

吊舱激光指示精度计算方法

胡林亭^{1,2}, 李佩军², 秦少刚²

(1. 长春理工大学光电工程学院, 吉林 长春 130022; 2. 中国白城兵器试验中心, 吉林 白城 137001)

摘要: 针对吊舱激光指示精度外场测试与数据计算的问题, 提出了一种基于瞄准轴坐标系的激光指示偏差角正弦算法。在激光指示偏差角正弦算法基础上, 构建了激光指示精度测试误差模型, 估算了各误差源对总误差的影响因子。计算结果表明, 当指示偏差角很小时, 正弦算法的误差低于余弦算法误差约三个数量级; 激光光斑位置测量误差是最大误差源, 提高激光光斑位置测量精度是减小激光指示精度测试误差的最佳途径。此外, 在同样测量条件下, 正弦算法显著减小了吊舱激光指示精度的计算误差约 2~3 个数量级(具体量化数值), 也为激光光斑测量系统的指标论证提供了依据。

关键词: 吊舱; 激光指示精度; 偏差角; 计算模型; 误差

中图分类号: TN247 文献标志码: A DOI: 10.3788/IRLA201645.0617012

Calculation method of the pod laser indication precision

Hu Linting^{1,2}, Li Peijun², Qin Shaogang²

(1. School of Opto-Electronic Engineering, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China;

2. Baicheng Ordnance Test Center of China, Baicheng 137001, China)

Abstract: Regarding outfield test and calculation of the pod laser indication precision, a sine algorithm computing the deviation angle of the laser indication based on the sighting axis coordinate system was advanced in this paper. The least-square fitting of orthogonal polynomial was adopted for this algorithm to capture the pod track as well as estimating the measurement precision of the pod coordinate. Further, an error model of the laser indication precision was established and an impact factor of the error source was also calculated according to the analysis of the test error source. It indicates that the error of the sine algorithm is three digit classes lower than the cosine algorithm under a small deviation angle, and it is the best way to reduce the testing error of the laser indication precision by improving the position measurement precision of the laser spot. In addition, this algorithm reduces obviously the calculating error of the pod laser by around 2–3 digit classes, and provides an evidence for the performance demonstration of the measuring system of the laser spot.

Key words: pod; laser indication precision; deviation angular; calculation model; error

收稿日期: 2015-10-13; 修订日期: 2015-11-03

作者简介: 胡林亭(1964-), 男, 高级工程师, 主要从事光学测量方面的研究。Email: qitiandasheng0002@sina.com

0 引言

机载吊舱有多种^[1],文中吊舱是跟踪地面目标并对目标连续照射激光的机载外挂光电系统的简称。激光指示精度既体现了吊舱的总体性能^[2],也影响激光制导弹的命中精度^[3],是一项关键指标,需要精确测试。在外场通常用摄像法测量照射在靶标上的激光光斑位置^[4],计算激光照射精度。为减小靶标对反射激光光斑量值分布的影响^[5],测量时使用倾斜架设的均匀、漫反射平面靶。测试时激光照射距离一般大于 10 km,靶板上激光光斑晃动量为几米,光斑晃动量与激光照射距离相比小约 3 个数量级,且激光轴与靶板面不垂直,需要建立高精度的计算模型,准确计算激光指示精度,利于科学评定吊舱的激光指示性能^[6]。

1 激光指示精度的测试与吊舱坐标计算

1.1 激光指示精度的测试

激光指示偏差角是吊舱和激光光斑中心连线与吊舱和靶标中心(或预定瞄准点)连线的夹角,吊舱在一次激光照射中,激光指示偏差角的均方差就是激光指示精度。

载机运动和气流影响,使靶标上的激光光斑位置在变化,激光照射时刻与吊舱位置坐标的测试时刻不同步,因此需对吊舱航迹进行拟合,计算出激光照射时刻的吊舱位置坐标,便于准确计算激光指示偏差角。

