

## 广义最小二乘法在主动光学模式定标中的应用

兰 斌<sup>1,2</sup>, 吴小霞<sup>1</sup>, 杨洪波<sup>3</sup>, 蒋 权<sup>2,3</sup>, 张正铎<sup>1</sup>

- (1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;
2. 中国科学院大学, 北京 100049;
3. 中国科学院苏州生物医学工程技术研究所, 江苏 苏州 215163)

**摘 要:** 为了解除 4 m 轻量化反射镜支撑系统间存在的相互耦合作用, 提出了采用广义最小二乘法进行主动光学的模式定标计算。首先, 介绍了 4 m 轻量化反射镜的支撑系统, 推导出液压 Whiffletree 支撑系统工作下主动光学校正力组满足解耦条件的等式约束方程, 将节点面积加权因子修正后的 Zernike 多项式面形拟合过程作为有限元分析前处理, 建立主动光学的响应矩阵。其次, 采用广义最小二乘法求解同时满足等式和不等式约束下的最佳校正力组。最后, 将提出的方法应用于重力印透效应产生的镜面变形主动力解算, 分析不同阻尼因子对解算结果的影响。结果表明: 阻尼因子取  $7.4e-9$  时, 达到了满足约束条件的最佳校正效果, 镜面面形均方根由最初的 271.5 nm 通过校正后变为 8.3 nm。验证了广义最小二乘法应用于 4 m 轻量化反射镜主动光学校正力组解算的可行性。

**关键词:** 主动光学; 模式定标; 4 m 轻量化反射镜; 液压 Whiffletree 支撑; 广义最小二乘法  
**中图分类号:** TH751    **文献标志码:** A    **DOI:** 10.3788/IRLA201746.0617001

## Application of generalized least squares method in the calibration of active optics mode

Lan Bin<sup>1,2</sup>, Wu Xiaoxia<sup>1</sup>, Yang Hongbo<sup>3</sup>, Jiang Quan<sup>2,3</sup>, Zhang Zhengduo<sup>1</sup>

- (1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;
3. Suzhou Institute of Biomedical Engineering and Technology, Chinese Academy of Sciences, Suzhou 215163, China)

**Abstract:** In order to relieve the coupling effect of 4 m lightweight mirror support system, a generalized least square method was proposed to calibrate active optics. Firstly, the support system of 4 m lightweight mirror was introduced, and the constraints needed to meet in hydraulic Whiffletree passive support system was deduced. Then the Zernike polynomial corrected by node area weighted factor was used to fit the mirror deformation, resulting to influence matrix between Zernike coefficients of mirror deformation and active forces. After that, a generalized least squares method was adopted to obtain the optimal correction forces which simultaneously satisfied the equality and inequality constraints. Finally, the proposed method

收稿日期: 2016-10-05; 修订日期: 2016-11-15

作者简介: 兰斌(1989-), 男, 博士生, 主要从事光机系统集成分析和主动光学模式标定方面的研究。Email: lanbin169320@126.com

导师简介: 杨洪波(1963-), 男, 研究员, 博士生导师, 主要从事光机电集成技术分析、康复工程技术和机电一体化方面的研究。

Email: yanghb@sibet.ac.cn

was applied to the calculation of the optimal active forces to correct the mirror deformation caused by the gravity, and the influence of different damping factors on the calculation results were analyzed. Results show that the optimal correction effect is achieved when the damping factor is  $7.4e-9$ , and the RMS of the mirror deformation is changed from the original 271.5 nm to 8.3 nm after correction, verifying the feasibility of the generalized least squares method to the calibration of the 4 m lightweight mirror active optics.

**Key words:** active optics; mode calibration; 4 m lightweight mirror; Whiffletree hydraulic support; generalized least square method

## 0 引言

主动光学技术可以有效校正望远镜使用过程中热、重力和加工装调误差引起的系统低阶像差,广泛的应用于地基 4 m 级以上的望远镜系统<sup>[1]</sup>。望远镜主镜相对于俯仰轴的空间位置决定了光学系统的视轴方向,对望远镜系统跟踪定位精度的影响至关重要<sup>[2]</sup>。液压 Whiffletree 无定向支撑系统不仅可以实现对望远镜主镜的精确定位,而且任意的增加支撑点的数量,达到最佳的被动支撑效果。由于液压系统自身的高刚度和油液的粘性使得系统具有良好的阻尼特性,能够更好地抵抗风载等外扰动。国外很多高精度光学成像望远镜系统,如 3.5 m WIYN<sup>[3]</sup>、3.67 m AEOS<sup>[4]</sup>和 8 m VLT<sup>[5]</sup>等都采用了液压 Whiffletree 虚拟硬点构成的无定向支撑技术。

