

# 无色散光纤信道的非线性演化

贺静波, 许江湖

(海军工程大学 电子工程学院, 湖北 武汉 430033)

**摘要:** 在单模光纤中由于非线性效应和拉曼增益效应的共同作用, 导致光子在各向同性介质中传输时满足非线性薛定谔方程。利用随机微分方程研究了长距离光纤通信中噪声对光纤信道的影响, 给出了光纤信道的动力学机理模型。首先在非线性薛定谔方程的基础上引入噪声项, 然后利用 Itô 公式将其整理成极坐标系下标准的随机微分方程组, 最后利用福克尔-普朗克(Fokker-Planck)方程得到了光脉冲在光纤信道中的概率密度函数, 精细地研究了光纤信道的非线性演化规律。即在加入噪声项的情况下, 分析了光纤通信的传输性能指标, 得到了概率密度函数。

**关键词:** 光纤; 非线性薛定谔方程; 福克尔-普朗克方程; 随机微分

**中图分类号:** TN248.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201645.0422004

## Nonlinear evolution of zero-dispersion optical fiber channel

He Jingbo, Xu Jianghu

(College of Electronics Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

**Abstract:** It is considered that optical fiber channels modeled by the stochastic nonlinear Schrodinger equation and operating at zero dispersion. The statistic characteristic of optical fiber channel with noise was analyzed. In order to find the capacity of the dispersionless optical fiber channel, one first needs to statistically model the communication channel. The Schrodinger equation added noise was modeled. The stochastic differential equations (SDEs) in polar coordinates were built by using Itô formula. The Fokker-Planck equation of SDEs were presented and the probability density function(PDF) was given. As a result of the Kerr nonlinearity and its interaction with amplified spontaneous emission noise, the amplitude and phase channels correlate with each other and the statistics of the received signal are non-Gaussian.

**Key words:** optical fiber; nonlinear Schrodinger equation; Fokker-Planck equation; stochastic differential

收稿日期: 2015-08-12; 修订日期: 2015-09-15

基金项目: 国家自然科学基金(61401493); 海军工程大学自然科学基金(HGDQNSQJJ15003)

作者简介: 贺静波(1979-), 男, 讲师, 博士, 主要从事随机微分理论及应用方面的研究。Email: hjb\_1979@163.com

## 0 引言

当前光纤传输在信息领域应用广泛,光脉冲在光纤的反常色散区传输时,群速度色散(GVD)效应与自相位调制(SPM)效应相平衡时,其作用相互抵消,从而实现高保真、长距离传输,因此光子在光纤信息传输中起着重要的作用<sup>[1-2]</sup>。当输入光子的峰值功率较大时,光子脉冲会和光学声子相互作用,产生拉曼散射效应;在同时考虑电子的非线性效应和拉曼散射效应下,拉曼散射效应会改变光子脉冲调制不稳定性增益特性。在拉曼效应的参与和影响下,在不同传输介质和不同的参数下,斯托克斯波和反斯托克斯波增益谱特性发生了改变。在单模光纤中由于非线性效应和拉曼增益效应的共同作用,导致光子在各向同性介质中传输时满足非线性薛定谔方程(NSE)。非线性薛定谔方程或广义非线性薛定谔方程(GNSE)是模拟激光脉冲在光纤中传输的一种重要方法<sup>[3-4]</sup>。

为了实现长距离光纤通信,需要在光纤传输信道中加入光学放大器,但加入放大器就在光纤通信中引入了噪声<sup>[5-7]</sup>。众所周知,无噪声条件下光脉冲的传输满足非线性薛定谔方程,加入噪声项后,为了分析光纤通信的传输速率、容量和无中继传输距离等性能指标,就需要得到概率密度函数(PDF)。关于此类研究的文献很多,但都是基于统计模型的(即基于试验数据的经验拟合模型),不能明确描述光纤信道传输过程中噪声的作用机理<sup>[8-9]</sup>。此外,一般的统计模型只对信道的一阶、二阶特性进行描述,因此对于光纤信道随距离的变化特性刻画不足。文中提出了一种利用随机微分方程求解光纤信号传输 PDF 的方法,该方法从信号传输的本质上进行分析,巧妙借助了随机微分方程这一数学工具,更有利于揭示光纤信道信号传输的演化规律(即动力学机理)。

