

一种用于光纤陀螺降噪的鲁棒平滑滤波算法

肖文健, 马东玺, 陈志斌, 刘先红, 肖程

(军械工程学院 军械技术研究所, 河北 石家庄 050000)

摘要: 为了降低光纤陀螺(FOG)的随机噪声以及消除异常采样信号的干扰, 提出一种鲁棒平滑滤波算法。利用权重函数为 FOG 每个采样数据迭代加权, 给异常值分配较低权重给高质量数据分配较高权重, 有效提高了平滑滤波的鲁棒性。采用广义交叉验证估计平滑参数再利用离散余弦变换计算原始 FOG 数据的平滑值, 提高了平滑滤波的运算速度。软件仿真和实际实验结果表明, 相比传统最小二乘平滑滤波算法, 所提算法能够有效抑制 FOG 随机噪声和异常采样信号的干扰, 并且对时变的 FOG 信号具有较好的跟踪能力。

关键词: 光纤陀螺; 鲁棒平滑滤波; 离散余弦变换; 迭代加权

中图分类号: TP253 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201645.0617005

A robust smoothing filter algorithm for de-noising of fiber optic gyroscope

Xiao Wenjian, Ma Dongxi, Chen Zhibin, Liu Xianhong, Xiao Cheng

(Ordnance Technology Institute, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050000, China)

Abstract: In order to reduce the random noise of fiber optic gyroscope (FOG) and eliminate the disturbance from singular sampled signal, a robust smoothing filtering algorithm was proposed. Each sampled data of FOG were iteratively weighted by weighting function with giving outliers a low weight and allocating a relatively high weight to high quality data. Then the robustness of smoothing filter can be improved evidently. The operation speed of smoothing filtering algorithm is increased effectively by generalized cross validation (GCV) and discrete cosine transform (DCT). Simulation and practicable test results show that the proposed algorithm can restrain the interference by singular sampled signal or random noise of FOG and has better signal tracking capability.

Key words: fiber optic gyroscopes; robust smoothing filter; discrete cosine transform; iteratively weighted

收稿日期: 2015-10-05; 修订日期: 2015-11-03

基金项目: 国家自然科学基金(51305455)

作者简介: 肖文健(1989-), 男, 博士生, 主要从事光电检测和信号处理等方面的研究。Email: xiao_wen_jian@163.com

导师简介: 陈志斌(1965-), 男, 研究员, 主要从事光电探测、处理与加密传输技术等方面的研究。Email: shangxinboy@163.com

0 引言

当前在航空航天等各个领域陀螺仪有着十分广泛和重要的应用,尤其是光纤陀螺(FOG),其凭借体积小、测量范围大、成本造价低等优势更是成为各种陀螺仪中的首选。然而受其内部结构、外界环境以及信号采样条件等因素的影响,在实际使用过程中 FOG 的输出信号中往往伴有大量随机噪声和异常采样值。从硬件方面解决这些问题的同时,采用软件滤波的方法处理灵活、成本较低,是提高 FOG 信号质量的重要途径^[1]。

针对如何提高 FOG 信号质量国内外学者提出许多方法,主要分为以下三种。一是根据 FOG 随机噪声序列建立 ARMA 模型,再利用卡尔曼滤波对该模型进行滤波^[2]。这类滤波方法在随机噪声模型建立准确的情况下,具有较好的滤波效果,然而在实际应用中很难得到准确的随机噪声模型,所以滤波效果也会受到很大的影响。二是阈值滤波,该方法将 FOG 含噪信号分解,根据噪声统计特征选定阈值,剔除阈值范围以外的数据,其中信号分解方法主要有傅里叶分解、小波分解或经验模态分解等^[3-4]。这类滤波方法通常需要已知 FOG 随机噪声的统计特征来确定阈值,而且要求 FOG 含噪信号在经过分解后信号与噪声能够尽可能分离,否则滤波效果很难提高。三是平滑滤波,例如滑动平均、最小二乘回归或 Savitzky-Golay 回归等^[5-6],它是一种自适应的迭代算法,这种方法不依赖于输入数据的模型和先验统计特征,而且运算量相对较小,适合在线进行。然而传统平滑滤波的鲁棒性较差,当输入信号中出现野值或数据丢失等异常值时,其滤波效果则会受到很大影响。