通过波前传感器检测到的波像差来解算促动器主动校正力组的过程称主动光学系统模式定标过程。主动光学系统模式定标的方法主要有两种:一种是由欧南台 L. Noethe<sup>[6]</sup>提出的以主镜的自由谐振模式作为镜面面形误差拟合的底基函数,进行校正力解算的方法。崔向群院士<sup>[7]</sup>首先成功的开展了对 8.2 m VLT 弯月镜的自由谐振模式定标计算的工作,中国科学院长春光学精密机械与物理研究所陈夫林<sup>[8]</sup>采用自由谐振模式对  $\Phi 600$  薄镜面进行主动光学校正,获得校正后的面形 RMS 为 12.6 nm。虽然自由谐振模式是主镜结构特性的反映,在薄镜面内具有正交性和完备性,实现了特定面形的最小能量校正,但是对于复杂的轻量化镜体,主镜镜面模态在镜面区域内不正交,无法作为镜面面形误差的拟合基底;另外一种方法是采用最小二乘法对已知镜面面形误差和镜体响应矩阵来反解校正力组,这种方法通常以 Zernike

多项式作为拟合的基底函数。为了限制主动校正力的大小,苏定强院士<sup>[9]</sup>首次提出了阻尼最小二乘法,应用于南京天文光学技术研究所研制的薄镜面主动光学实验系统中校正力的求解。中国科学院长春光学精密机械与物理研究所<sup>[10]</sup>、中国科学院光电技术研究所<sup>[11]</sup>、北京理工大学<sup>[12]</sup>、苏州大学<sup>[13]</sup>都采用过这种方法进行主动校正力的解算,获得了校正力值在一定范围内的最佳面形校正效果。但由于液压 Whiffletree 支撑系统的引入会导致每个分区支撑点之间的液压区域相互连通,主动校正力组需要满足一定的约束条件,才能解除主动光学面形校正和液压被动支撑相互之间的存在耦合作用。因此存在液压 Whiffletree 虚拟硬点构成的无定向支撑中主动力的求解为等式约束下最小二乘问题,以上两种模式定标的方式都无法保证求解出的校正力组满足支撑系统的解耦条件。

文中基于静力学平衡推导出液压 Whiffletree 被动支撑系统与促动器面形校正的主动光学系统的耦合矩阵,引入接节点面积加权因子提高 Zernike 多项式的拟合精度,通过有限元分析得到镜面变形 Zernike 多项式系数与主动力组之间的响应矩阵。采用广义最小二乘法解算同时满足等式和不等式约束下的最佳校正力组,将提出的方法应用于重力印透效应产生的镜面变形主动力组解算过程中,讨论了广义最小二乘法中阻尼因子对求解结果的影响。

## 1 4 m 轻量化反射镜支撑系统

与主动光学通常采用的弯月镜相比,4 m 望远镜主镜采用 SiC 材料制备,扇形轻量化结构形式,使得主镜系统具有更大的刚度以抵抗风力负载,而且主

镜轻量化孔之间构成的薄壁腔体通风效果良好,大大减小了镜体的热结构常数。4 m 望远镜主镜采用 54 点 Whiffletree 液压被动支撑并联促动器主动支撑组成的轴向支撑方案和 24 点 Whiffletree 液压被动支撑的侧向支撑方案<sup>[14]</sup>。如图 1 所示,其中轴向 Whiffletree 液压支撑系统等分为 3 个区,侧向

Whiffletree 液压支撑系统等分为两个区,望远镜俯仰角变化过程中,液压被动支撑系统承担着主镜的重量。液压 Whiffletree 支撑系统定义了主镜空间位置的 5 个虚拟硬点,由位置传感器实时监测主镜的空间位置,反馈给液压伺服控制系统,通过注油量对主镜进行精确定位。