1.2 吊舱航迹坐标的计算

经纬仪在地理直角坐标系 $OXYZ$ (东-北-天坐标系)中交绘测量吊舱航迹,吊舱航迹坐标 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 是不相关的,可分别拟合。下面以 $x(t)$ 为例说明用最小二乘法拟合吊舱航迹的方法及误差,便于建立激光指示偏差角的计算误差模型。

经纬仪是等时间间隔测量吊舱航迹,对于一段航迹可作为等精度测量。为减少回归方程的计算量,选取如下正交多项式^[7]:

$$\begin{cases} \psi_1(t) = \frac{t - \bar{t}}{h} \\ \psi_2(t) = \left(\frac{t - \bar{t}}{h} \right)^2 - \frac{N^2 - 1}{12} \\ \dots \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_i$; $h = t_i - t_{i-1}$; $i = 1, 2, \dots, N$ 。 N 为测量数据组数。

$x(t)$ 的多项式回归方程为:

$$\hat{x} = \rho_0 + \rho_1 \psi_1(t) + \rho_2 \psi_2(t) + \dots + \rho_M \psi_M(t) \quad (2)$$

式中: $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_M$ 为回归系数^[7], $M \leq N - 1$ 。

$$\begin{cases} \rho_0 = \frac{1}{N} \sum_i x_i \\ \rho_j = \frac{\sum_i \psi_j(t_i) x_i}{\sum_i \psi_j^2(t_i)} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, M \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

可用剩余平方和对回归平方和的 F 检验法检验回归方程显著性^[8],如果回归方程不显著,可增加回归方程的次数 M 。

因 $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_M$ 不相关,且为等精度测量,由误差传递公式^[9], $x(t)$ 拟合精度为:

$$\sigma_x^2 = \left[\frac{1}{N} + \sum_j \frac{\psi_j^2(t)}{\sum_i \psi_j^2(t_i)} \right] \sigma_x^2 \quad (4)$$

式中: σ_x 为 $x(t)$ 的测量精度。

2 激光指示精度计算

2.1 坐标系定义

以靶面中心 O' 为原点,靶面为 $X'O'Y'$ 面建立靶板直角坐标系 $O'X'Y'Z'$, $O'X'$ 轴平行于靶面底边, $O'Y'$ 轴沿靶面指向斜上, $O'X'$ 轴、 $O'Y'$ 轴与 $O'Z'$ 轴构成右手直角坐标系。以吊舱 G 点与 O' 点连线(瞄准轴)为 Z'' 轴、瞄准轴法面为 $X''O'Y''$ 面建立瞄准轴坐标系 $O'X''Y''Z''$, $O'X''Y''Z''$ 为动坐标系。 X'' 轴平行于 $OXYZ$ 坐标系的 XOY 面, Y'' 轴指向斜上方, $O'X''$ 轴、 $O'Y''$ 轴与 $O'Z''$ 轴构成右手直角坐标系。靶板坐标系和瞄准轴坐标系示意图见图 1。

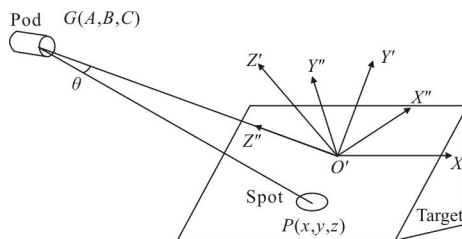


图 1 坐标系和激光照射示意图

Fig.1 Coordinate system and abridged general view of laser irradiation

设 $X'O'Y'$ 面与 XOY 面交线为 DE , 两面夹角为 α , OX 轴与线 DE 夹角为 β , $O'X'$ 轴与线 DE 夹角为 γ . 设 $X''O'Y''$ 面与 XOY 面交线为 EF , 两面夹角为 ϖ , OX 轴与 EF 线夹角为 η .