针对传统平滑滤波的问题,考虑到一般情况下 FOG 采样信号具有等间距且平滑渐变的特点,文中提出一种基于广义交叉验证(GCV)和离散余弦变换(DCT)的迭代加权鲁棒平滑滤波算法,提高 FOG 信号质量。

1 DCT 平滑滤波算法

1.1 传统带惩罚项的最小二乘平滑

对于一个含噪声的信号 y 其满足:

$$y = \hat{y} + \varepsilon \quad (1)$$

式中: y 为原始含噪信号; \hat{y} 为滤波后的信号; ε 为噪声。值得注意的是该噪声不一定是高斯白噪声,根据已有的研究成果来看,FOG 的随机噪声属于分形噪声。平滑滤波就是通过迭代寻找最优的估计值。平滑滤波中使用最多的就是带惩罚项的最小二乘回归,该方法在残差平方和(Residual Sum of Squares, RSS)的基础上引入惩罚项,如公式(2)所示^[7]。

$$F(\hat{y}) = \text{RSS} + sP(\hat{y}) = \| \hat{y} - y \|^2 + sP(\hat{y}) \quad (2)$$

式中: $\| \cdot \|$ 表示欧几里得范数; s 为控制平滑程度的参数。最小二乘回归的主要思想就是寻求函数 $F(\hat{y})$ 的最小化。对于一维数据序列, $P(\hat{y})$ 可以用一个二阶的均差来表示^[8],如公式(3)所示:

$$P(\hat{y}) = \| D\hat{y} \|^2 \quad (3)$$

式中: D 为三对角矩阵,其定义为:

$$D_{i,i-1} = \frac{2}{h_{i-1}(h_{i-1}+h_i)}, D_{i,i} = \frac{-2}{h_{i-1}h_i}, D_{i,i+1} = \frac{2}{h_i(h_{i-1}+h_i)} \quad (4)$$

式中: $2 \leq i \leq n-1$, n 为信号 y 中数据个数; h_i 为 \hat{y}_i 到 \hat{y}_{i+1} 的步长。假定重复边界数据 $y_0 = y_1, y_{n+1} = y_n$, 那么有:

$$-D_{1,1} = D_{1,2} = \frac{1}{h_1}, D_{n,n-1} = -D_{n,n} = \frac{1}{h_{n-1}} \quad (5)$$

根据公式(2)和公式(3), $F(\hat{y})$ 最小化后得到如下线性系统,该系统使平滑后的数据满足:

$$(I_n + sD^T D)\hat{y} = y \quad (6)$$

式中: I_n 为 n 阶单位矩阵; D^T 为 D 的转置矩阵。公式(6)即为数据平滑公式。

1.2 平滑参数估计

从公式(6)可以看出,平滑滤波的输出 \hat{y} 主要受到平滑参数 s 的影响。为了得到最优的平滑值,尽可能的避免过多或过少平滑,文中采用 GCV 法来估计平滑参数 s 的最优值。假设该平滑系统为:

$$\hat{y} = H(s)y \quad (7)$$

式中: H 为帽子矩阵。通过选择参数 s 的值,使得 GCV 值最小,如公式(8)所示^[9]:

$$s = \text{argmin}(\text{GCV}) = \text{argmin} \left(\frac{\text{RSS}/n}{1 - \text{Tr}(H)/n^2} \right) \quad (8)$$

式中: $\text{Tr}(H)$ 表示矩阵 H 的迹。

根据公式(6)与公式(7)可知:

$$H=(I_n+sD^T D)^{-1} \quad (9)$$

参考文献[9]提出一种计算 GCV 的算法,它需要在 GCV 最小化迭代过程的每一步都要对矩阵 H 进行判断,计算非常耗时。为了减小运算时间, $\text{Tr}(H)$ 可以简化为:

$$\text{Tr}(H)=\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+s\lambda_i^2} \quad (10)$$

式中: λ_i^2 为矩阵 $D^T D$ 的特征值。那么 GCV 值即可简化为:

$$\text{GCV}(s)=n \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 / (n - \sum_{i=1}^n (1+s\lambda_i^2)^{-1})^2 \quad (11)$$