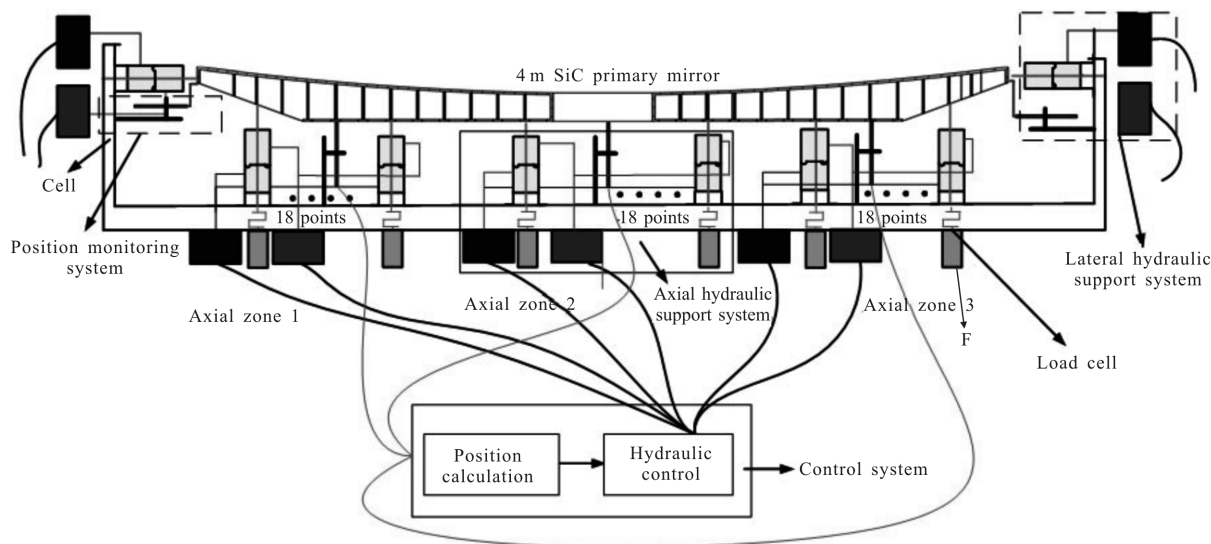


图 1 4 m 反射镜支撑系统示意图

Fig.1 Schematic diagram of 4 m mirror support system

液压 Whiffletree 组成的无定向支撑系统,只能确保主镜相对于主镜室的相对空间位置<sup>[15-16]</sup>,由于主镜重力印透效应产生的镜面面形误差无法被液压伺服系统有效的监测并校正,只能通过主镜轴向支撑点处安装促动器来主动校正,图 1 所示的 Load cell 处施加的力  $F$  即为主动校正力。

赖自由度集; $R_d$  和  $R_l$  为约束矩阵。每个分区任意选取一个支撑点作为这个区的依赖自由度  $\vec{u}_d$ , 如编号为 1, 3 和 5 的支撑点的自由度为依赖自由度集,其余的为独立自由度集,图 2 所示为轴向支撑点的位置编号与液压分区示意图。

## 2 主镜系统响应矩阵求解

主动光学模式定标过程中使用的响应矩阵表征了镜面面形与校正力的关系,准确获得主镜系统的响应矩阵是主动光学面形校正的关键。由于液压 Whiffletree 无定向轴向支撑系中每个分区所有支撑点处在一个连通器内,压强相等,位移和为零。因此在有限元分析中可以通过约束方程来模拟液压 Whiffletree 支撑系统,轴向支撑点沿光轴方向自由度的关系式:

$$R_d \cdot \vec{u}_d + R_l \cdot \vec{u}_l = 0 \quad (1)$$

式中: $\vec{u}_l$  为轴向支撑独立自由度集; $\vec{u}_d$  为轴向支撑依

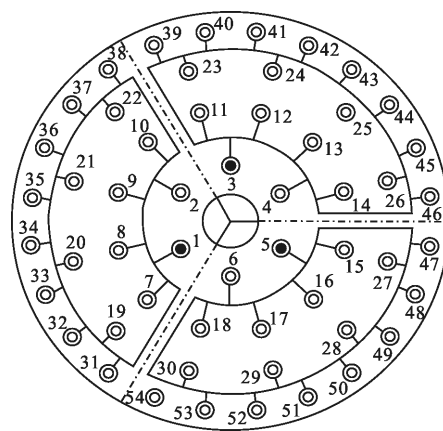


图 2 4 m 反射镜支撑点布局图

Fig.2 4 m mirror support point layout

当编号为  $N$  促动器施加主动力  $f_N$  时,在 3 个液

压区会产生液压支撑反力来达到系统的平衡,假定三个液压分区产生的压强支反力分别为  $\Delta P_1$ 、 $\Delta P_2$  和  $\Delta P_3$ ,根据主镜所受的合力为零,合力矩为零,列出关系式:

$$\begin{cases} f_N + 18A(\Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3) = 0 \\ f_N \cdot x_N + \sum_{i=1}^{18} A\Delta P_{1i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^{18} A\Delta P_{2i} \cdot x_i + \sum_{i=1}^{18} A\Delta P_{3i} \cdot x_i = 0 \\ f_N \cdot y_N + \sum_{i=1}^{18} A\Delta P_{1i} \cdot y_i + \sum_{i=1}^{18} A\Delta P_{2i} \cdot y_i + \sum_{i=1}^{18} A\Delta P_{3i} \cdot y_i = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $A$  为液压缸支撑面积;  $x_i$  和  $y_i$  分别为编号为  $i$  的促动器到  $x$  轴和  $y$  轴的距离,坐标原点位于主镜顶点,光轴方向为  $z$  轴。

根据公式(2)可以求解出系统的每个轴向支撑点处的液压支反力,所有促动器依次作用单位力,得到液压支反力组合构成方阵  $T$ ,称为支撑力的耦合矩阵。

但是实际主动光学校正过程中为了避免与液压伺服控制相互耦合,要求校正力组满足施加到系统后所有分区液压系统的支反力为零,因此主动光学校正力应该满足约束方程:

$$T \cdot \vec{f} = 0 \quad (3)$$

通常采用有限元分析软件在每个促动器位置依次施加作用单位力,以 Zernike 多项式系数表示的镜面的变形量构成响应矩阵,但随着促动器数量的增多,每进行一次仿真分析后都需要采用 Zernike 多项式对镜面变形量进行拟合处理,操作过程变得十分繁琐。采用最小二乘法建立镜面变形 Zernike 多项式系数与镜面所有节点位移之间的线性关系式,以约束方程的形式加入到有限元模型中,将面形拟合过程作为前处理,避免了后处理中重复的面形拟合过程,简化了响应矩阵的求解过程。

针对镜面有限元网格不均匀引起的基底函数的非正交性,引入节点面积加权因子  $w_i$  进行修正。拟合误差矩阵  $E$  定义为镜面所有节点实际位移  $du_i$  与 Zernike 多项式拟合量  $z_i$  之差的平方加权和:

$$E = \sum_i^n w_i (du_i - z_i)^2 \quad (4)$$

式中: 镜面采样节点  $i$  处 Zernike 系数拟合量  $z_i = \sum_{j=1}^m c_j \Phi_j^i$ ;  $m$  为选取的 Zernike 基底项数;  $n$  为镜面采样节点的数量。

拟合误差  $E$  在最佳拟合 Zernike 多项式系数处取得极小值,即最佳拟合系数处拟合误差  $E$  对每个 Zernike 分量的偏微分均为 0,得到方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial c_k} &= \sum_{i=1}^n 2w_i \Phi_k^i (du_i - \sum_{j=1}^m c_j \Phi_j^i) = \sum_{i=1}^n 2w_i \Phi_k^i du_i - \\ &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m 2w_i c_j \Phi_j^i \Phi_k^i = 0 \quad (k=1 \sim m) \end{aligned} \quad (5)$$

得到  $m$  个方程,从而将问题转化为求解  $m$  元一次方程组的问题:

$$[G] \vec{u} - [H] \vec{c} = 0 \quad (6)$$

式中:  $G_{ki} = w_i \Phi_k^i$ ,  $H_{kj} = \sum_i w_i \Phi_j^i \Phi_k^i$ 。

公式(6)即为镜面节点沿光轴变形量与 Zernike 多项式系数之间的约束方程表达式。需要注意的是望远镜在工作过程中产生的倾斜、离焦和初级慧差都可以通过次镜得到校正,在波前误差拟合时应该去掉平移、倾斜、离焦和初级慧差对应的 Zernike 项。