2.2 激光指示角偏差的计算

2.2.1 激光光斑位置计算

测量系统在坐标系 $O'X'Y'Z'$ 中测得激光光斑坐标为 $p(x'(t), y'(t), z'(t))$. 设在 $O'X''Y''Z''$ 坐标系中光斑坐标为 $p(x''(t), y''(t), z''(t))$, 在 $OXYZ$ 坐标系中光斑坐标为 $p(x(t), y(t), z(t))$, 吊舱坐标为 $G(A(t), B(t), C(t))$, O' 点坐标为 (x_0, y_0, z_0) . 由坐标系变换公式可得:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varpi & \sin\varpi \\ 0 & -\sin\varpi & \cos\varpi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\eta & \sin\eta & 0 \\ -\sin\eta & \cos\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中:
$$\begin{cases} \cos\varpi = \frac{C(t)-z_0}{\sqrt{(A(t)-x_0)^2+(B(t)-y_0)^2+(C(t)-z_0)^2}} \\ \tan\eta = \frac{A(t)-x_0}{B(t)-y_0} \end{cases}$$

2.2.2 激光指示偏差角计算方法

用吊舱瞄准轴 GO' 与吊舱和光斑中心连线 GP 建立计算平面。直线 PQ 垂直于 GO' 并与 GO' 延长线交 Q 点, 详见图 2。由正弦公式可得激光指示偏差角 $\theta(t)$ 为:

$$\lambda_3 = \frac{-\sin^2\varpi \cos 2\eta x'^2 + (2\sin^2\varpi \cos 2\eta \cos\alpha - \sin 2\varpi \cos \eta \sin\alpha) x' y' + (\sin^2\varpi \sin 2\eta \cos^2\alpha - 0.5 \sin 2\varpi \sin \eta \sin 2\alpha) y'^2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\lambda_1 = \frac{-\sin 2\varpi \sin^2\eta x'^2 + (\sin 2\varpi \sin 2\eta \cos\alpha - 2\cos 2\varpi \sin \eta \sin\alpha) x' y' + (\cos 2\varpi \cos \eta \sin 2\alpha + \sin 2\varpi \sin^2\alpha - \sin 2\varpi \cos^2\eta \cos^2\alpha) y'^2}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\sin\theta(t) = \frac{PQ}{GP} = \frac{\sqrt{x''^2(t)+y''^2(t)}}{\sqrt{(A(t)-x(t))^2+(B(t)-y(t))^2+(C(t)-z(t))^2}} \quad (7)$$

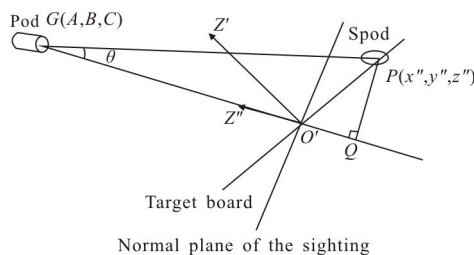


图 2 激光指示角计算示意图

Fig.2 Abridged general view of deviation angular calculation with laser indication

2.2.3 指示偏差角计算误差

为分析方便, 设坐标系 $O'X''Y''Z''$ 原点 O' 与 $OXYZ$ 坐标系原点 O 重合。激光光斑在 $O'X'Y'Z'$ 坐标系中坐标为 $P(x'(t), y'(t), z'(t))$, 在 $O'X''Y''Z''$ 坐标系中坐标为 $P(x''(t), y''(t), z''(t))$. 在 $OXYZ$ 坐标系中吊舱坐标为 $G(A, B, C)$, 激光光斑坐标为 $P(x, y, z)$. 考虑激光光斑在靶面内的约束条件 $z'=0$, 由公式(6)得:

$$\begin{cases} x'' = \cos\eta x' + \sin\eta \cos\alpha y' \\ y'' = -\cos\varpi \sin\eta x' + (\cos\varpi \cos\eta \cos\alpha + \sin\varpi \sin\eta \sin\alpha) y' \\ z'' = \sin\varpi \sin\eta x' + (\cos\varpi \sin\alpha - \sin\varpi \cos\eta \cos\alpha) y' \end{cases} \quad (8)$$