1.3 等距数据 DCT 平滑滤波

在平滑滤波过程中,如果直接按照公式(6)来求解会占用大量时间。在实际中对 FOG 信号通常都是等间隔采样,那么采集的数据测量均为等距分布,所以 h_i 为固定值。这里假定 $h_i=1$,均差矩阵 D 可以简化为:

$$D=\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

矩阵 D 的本征分解为:

$$D=U\Lambda U^{-1} \quad (13)$$

式中: Λ 为矩阵 D 特征值构成的对角矩阵,其定义为:

$$\Lambda=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i=-2+2\cos((i-1)\pi/n) \quad (14)$$

因为 U 为酉矩阵($U^{-1}=U^T, UU^T=I_n$),所以公式(6)可以变为:

$$\hat{y}=U(I_n+s\Lambda^2)^{-1}U^T y=U\Gamma U^T y \quad (15)$$

根据公式(14),矩阵 Γ 中的元素满足:

$$\begin{cases} \Gamma_{i,i}=[1+s(2-2\cos((i-1)\pi/n))]^{-1} \\ \Gamma_{i,j}=0 \quad i \neq j \end{cases} \quad (16)$$

在公式(15)中 U^T 和 U 分别是 n 阶的 2 型离散余弦变换和反离散余弦变换,这样平滑滤波的输出 \hat{y} 即可表示为^[10]:

$$\hat{y}=\text{IDCT}(\text{IDCT}(y)) \quad (17)$$

式中: DCT 和 IDCT 分别表示离散余弦变换和反离散余弦变换。公式(17)即为 DCT 平滑滤波的主体迭代公式。

对于等间距的数据,根据公式(10)和公式(14)帽子矩阵 H 的际可以简化为:

$$\text{Tr}(H)=\sum_{i=1}^n [1+s(2-2\cos((i-1)\pi/n))]^{-1} \quad (18)$$

当 n 很大时,则有:

$$\frac{\text{Tr}(H)}{n} \approx \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [1+s(2-2\cos x)]^{-1} dx = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+16s}}}{\sqrt{2} \sqrt{1+16s}} \quad (19)$$

此外,利用公式(15)可以导出 RSS 为:

$$\text{RSS}=\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+s\lambda_i^2} - 1 \right)^2 \text{DCT}_i^2(y) \quad (20)$$

式中: DCT_i 表示第 i 个数据的离散余弦变换。公式(11)中的 GCV 值随之变为:

$$\text{GCV}(s)=\frac{n \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+s\lambda_i^2} - 1 \right)^2 \text{DCT}_i^2(y)}{\left(n - \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+s\lambda_i^2} \right)^2} \quad (21)$$

DCT 的计算复杂度为 $O(n \log n)$,而公式(6)的求解需要进行 Cholesky 因数分解,其计算复杂度为 $O(n^3)$,并且利用公式(21)可以直接计算 GCV 值不需要任何矩阵运算,因此基于 GCV 和 DCT 平滑滤波算法的运算速度比传统算法更快。

2 鲁棒 DCT 平滑滤波算法

实际在对 FOG 信号采样过程中,由于受到各种不利因素的干扰,会出现一些严重偏离大部分数据所呈现变化趋势的点(称为野值点),或者出现部分数据丢失的问题,而这些问题会对平滑滤波的稳定性和精度造成很大的影响。为了提高 DCT 平滑滤波的鲁棒性,文中提出基于迭代加权的 DCT 平滑滤波算法,该算法可以方便地给某些异常值分配较低权重或者给高质量数据分配较高权重,以此来提高平滑滤波的鲁棒性。

2.1 数据加权处理

为了提高平滑滤波的鲁棒性,文中利用当前残差通过权重函数重新构造新的权重,经过反复迭代(实践中证明五次迭代即可),直至残差不在变化。

用于分配权重的权重函数有许多,如 bisquare、cauchy 和 fair 等,bisquare 函数从中心极值向两边衰减较快,能够很好地抑制异常数据的干扰,因此文中采用 bisquare 权重函数,其定义为^[11]:

$$w_i = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{u_i}{4.685}\right)^2\right)^2 & \left|\frac{u_i}{4.685}\right| < 1 \\ 0 & \left|\frac{u_i}{4.685}\right| \geq 1 \end{cases} \quad (22)$$

式中： u_i 为学生化残差。其定义为：

$$u_i = \frac{r_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1-h_i}} \quad (23)$$