### 3 广义最小二乘法

所有促动器依次作用单位力,得到的镜面 Zernike 变形系数构成的矩阵  $A_{n \times m}$ ,即为主动光学响应矩阵。主动光学镜面面形校正公式为:

$$A_{n \times m} \vec{f}_{m \times 1} = -\vec{c}_{n \times 1} \quad (7)$$

式中:  $\vec{c}_{n \times 1}$  为波前监测到的镜面面型值;  $n$  为去除平移、倾斜、离焦和初级慧差项后的 Zernike 多项式系数项,取  $n=87$ ;  $\vec{f}_{m \times 1}$  为产生镜面变形量  $-\vec{c}_{n \times 1}$  所需要的校正力向量;  $m$  为促动器的数量,  $m=54$ 。主动光学镜面面形校正力解算过程是公式(7)求逆的过程,由于  $n \geq m$ ,属于超定方程组,一般情况下不存在准确解,只能求解校正力组的极小范数最小二乘法解。

4 m 轻量化反射镜主动光学系统中为了保证输出力的精度,要求每个促动器最大作用力小于促动器的最大额定输出力  $\pm 100$  N。而且为了避免液压伺服控制与主镜面型校正系统相互耦合,主动校正力组必须满足公式(3)定义的约束条件。因此,4 m 轻量化反射镜主动光学校正力组解算过程可以抽象为线性不等式和等式共同约束下的最小二乘解的问题,数学模型为:

$$\begin{aligned} & \min(\vec{A}\vec{f}+\vec{c})^T(\vec{A}\vec{f}+\vec{c}) \\ \text{s.t. } & -100 \cdot \vec{e}_{54 \times 1} \leq \vec{f} \leq 100 \cdot \vec{e}_{54 \times 1} \\ & T\vec{f}=0 \end{aligned} \quad (8)$$

针对公式(8)表示的有约束条件的最小二乘问题提出广义最小二乘法,将响应矩阵  $A$ 、阻尼矩阵  $\rho I$  和支撑系统耦合矩阵  $T$  组合成新的广义响应矩阵  $A'$ ,广义最小二乘表达式为:

$$A' \cdot \vec{f} = -\vec{c} \quad (9)$$

式中:  $A' = \begin{bmatrix} A \\ \rho I \\ T \end{bmatrix}$ ,  $\vec{c}' = \begin{bmatrix} \vec{c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{c}$  波前传感器检测到的以

Zernike 多项式表示的波像差;  $\rho$  为阻尼因子,与阻尼最小二乘法类似<sup>[9]</sup>,阻尼因子的作用是对较大的主动校正力解进行衰减。广义最小二乘法求解得到的校正力组为:

$$\vec{f} = -(A'^T A')^{-1} A'^T \vec{c} \quad (10)$$

带入到公式(9)得到最小二乘解的残差,其中  $\|\vec{c} + A\vec{f}\|_2$  为残余的面形均方根值,  $\|\rho\vec{f}\|_2$  项正比于校正力向量组的欧拉范数,  $\|T\vec{f}\|_2$  项为主动校正力与液压系统耦合力的欧拉范数。可知求解出来的主动校正力组不完全满足解耦条件,是面形残差最小欧拉范数解、校正力组最小欧拉范数解和支撑系统耦合力最小欧拉范数解的折中解。

#### 4 阻尼因子的选取

阻尼因子的选取对广义最小二乘法解算出的主动校正力组的有效性至关重要,下面通过解算望远镜指向天顶角时,重力印透效应产生的主镜镜面变形所需要的主动校正力的过程,来说明广义最小二乘法中阻尼因子对求解结果的影响。