由公式(7)、(8)得激光指示偏差角 θ 为:

$$\sin^2\theta = \frac{(\cos\eta x' + \sin\eta \cos\alpha y')^2}{(A-x)^2+(B-y)^2+(C-z)^2} + \frac{(-\cos\varpi \sin\eta x' + (\cos\varpi \cos\eta \cos\alpha + \sin\varpi \sin\eta \sin\alpha) y')^2}{(A-x)^2+(B-y)^2+(C-z)^2} \quad (9)$$

因靶板倾角 α 可精确测量, 影响可忽略。考虑 $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = \sigma_x, \sigma_{x'} = \sigma_{y'}$, 由误差传递公式和公式(9)得偏差角 θ 的误差 σ_θ 为:

$$\sigma_\theta = \frac{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sigma_{x'}^2 + (\lambda_3^2 + \lambda_4^2) \sigma_{y'}^2}}{((A-x)^2+(B-y)^2+(C-z)^2) \sin 2\theta} \quad (10)$$

式中: $\lambda_1 = 2(1 - \sin^2\varpi \sin^2\eta) x' + (\sin^2\varpi \sin 2\eta \cos\alpha - \sin 2\varpi \sin \eta \sin\alpha) y'$, $\lambda_2 = (\sin^2\varpi \cos 2\eta \cos\alpha - \sin 2\varpi \sin \eta \sin\alpha) x' + (2\cos^2\alpha(1 - \sin^2\varpi \cos^2\eta) + 2\sin^2\varpi \sin^2\alpha + \sin 2\varpi \cos \eta \sin\alpha) y'$,

2.3 激光指示精度的计算

一个航次的激光指示精度 R_k 为:

$$R_k = \sqrt{\frac{\sum \theta_i^2}{v}} \quad (11)$$

式中: v 为航次的激光光斑数。

由公式(11), 一个航次的激光指示精度的测试精度 σ_R 为:

$$\sigma_R = \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{v}} \quad (12)$$

3 激光指示精度测试误差估算

3.1 误差源分析

因靶板坐标系的参数可精确测量, 靶板坐标系误差可忽略。由上述激光指示精度测试方法可知, 主要测试误差为吊舱位置坐标的测试误差、激光光斑位置测试误差和激光指示精度计算误差。吊舱位置测试误差包括坐标测试误差和拟合误差。激光光斑位置测试误差是由测试设备决定的, 是已知值。激光指示精度计算误差包括激光指示偏差角计算误差和指示精度计算误差。

3.2 吊舱位置测试误差

以二次回归方程为例, 设吊舱航迹拟合数据为 10 组, 由公式(4)得 $x(t)$ 的测试精度为:

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{1}{10} + \left(\frac{t-t}{h} \right)^2 \times \frac{1}{\sum \psi_1^2(t_i)} + \left(\left(\frac{t-t}{h} \right)^2 - \frac{33}{4} \right) \times \frac{1}{\sum \psi_2^2(t_i)} \right) \sigma_x^2 \quad (13)$$

吊舱坐标测量精度 1 m, 对于中间两组数据, 查正交多项式计算表, 由公式(13)得:

$$\sigma_x = 0.365 \text{ m}$$

同理, $\sigma_y = \sigma_z = 0.365 \text{ m}$ 。

3.3 激光指示角偏差测试误差估算

设靶面朝南, 倾角 60° , 吊舱由南向北照射激光, 可估计 $x' = s \sin \theta$, $y' = 1.5x'$ 。激光光斑位置坐标测量精度 $\sigma_x = 0.1 \text{ m}$, 由公式(10)可以计算出常用飞行航路的激光指示偏差角 θ 的测试精度, 结果见表 1(高度 h 、航路捷径 1 单位为 km, 测试精度 σ_θ 单位为 μrad)。