式中： $r_i = y_i - \hat{y}_i$ 表示第 i 次估计的残差； h_i 为相应的杠杆值； $\hat{\sigma}$ 为残差标准差的估计值，其通常规定为 1.4826 MAD (MAD 表示绝对中位差)；杠杆值 h_i 可以通过如下公式计算：

$$h_i = h = \frac{1}{n} \sum_i H_{ii} = \text{Tr}(H)/n \quad (24)$$

根据公式(19)、公式(23)和公式(24)可以得出：

$$u_i = r_i \left[1.4826 \text{MAD}(r) \sqrt{1 - \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 16s}}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 + 16s}}{\sqrt{1 + 16s}}} \right]^{-1} \quad (25)$$

经过上述过程为输入数据分配权重，然后就可以进行下文将要阐述的鲁棒平滑滤波。

2.2 鲁棒 DCT 平滑滤波

假设 $W = \text{diag}(w_i)$ 是一个对角矩阵， $w_i \in [0, 1]$ 表示输入数据 y_i 的权重。对于含有权重的数据，其 RSS 变为：

$$w\text{RSS} = \|W^{1/2}(\hat{y} - y)\|^2 \quad (26)$$

相应的，公式(6)变为：

$$(W + sD^T D)\hat{y} = Wy \quad (27)$$

将公式(27)改写为：

$$(I_n + sD^T D)\hat{y} = (I_n - W)\hat{y} + Wy \quad (28)$$

令 $A = sD^T D + W$ ，利用上文提到的帽子矩阵 H ，公式(28)可以表示为：

$$H^{-1}\hat{y} = (H^{-1} - A)\hat{y} + Wy \quad (29)$$

对于公式(29)给出的隐式方程可以通过如下迭代过程求解：

$$H^{-1}\hat{y}_{k+1} = (H^{-1} - A)\hat{y}_k + Wy \quad (30)$$

式中： \hat{y}_k 表示第 k 次迭代计算出的平滑值。因为该线性系统正定，所以方程(30)对于任意 \hat{y}_0 均是收敛的。具体来说， D 为非奇异矩阵，那么如果 $s > 0$ ， $sD^T D$ 就是正定矩阵， W 为半正定矩阵 (因为 $w_i \geq 0$)，所以 A

为正定矩阵。因此对于任意 $s > 0$ 可以确保 \hat{y}_k 的集合收敛于 \hat{y} 。

为了方便利用 DCT 运算，公式(30)可以写为：

$$\hat{y}_{k+1} = (I_n + sD^T D)^{-1}(W(y_k - \hat{y}_k) + \hat{y}_k) \quad (31)$$

这样，与公式(17)类似，公式(31)即可转换为：

$$\hat{y}_{k+1} = \text{IDCT}(\text{IDCT}(W(y_k - \hat{y}_k) + \hat{y}_k)) \quad (32)$$

公式(32)即为鲁棒 DCT 平滑滤波的主体迭代公式。该迭代过程由 GCV 值判决来决定，而当输入的数据含有权重时公式 (11) 描述的 GCV 值则不再适用。此时必须要考虑权重残差，另外在计算均方误差时也要考虑丢失数据的个数，这样一种新的 GCV 值可以表示为：

$$\text{GCV}(s) = \frac{w\text{RSS}/(n - n_{\text{miss}})}{(1 - \text{Tr}(H)/n)^2} = \frac{\|W^{1/2}(\hat{y} - y)\|^2/(n - n_{\text{miss}})}{(1 - \text{Tr}(H)/n)^2} \quad (33)$$

式中： n_{miss} 表示丢失数据个数； n 表示数据总个数。注意到该公式与公式(21)相比需要已知 \hat{y} ，必须在每个 GCV 最小化迭代中计算出 \hat{y} 的大小，因此对含有权重的数据进行平滑滤波需要更多的计算时间。

3 实验与结果分析

为了验证文中所提出算法的效果，分别进行了数据仿真实验和实际光纤陀螺数据滤波实验。

3.1 数据仿真实验

数据仿真实验依托 Matlab 软件进行。Matlab 软件提供了若干标准测试信号，如 Bumps、Doppler 或 Blocks 等。其中 Doppler 信号是一种连续变化信号，频率覆盖范围广，相对其他信号更接近光纤陀螺实际信号，因此文中选用 Doppler 信号作为标准信号进行仿真。根据光纤陀螺随机噪声特点，在 Doppler 信号基础上加入分形噪声，混合信号的信噪比设定为 5 dB。另外为了验证文中所提出算法的鲁棒性，在混合信号的不同位置中设定了若干野值点和丢失信号点。最终合成的原始信号如图 1 所示，图中被圈起来的分别表示野值点和丢失数据点。为了更加直观反映文中所述平滑滤波算法的效果，文中分别采用传统带有惩罚项的最小二乘法和文中提出的鲁棒 DCT 算法对图 1 中的信号进行平滑滤波，其结果如图 2 所示。