图 3(a)为重力印透效应产生的 4 m 反射镜变形云图,面形均方根为 271.5 nm。结构函数可以用来描述反射镜面形的空间频率特征<sup>[17]</sup>,在数值上等于相隔一定空间间隔的镜面采样点间变形量之差的均方根值:

$$SF(r) = \langle (\phi(x+r) - \phi(x))^2 \rangle_x \quad (11)$$

图 3(b)为重力印透产生的镜面变形的结构函数,可知重力作用下支撑点之间的空间起伏产生的中低

频误差占总变形量的主要成分。

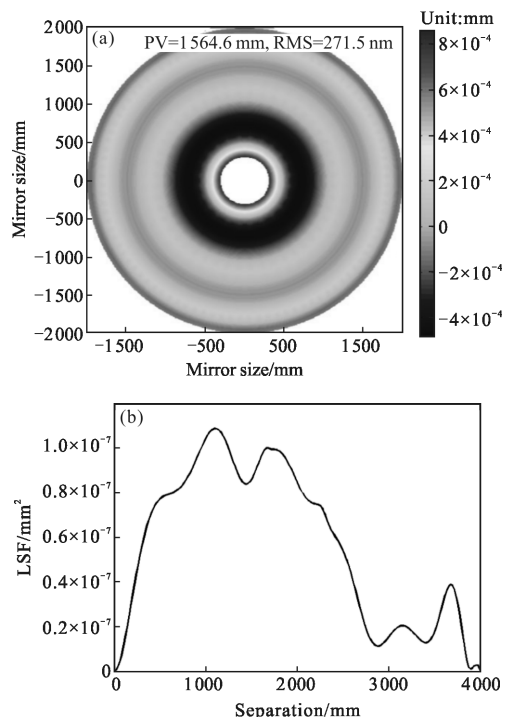


图 3 重力印透效应下反射镜面形云图和结构函数

Fig.3 Structure function and cloud chart of mirror deformation under gravity

为了方便解算,忽略波前拟合误差,将重力印透下 Zernike 系数形式的主镜变形量作为波前探测器检测到的面形误差  $\vec{c}$ 。阻尼因子  $\rho$  在区间  $10^{-3} \sim 10^{-10}$  内按对数等间隔取 100 个值,带入公式(11),解算出每个阻尼因子  $\rho$  对应的校正力组、面形残差均方根值 RMS、校正力组欧拉范数  $\|\vec{f}\|_2$ 、耦合力组欧拉范数  $\|T \cdot \vec{f}\|$  和校正力组无穷范数  $\|\vec{f}\|_\infty$ 。如图 4 所示为不同的阻尼因子  $\rho$  对校正力解算结果的影响曲线,可知阻尼因子越大对校正力的衰减作用越强,随着阻尼因子由大变小,面形残差均方根值变小,支撑系统耦合力欧拉范数变大,校正力组的无穷范数(绝对值最大的力)变大。阻尼因子在  $10^{-3} \sim 10^{-5}$  区间取值,促动器的力值被过度衰减,限制了对残余面形的有效校正;阻尼因子在  $10^{-6} \sim 10^{-8}$  区间取值,校正力组欧拉范数与残余面形的均方根值大小相当,面形残差均方根曲线和促动器最大输出力曲线变化剧烈;阻尼因子在  $10^{-8} \sim 10^{-10}$  区间取值,阻尼因子对促动器的衰减作用减弱,面形残差达到了最佳的校正效果,解算的结果趋于收敛。

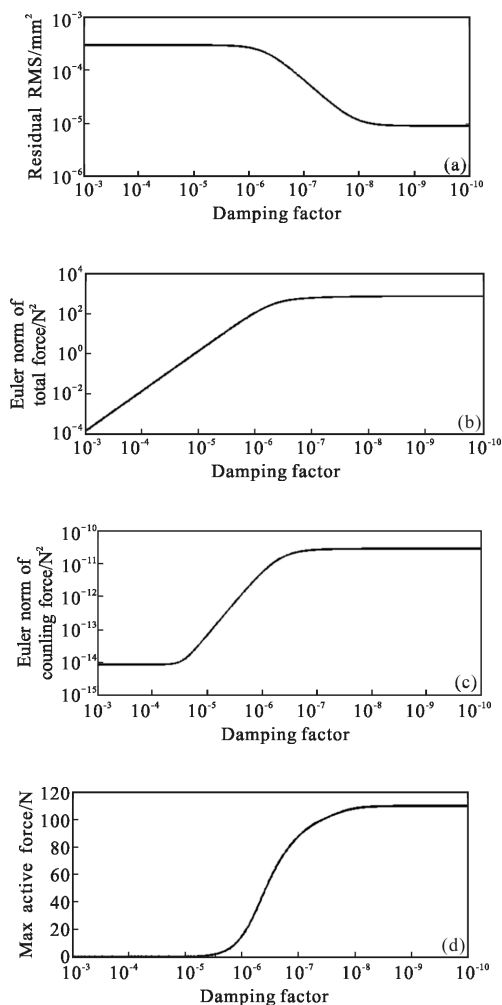


图 4 阻尼因子对主动校正力解算结果影响

Fig.4 Effect of damping factor on the calculation results of active correction force