表 1 正弦公式法指示偏差角的测试精度 σ_θ

Tab.1 Test precision of deviation angle σ_θ calculated by sine algorithm

Indication distance s /km	15	13	11	9	8	7	6
$\sigma_\theta(h=6, l=1)$	5.04	6.38	8.41	11.5	13.5		
$\sigma_\theta(h=6, l=0.1)$	5.24	6.64	8.72	11.9	14.0		
$\sigma_\theta(h=3, l=1)$	3.18	3.94	5.12	7.09	8.62	10.8	14.0
$\sigma_\theta(h=3, l=0.1)$	3.47	4.31	5.60	7.74	9.38	11.7	15.1

3.4 激光指示精度计算误差

采用正弦公式法计算激光指示偏差角, 激光光斑 100 个, 指示偏差角测试误差估计为:

$$\sigma_\theta = 0.05(\text{mrad})$$

每个航次的激光指示精度的测试精度为:

$$\sigma_R = 0.005(\text{mrad})$$

由估算结果知, 激光指示精度的测试精度满足要求。

4 有关问题的分析

4.1 减小激光指示精度测试误差的有效途径

由公式(10)可知, 各分误差量值差别很大, 吊舱位置测试误差 $\sigma_{\text{吊舱}}$ 和光斑位置测试误差 $\sigma_{\text{光斑}}$ 量值为:

$$\sigma_{\text{吊舱}} = \left(\frac{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}{((A-x)^2 + (B-y)^2 + (C-z)^2) \sin 2\theta} \right) \sigma_x$$

$$\sigma_{\text{光斑}} = \left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{((A-x)^2 + (B-y)^2 + (C-z)^2) \sin 2\theta} \right) \sigma_x$$

按照 3.2 和 3.3 节的计算参数可得:

$$\sigma_{\text{吊舱}} = 0.303 \times 10^{-8} \text{ m}, \sigma_{\text{光斑}} = 0.172 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$\sigma_{\text{光斑}}$ 与 $\sigma_{\text{吊舱}}$ 相差约 4 个数量级, $\sigma_{\text{光斑}}$ 为主要误差源。

由公式(12), 激光指示精度计算误差 σ_R 反比于 \sqrt{v} , 一个激光照射过程光斑数 v 是一定的, 因此只能增加航次数取均值来提高精度, 但航次数增加到一定量时, 作用就不显著了, 且消耗巨大。

由上面的分析可知, 激光光斑位置的测试误差是主要误差源, 因此提高激光光斑位置的测试精度是提高激光指示精度测试精度的有效途径。

4.2 向量夹角公式计算激光指示偏差角方法

由图 2 知, 激光指示偏差角 θ 为矢量 \overrightarrow{GP} 与矢量

\overrightarrow{GO} 的夹角,在 OXYZ 坐标系中用矢量夹角公式可得:

$$\cos\theta = \frac{A(A-x') + B(B-y'\cos\alpha) + C(C-z'\sin\alpha)}{A^2 + B^2 + C^2} \quad (14)$$

$$\sigma_\theta^2 = \left(\frac{4s^2(\cos\theta-1)^2 + 4(\cos\theta-1)(Ax' + (B\cos\alpha + C\sin\alpha)y') + x'^2 + y'^2}{s^4\sin^2\theta} \right) \sigma_A^2 + \left(\frac{A^2 + (B\cos\alpha + C\sin\alpha)^2}{s^4\sin^2\theta} \right) \sigma_{x'}^2 \quad (15)$$

按照 3.2 和 3.3 节的估算参数,由公式(15)可计算常用航路的激光指示偏差角测试精度,计算结果见表 2(高度 h 、航路捷径 l 单位为 km,测试精度 σ_θ 单位为 mrad)。