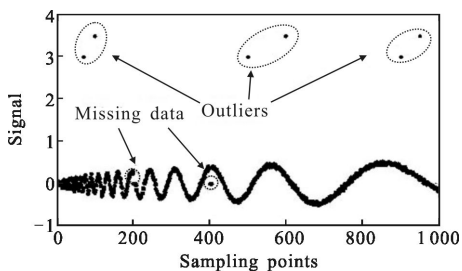


图 1 含有野值和数据丢失的原始信号

Fig.1 Original signal with outliers and missing data

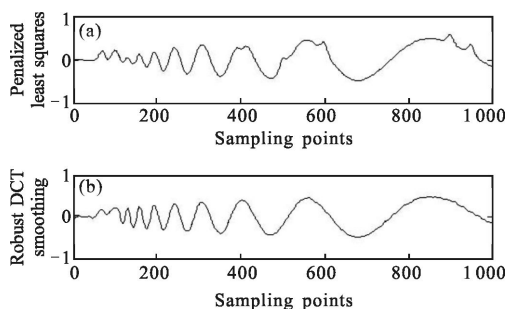


图 2 两种平滑滤波结果

Fig.2 Results of two smoothing filter

对比图 2 中两种不同的平滑滤波结果,传统带有惩罚项的最小二乘平滑滤波对信号野值或丢失数据点比较敏感,当原始数据出现这两种情况时,平滑后的曲线出现扭曲,偏离整体数据趋势;文中提出的鲁棒 DCT 平滑滤波通过 5 次迭代对原始数据进行加权处理,降低了原始数据中异常数据所占权重,所以最终平滑结果能够较好地反映原始数据的整体变化趋势而不受个别异常点的干扰。

为了定量说明文中所提出鲁棒 DCT 平滑滤波的降噪能力,分别计算原始数据以及两种平滑滤波后数据的均方根(RMS)误差如表 1 所示。

表 1 滤波前后数据的 RMS 误差

Tab.1 RMS errors of the data before and after filtering

	Original data	Penalized least squares	Robust DCT smoothing
RMS error	0.252 8	0.077 5	0.046 9

从上述仿真结果来看,文中提出的鲁棒 DCT 平滑滤波能够抑制原始信号野值或数据丢失的干扰,具有较好的鲁棒性。然而从图 2 也可以看出在 Doppler 信号的前端,两种平滑滤波均不能较好地跟

踪信号变换。这是因为 Doppler 信号前端的频率很高,而平滑滤波对于高频信号的跟踪能力较差。不过 FOG 的信号频率相对较低,使用平滑滤波不会出现无法跟踪的问题,下节通过对 FOG 信号实际测试可以说明。

3.2 FOG 信号滤波实验

为了充分验证文中所提出的鲁棒 DCT 平滑滤波算法对 FOG 信号的降噪能力,文中分别选取了 FOG 固定角速率输出和摇摆运动输出这两种典型信号进行实验。实验选用俄罗斯 Fizoptika 公司生产的 VG910 型开环光纤陀螺,其测量角速率范围为 $\pm 150(^{\circ})/s$,频率范围为 $0\sim 450\text{ Hz}$,零偏稳定性为 $5(^{\circ})/h$,实验环境温度为 25°C 。

将 FOG 安装于单轴速率转台上,设定转台旋转角速率为 $100(^{\circ})/s$,采样频率为 100 Hz ,采集数据时间为 80 s 。采集 FOG 原始输出信号,对其分别进行带惩罚项的传统最小二乘平滑滤波和文中提出的鲁棒 DCT 平滑滤波,结果如图 3 所示。从图 3 可以看

