,其中在  $X$  和  $Y$  方向,两个测量点的位移之差为双脚

架在该方向的变形。双脚架的柔度分析的载荷和分析结果如图 11、12 和 13 所示。分析结果与理论结果的对比如表 1 所示。



(a) 载荷条件

(a) Load conditions

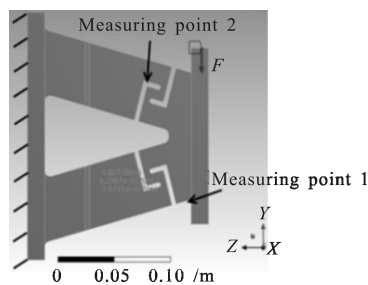


(b) 位移云图

(b) Nephogram of displacement

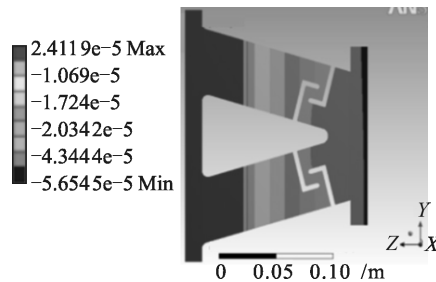
图 11 双脚架 X 向柔度分析

Fig.11 X-directional compliance analysis of the bipod



(a) 载荷条件

(a) Load conditions

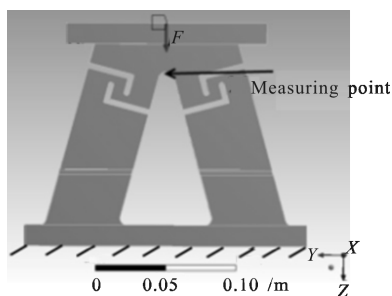


(b) 位移云图

(b) Nephogram of displacement

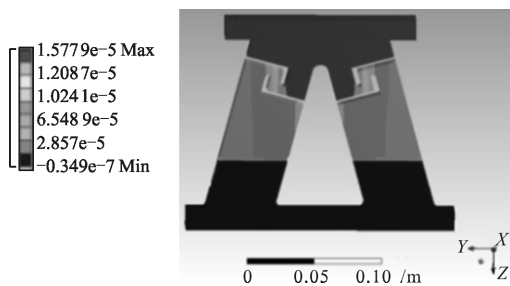
图 12 双脚架 Y 向柔度分析

Fig.12 Y-directional compliance analysis of the bipod



(a) 载荷条件

(a) Load conditions



(b) 位移云图

(b) Nephogram of displacement

图 13 双脚架 Z 向柔度分析

Fig.13 Z-directional compliance analysis of the bipod

表 1 有限元结果与解析式结果的对比

Tab.1 Comparison between the results of the finite element and compliance equations

Direction	Measuring / $\mu\text{m}$		Dis- place- ment/ $\mu\text{m}$	Compliance / $\text{m} \cdot \text{N} \times 10^{-9}$		Devia- tion
	Point1	Point2		Experi- ment	Compliance equation	
X( $C_x$ )	-5.35	-5.64	0.29	0.29	0.281	3.2%
Y( $C_y$ )	-45.8	-37	8.8	8.8	8.29	6.2%
Z( $C_z$ )	-15.8	15.8	15.8	15.8	14.7	7.4%

从表 1 可以看出, 双脚架柔度的有限元结果与理论结果基本一致, 误差分别为 3.2%、9.8% 和 7.4%。

### 5 试验验证

由于测量设备精度的限制, 文中主要验证双脚架在 Y 向和 Z 向的柔度。根据试验方案, 加工设计参数  $R=2 \text{ mm}$ 、 $t=5 \text{ mm}$  的双脚架结构, 其材料为 TC4。试验采用的载荷加载设备为数显式推拉力计, 位移测试设备为机械千分表(测量精度为  $1 \mu\text{m}$ )。两个试验的载荷加载方式如图 11(a)和图 12(a)所示, 测试

环境如图 14 所示。通过拉压力计施加载荷的大小为  $F=1000 \text{ N}$ 。采用多次测量取平均值的方法, 通过千分表得到测量点的位移, 进而得到双脚架的柔度。试验结果与解析式结果的对比如表 2 所示。