由于残余面形均方根值为微米量级，导致广义最小二乘求解出的耦合力欧拉范数 被有效抑制，如图 4 所示，耦合力的欧拉范数远小于校正力的欧拉范数，因此广义最小二乘法求解出校正力组产生的支撑系统耦合作用可以忽略不计。

当阻尼因子小于  $7.4e-9$ ，校正力组的无穷范数值大于 100 N，超出了促动器的额定输出力值。因此将  $P=7.4e-9$  带入公式(10)，可以求解出满足约束要求的最佳校正力组。校正后残余的镜面变形云图如图 5(a)所示，面形的均方根值为 8.3 nm。图 5(b)为残余面形对应的结构函数，可知经过主动力校正后由于重力印透效应产生的中底频误差被有效的校正，而由于最大校正力的限制，最外圈支撑点处的变形没有达到最佳的校正效果。

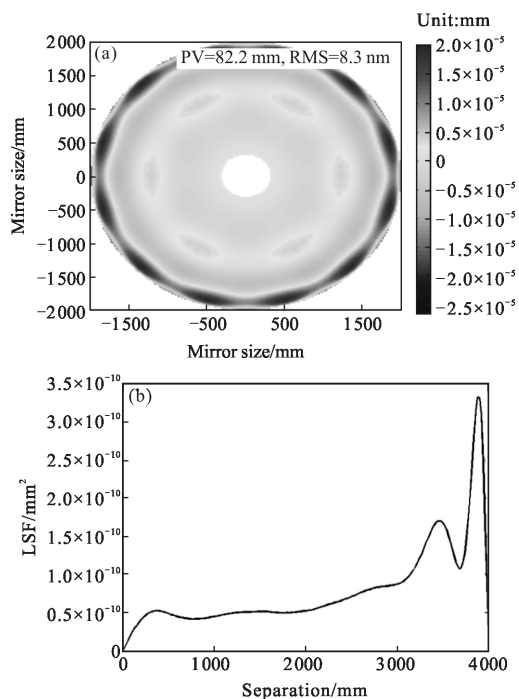


图 5 校正后的反射镜面形云图和结构函数

Fig.5 Structure function and cloud chart of mirror deformation after correction

## 5 结 论

文中针对液压 Whiffletree 支撑下的 4m 轻量化反射镜主动光学模式定标计算的问题，提出一种广义最小二乘法来求解满足支撑系统解耦条件的最佳校正力组。在影响矩阵求解过程中引入了节点面积加权因子修正后的 Zernike 多项式提高了镜面变形的拟合精度，并且将拟合过程作为前处理简化了求解过程。将提出的方法应用于重力印透下的主镜面形的主动光学校正，结果表明阻尼因子取  $7.4e-9$  时，达到了满足约束条件的最佳校正效果，镜面面形均方根值由 271.5 nm 校正到 8.3 nm，由于支撑点空间起伏产生的中低频镜面变形得到了有效的得到校正。

## 参考文献：

[1] Ray F B. Active optics technology-an overview, analysis of optical structures[C]//SPIE, 1991, 1532: 188-206.  
 [2] Cheng Jingquan. Principle and Design of Astronomical Telescope [M]. Beijing: China Science & Technology Press, 2003. (in Chinese)  
 程景全. 天文望远镜原理和设计[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2003