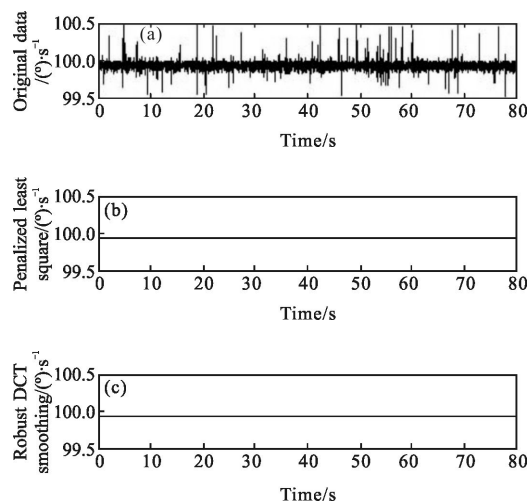


图 3 固定角速率实验结果

Fig.3 Results of fixed angular rate experiment

出:FOG 的原始数据含有大量随机噪声和野值,表现为其输出角速率在 $100(^{\circ})/s$ 上下随机振荡。经过传统带惩罚项的最小二乘平滑滤波和文中提出的鲁棒 DCT 平滑滤波后,FOG 的数据变得平稳,基本能够稳定在某一值附近。考虑到该数据真值为固定值,这里采用均值和标准差来对滤波前后的数据进行评价,相应计算结果如表 2 所示。从表 2 中的数据来看,对于真值固定不变的信号,滤波前后信号均值变

化不大,而信号的标准差大幅度减小,其标准差基本为零。综上分析,对于真值固定不变的角速率信号,两种平滑滤波的滤波效果基本相同,对信号的随机噪声均有较好的抑制作用。

表 2 滤波前后 FOG 信号统计特征

Tab.2 Statistical characters of FOG before and after filtering

	Original data	Penalized least squares	Robust DCT smoothing
Mean/(°)·s ⁻¹	99.933 0	99.333 0	99.932 5
Standard deviation/(°)·s ⁻¹	0.534	1.094 3×10 ⁻¹⁰	3.226 1×10 ⁻¹¹

为了验证该滤波算法在 FOG 信号变化时抑制随机噪声的能力,文中通过设定转台的摇摆运动模式向 FOG 输入摇摆运动。摇摆运动参数具体设定为:摇摆幅度 $A=5^\circ$,频率 $f=1\text{ Hz}$,初始相位 $\varphi=0^\circ$ 。采集 10 个摇摆周期的 FOG 输出数据对其分别进行带惩罚项的传统最小二乘平滑滤波和文中提出的鲁棒 DCT 平滑滤波,最终结果如图 4 所示。转台设定摇摆运动的角位置满足 $P=A\sin(2\pi ft+\varphi)$,那么对其求导即可得到 FOG 的输入角速度为 $\omega=2\pi fA\cos(2\pi ft+\varphi)$,由此可以求出滤波后 FOG 信号的误差曲线如图 5 所示。为了定量说明平滑滤波对 FOG 噪声的抑制能力,分别计算 FOG 原始信号以及两次平滑滤波后的 RMS 误差,如表 3 所示。

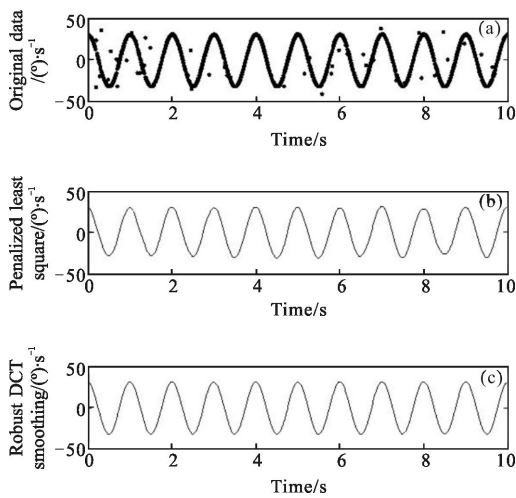


图 4 摇摆运动实验结果

Fig.4 Results of rocking motion experiment

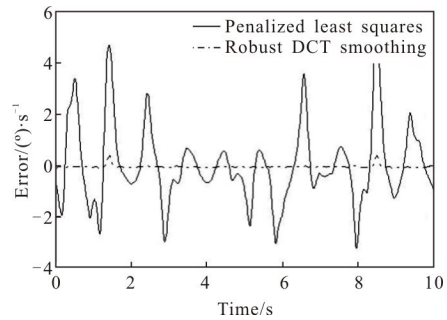


图 5 两种滤波结果误差

Fig.5 Error of two filter results

表 3 滤波前后 FOG 信号 RMS 误差

Tab.3 RMS errors of FOG signal before and after filtering

	Original data	Penalized least squares	Robust DCT smoothing
RMS error/(°)·s ⁻¹	7.283 9	1.999 0	0.077 3