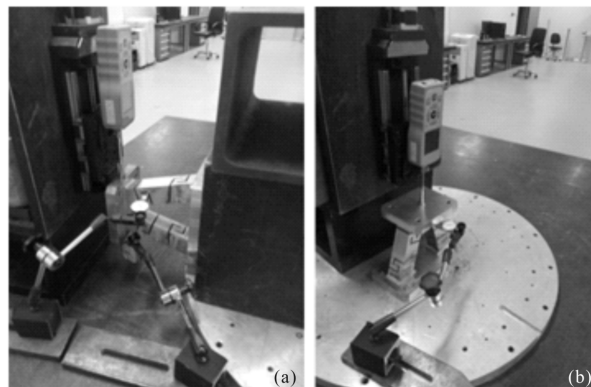


图 14 双脚架的 Y 向柔度试验(a)和 Z 向柔度试验(b)

Fig.14 Experiment of the compliance of bipod: Y-axis (a) and Z-axis (b)

表 2 试验结果与解析式结果的对比

Tab.2 Comparison between the results of the experiment and compliance equations

Direction	Measuring / $\mu\text{m}$		Dis- place- ment/ $\mu\text{m}$	Compliance / $\text{m} \cdot \text{N} \times 10^{-9}$		Devia- tion
	Point1	Point2		Experi- ment	Compliance equation	
Y( $C_y$ )	46.2	37.1	9.1	9.1	8.29	9.8%
Z( $C_z$ )	16.1	16.1	16.1	16.1	14.7	9.5%

从表 2 可以看出, 双脚架柔度的试验结果与理论结果基本一致, 且误差小于 9.8%。双脚架柔度  $C_y$  和  $C_z$  的解析式结果均偏小, 分析造成这个误差的主要原因是在理论计算时将双脚架的非铰链部分等效为刚体, 而实际分析时这部分结构为弹性体。

### 6 结论

文中对单边直圆柔性铰链的柔度进行了分析, 并基于单边直圆柔性铰链的柔度公式推导出了运动学支撑结构的柔度, 得到了双脚架柔度  $C_x$ 、 $C_y$  和  $C_z$  与设计参数  $R$ 、 $t$  的关系式。通过有限元和试验验证, 得到的结果是双脚架柔度与有限元结果、试验结果基本一致, 且误差均小于 9.8%。该结果表明: 在误差范围内, 双脚架的柔度解析式是正确的。文中还对双

脚架的设计参数对其柔度的影响进行了分析,结果表明:双脚架的柔度均与柔槽深度  $R$  成正比,与最小厚度  $t$  成反比。运动学支撑结构的柔度分析不仅为某空间相机科学仪器的支撑提供理论基础,同时也为其在其他领域的应用提供参考借鉴。

#### 参考文献:

- [1] Bely P Y. The Design and Construction of Large Optical Telescope[M]. New York: Springer, 2002: 203–207.
- [2] Kunt O C, Johnston J, Bartoszyk A, et al. Development and sizing of the JWST integrated science instrument module (ISIM) metering structure[C]//SPIE, 2006, 6273: 627322.
- [3] Lampton M, Akerlof C, Aldering G, et al. SNAP telescope [C]//SPIE, 2002, 4849: 215–216.
- [4] Dider Castel, Emmanuel Sein, Sebastien Lopez, et al. The 3.2 m all SiC telescope for SPICA [C]//SPIE, 2012, 8450: 1–13.
- [5] Zhang Lei, Ding Yalin, Xu Zhengping, et al. Long type scanning mirror with flexible supporting [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2015, 44(12): 3678–3683. (in Chinese)
- [6] Guo Peng, Zhang Jingxu, Yang Fei, et al. Design and buckling analysis of TMT tertiary mirror cell assembly flexure structure [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2015, 44(12): 3678–3683. (in Chinese)
- [7] Okazaki Y. A micro-positioning tool post using a piezoelectric actuator for diamond turning machines [J]. *Precision Engineering*, 1990, 12(3): 151–156.
- [8] Wolfgang Steiner. The use of Castigliano's theorem in coulomb friction problems [J]. *Acta Mechanica*, 2014, 225(9): 2471–2483.
- [9] Zhang Zhijie, Yuan Yibao. Compliance calculation and analysis of typical flexure hinges[J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(4): 106–110. (in Chinese)
- [10] Li Haixing, Ding Yalin, Hui Shouwen, et al. Design of compliance factor experiment for single-axis flexure hinge [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2011, 19(7): 1552–1559. (in Chinese)
- [11] Guo Quanfeng, Li Wei, Dong Jihong, et al. Space focusing mirror assembly with flexure hinges[C]//SPIE, 2014, 9283:1–6.