- [3] Nicolas Roddier, Dan Blanco, Larry Goble, et al. The WIYN telescope active optics system [C]//Proceedings of SPIE, 1995, 2479: 364–376.
- [4] James E K, David Gr. AEOS 3.67 m telescope primary mirror active control system[C]//Proceedings of SPIE, 1998, 3352: 400–411.
- [5] Stefano S, Legrand P, Baty A, et al. Design and construction of the VLT primary mirror cell [C]//Proceedings of SPIE, 1997, 2871: 314–325.
- [6] Neothe L. Use of minimum-energy modes for modal-active optics corrections of thin meniscus mirrors [J]. *Journal of Modern Optics*, 1991, 38(6): 1043–1066.
- [7] Cui Xiangqun. Support system of large aperture thin monolithic primary mirror with active optics [D]. Nanjing: Nanjing Institute of Astronomical Optics and Technology of Chinese Academy of Sciences, 1995. (in Chinese)  
崔向群. 采用主动光学的大口径单块薄镜面的支撑系统 [D]. 南京: 中国科学院南京天文仪器研制中心, 1995.
- [8] Chen Fulin, Zhang Jingxu, Wu Xiaoxia, et al. Deformation of thin primary mirror fitted with its vibration mode [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2011, 40(11): 2238–2243. (in Chinese)  
陈夫林, 张景旭, 吴小霞, 等. 模态振型拟合薄镜面变形分析[J]. 红外与激光工程, 2011, 40(11): 2238–2243.
- [9] Su Dingqiang, Cui Xiangqun. Active optics-key technology of the new generation telescope [J]. *Progress in Astronomy*, 1999, 17: 1–13. (in Chinese)  
苏定强, 崔向群. 主动光学—新一代大望远镜的关键技术 [J]. 天文学进展, 1999, 17: 1–13.
- [10] Li Hongzhuang, Zhang Zhenduo, Wang Jianli, et al. Active surface-profile correction of 620 mm thin-mirror based on flotation support [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33 (5): 0511001. (in Chinese)  
李宏壮, 张振铎, 王建立, 等. 基于浮动支撑的 620 mm 薄反射镜面形主动校正[J]. 光学学报, 2013, 33(5): 0511001.
- [11] Wang Hongqiao, Fan Bin, Wu Yangqian, et al. Analysis and calculation for compensation force in axial support system in  $\Phi 1.2$  m primary mirror optical fabrication [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2014, 43(6): 1889–1893. (in Chinese)  
王洪桥, 范斌, 吴永前, 等.  $\Phi 1.2$  m 主镜光学加工中轴向支撑系统的补偿力分析计算[J]. 红外与激光工程, 2014, 43(6): 1889–1893.
- [12] Yu Yang, Cao Genrui. A study on the corrective capability and optimization of active mirrors [J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2003, 23(2): 229–233. (in Chinese)  
于洋, 曹根瑞. 主动光学反射镜面形的校正能力及其优化设计[J]. 北京理工大学学报, 2003, 23(2): 229–233.
- [13] Zeng Chunmei, Guo Peiji, Yu Jingchi, Demonstration and analysis on correction of 0.5 m ultra-thin mirror with active supports[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2010, 18(3): 570–578. (in Chinese)  
曾春梅, 郭培基, 余景池. 0.5 m 超薄镜主动支撑面形校正及实验[J]. 光学精密工程, 2010, 18(3): 570–578.
- [14] Wu Xiaoxia, Li Jianfeng, Song Shumei, et al. Active support system for 4 m SiC lightweight primary mirror [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2014, 12(9): 2451–2457. (in Chinese)  
吴小霞, 李剑锋, 宋淑梅, 等. 4 m SiC 轻量化主镜的主动支撑系统[J]. 光学精密工程, 2014, 12(9): 2451–2457.
- [15] Fan Lei, Zhang Jingxu, Shao Liang, et al. Axial support for large aperture primary mirror based on hydraulic Whiffle-tree [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(8): 2126–2131. (in Chinese)  
范磊, 张景旭, 邵亮, 等. 采用液压 Whiffletree 的大口径主镜轴向支撑[J]. 红外与激光工程, 2013, 42(8): 2126–2131.
- [16] Shao Liang, Wu Xiaoxia, Yang Fei, et al. Improvement on hydraulic Whiffletree support system for SiC lightweight primary mirror [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2014, 43(11): 3820–3824. (in Chinese)  
邵亮, 吴小霞, 杨飞, 等. SiC 轻量化主镜液压 Whiffletree 支撑系统的改进 [J]. 红外与激光工程, 2014, 43(11): 3820–3824.
- [17] Yang Fei, Liu Guojun, An Qichang. Error allocation of opto-mechanical system for large aperture telescope based on structure function [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2015, 23(1): 117–121. (in Chinese)  
杨飞, 刘国军, 安其昌. 基于结构函数的大口径望远镜光机系统误差分配[J]. 光学精密工程, 2015, 23(1): 117–121.