对于变化的 FOG 信号,从图 4 中可以看出两种平滑滤波算法对信号的异常点和随机噪声均有抑制效果。然而从图 5 中可以直观看出,传统带惩罚项的最小二乘平滑滤波结果受信号异常点的影响较大,在异常点附近会出现较大的波动,文中提出的鲁棒 DCT 平滑滤波结果则基本不受信号异常点的干扰。从表 3 的数据中也可以发现,与原始数据相比,传统带惩罚项的最小二乘平滑滤波 72.6%,文中提出的鲁棒 DCT 平滑滤波输出 RMS 误差减小了 98.9%,且后者比前者减小了 96.1%。综上所述,对于真值实时变化的角速率信号,文中提出的鲁棒 DCT 平滑滤波算法比传统带惩罚项的最小二乘平滑滤波算法的鲁棒性更好。

4 结论

为了降低 FOG 信号的随机噪声,减小 FOG 采样信号中异常值对传统平滑滤波的干扰,文中提出一种 DCT 鲁棒平滑滤波算法。该算法采用 DCT 来计算原始数据的平滑值,提高了平滑滤波的运算速度,并提出采用迭代加权的方法,在平滑之前为各个数据分配权重,给异常值分配较低权重而给高质量数据分配较高权重,有效地提高了 DCT 平滑滤波的鲁棒性。实验结果表明,DCT 鲁棒平滑滤波算法能够不受 FOG 信号中异常值的干扰,对 FOG 的随机

噪声有良好的抑制作用。

参考文献:

- [1] Zhang Chunxi, Wang Lu, Gao Shuang, et al. Dynamic Allan variance analysis for stochastic errors of fiber optic gyroscope [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2014, 43(9): 3081–3088. (in Chinese)
张春熹, 王璐, 高爽, 等. 基于动态 Allan 方差的光纤陀螺随机误差分析[J]. *红外与激光工程*, 2014, 43(9): 3081–3088.
- [2] Li Xue, Wang Qin. A novel Kalman filter for combining outputs of MEMS gyroscope array [J]. *Measurement*, 2012, 45(4): 745–754.
- [3] Dang Shuwen, Tian Weifeng, Qian Feng. De-noising fractional noise in fiber optic gyroscopes based on lifting wavelet [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2009, 36(3): 625–629. (in Chinese)
党淑雯, 田蔚风, 钱峰. 基于提升小波的光纤陀螺分形噪声滤除方法[J]. *中国激光*, 2009, 36(3): 625–629.
- [4] Gan Yu, Sui Lifan, Wu Jiangfei, et al. An EMD threshold de-noising method for inertial sensors [J]. *Measurement*, 2014, 49: 34–41.
- [5] Gao Weiwei, Wang Guanglong, Chen Jianhui, et al. Application of multiple-scale variable step least mean square adaptive algorithm to fiber optic gyroscope data processing [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2014, 26(7): 071002–1–5. (in Chinese)
高伟伟, 王广龙, 陈建辉, 等. 多尺度变步长最小均方自适应算法在光纤陀螺数据处理中的应用 [J]. *强激光与粒子束*, 2014, 26(7): 071002–1–5.
- [6] Quan Quan, Cai Kaiyuan. Time-domain analysis of the Savitzky-Golay filters [J]. *Digital Signal Processing*, 2012, 2(2): 238–245.
- [7] Florentina Bunea, Yiyuan She, Hernando Ombao, et al. Penalized least squares regression methods and applications to neuroimaging[J]. *Neuro Image*, 2011, 55(4): 1519–1527.
- [8] Weinert. Efficient computation for Whittaker-Henderson smoothing [J]. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2007, 52(7): 959–974.
- [9] Leung Bing, Cheung Patrick, Robert Nowak, et al. Cross validation for selection of cortical interaction models from scalp EEG or MEG [J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2012, 59(2): 504–514.
- [10] Damien Garcia. Robust smoothing of gridded data in one and higher dimensions with missing values [J]. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2010, 54(9): 1167–1178.
- [11] Marek Omelka, Matías Salibián-Barrera. Uniform asymptotics for S- and MM-regression estimators [J]. *Ann Inst Stat Math*, 2010, 62(5): 897–927.