表 2 向量夹角公式法指示偏差角的测试精度计算结果

Tab.2 Test precision of deviation angular calculated by equation of vector angle

Indication distance s /km	15	13	11	9	8	7	6
$\sigma_\theta(h=6, l=1)$	2.412	1.891	2.716	7.360	12.180		
$\sigma_\theta(h=6, l=0.1)$	2.092	0.961	1.379	6.379	11.169		
$\sigma_\theta(h=3, l=1)$	6.021	6.361	6.598	6.576	6.428	6.453	7.788
$\sigma_\theta(h=3, l=0.1)$	5.913	6.177	6.237	5.695	4.876	3.274	0.790

由表 1、表 2 的计算结果可知,当吊舱激光指示精度很高时,正弦公式算法的精度约高于向量夹角公式算法约 3 个数量级。

5 结 论

分析了激光指示偏差角的测试过程,通过建立瞄准轴坐标系,使用正弦公式法提高了激光指示偏差角的计算精度,满足了外场吊舱激光指示精度试验的测试需求,为科学评定激光吊舱的性能提供了依据。仿真计算结果表明,激光指示偏差角的正弦公式算法,可显著减小计算误差。

通过分析测试误差源,建立了测试误差估算模型,确定光斑位置的测试误差是最大误差源,为提高测量精度提供了有效途径,也为激光光斑测试设备指标的论证提供了依据。该方法成功应用在某型激光吊舱测试中,说明了方法是可行的。

参考文献:

[1] Ma Rui. Development analysis of the laser guided weapon [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2008, 37(S3): 266-270. (in Chinese)

因 $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = \sigma_x, \sigma_{x'} = \sigma_{y'}, s^2 = A^2 + B^2 + C^2$, 使用误差传递公式,由公式(14)得:

马锐. 激光制导武器的发展分析 [J]. 红外与激光工程, 2008, 37(S3): 266-270.

[2] Li Gang, Wang Yuefeng, Dong Wei, et al. Digital method to checkout complete appliance of laser radiation indicating meter [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2004, 33 (5): 462-464. (in Chinese)

李刚, 汪岳峰, 董伟, 等. 激光照射指示器整机性能检测方法研究[J]. 红外与激光工程, 2004, 33(5): 462-464.

[3] Wang Kuangbiao. Status quo, key technology and development of laser quided weapon [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2007, 36(5): 651-653. (in Chinese)

王狂飙. 激光制导武器的现状、关键技术与发展[J]. 红外与激光工程, 2007, 36(5): 651-653.

[4] Hu Linting, Lu Xiankui, Jin Junkun, et al. Laser facula measurement with CCD[J]. *Laser Technology*, 2001, 25(2): 154-155. (in Chinese)

胡林亭, 卢显葵, 金俊坤, 等. CCD 测量激光光斑方法研究 [J]. 激光技术, 2001, 25(2): 154-155.

[5] Kong Bing, Wang Zhao, Tan Yushan. Algorithm of laser spot detection based on circle fitting [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2002, 31(3): 275-276. (in Chinese)

孔兵, 王昭, 谭玉山. 基于圆拟合的激光光斑中心检测算法[J]. 红外与激光工程, 2002, 31(3): 275-276.

[6] Li Fudong. Status and development of airborneIRST systems [J]. *Laser & Infrared*, 2008, 38(5): 409-412. (in Chinese)

李富栋. 机载红外搜索与跟踪系统的现状与发展 [J]. 激光与红外, 2008, 38(5): 409-412.

[7] Lin Hongye. Dynamic Test Data Processing [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1995: 403. (in Chinese)

林洪桦. 动态测试数据处理[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1995: 403.

[8] Mao Shisong, Zhou Jixiang. Probability Theory and Mathematical Statistics [M]. Beijing: China Statistics Press, 1996: 485-487. (in Chinese)

茆诗松, 周纪芴. 概率论与数理统计[M]. 北京: 中国统计出版社, 1996: 485-487.

[9] Fei Yetai. Error Theory and Data Processing [M]. Beijing: China Machine Press, 1981: 39. (in Chinese)

费业泰. 误差理论与数据处理 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1981: 39.