## 1 概率分布的演化

光脉冲在光纤传输信道中所满足的非线性薛定谔方程为:

$$dQ(z)=j\gamma Q(z)|Q(z)|^2dz+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}dW(z) \quad (1)$$

式中: $dW(z)$ 为单位能量的白噪声; $\gamma$ 为克尔(Kerr)非

线性参数。令  $Q(z)=re^{i\theta}$ ,将公式(1)转化成极坐标形式为:

$$dre^{i\theta}=j\gamma re^{i\theta}r^2dz+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}dW(z) \quad (2)$$

根据 Itô 公式

$$de^{i\theta}=e^{i\theta}\left[jd\theta-\frac{1}{2}(d\theta)^2\right] \quad (3)$$

同时由 Itô 链式规则

$$d(X,Y)=XdY+YdX+dXdY, \quad (4)$$

可知

$$dQ(z)=dre^{i\theta}=e^{i\theta}\left[jrd\theta+dr+jdrd\theta-\frac{1}{2}r(d\theta)^2-\frac{1}{2}dr(d\theta)^2\right] \quad (5)$$

令

$$dr=Adz+BdW_1(z) \quad (6)$$

$$d\theta=Cdz+DdW_2(z) \quad (7)$$

将公式(6)、(7)代入公式(5),得到:

$$dQ(z)=e^{i\theta}\left(jrC+A+jBD-\frac{1}{2}rD^2\right)dz+e^{i\theta}jrDdW_2(z)+e^{i\theta}BdW_1(z) \quad (8)$$

与公式(2)联立,得到:

$$jrC+A+jBD-\frac{1}{2}rD^2=j\gamma r^3 \quad (9)$$

$$e^{i\theta}[jrDdW_2(z)+BdW_1(z)]=\frac{\sigma}{\sqrt{2}}[dW_1(z)+dW_2(z)] \quad (10)$$

最终解得:

$$A=\sigma^2/4r \quad (11)$$

$$B=\frac{\sigma}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta) \quad (12)$$

$$C=\gamma r^2 \quad (13)$$

$$D=\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sin\theta}{r}+\frac{\cos\theta}{r}\right) \quad (14)$$

整理成标准形式的随机微分方程:

$$\begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2/4r \\ \gamma r^2 \end{bmatrix} dz + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r \end{bmatrix} dW(z) \quad (15)$$

根据随机微分理论,若  $X \in R^p$  满足随机微分方程(SDE)

$$dX=a(X(t),t)dt+H(X(t),t)dW(z) \quad (16)$$

则  $X(t)$ 的概率密度函数  $f(X,t)$ 满足 Fokker-Planck 方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i=1}^p \frac{\partial}{\partial x_i} [\sqrt{\det G} a_i(x,t)f(x,t)] +$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\det G}} \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [\sqrt{\det G} (HH^T)_{ij} f(x,t)] \quad (17)$$

笛卡尔坐标系下  $\det G=1$ , 极坐标下  $\det G=r^2$ 。令

$$a = \begin{bmatrix} \sigma^2/4r \\ \gamma r^2 \end{bmatrix} dz \quad (18)$$

$$H = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r \end{bmatrix} \quad (19)$$

根据公式(17)可知,  $r$ 、 $\theta$  两者的联合概率密度函数  $p(r, \theta; z)$  所满足的 Fokker-Planck 方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(r, \theta; z)}{\partial z} = & - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i p(r, \theta; z)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \\ & [(HH^T)_{ij} p(r, \theta; z)] = - \frac{\sigma^2}{4r} \frac{\partial p}{\partial r} - \gamma r^2 \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ & \frac{\sigma^2}{4} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

因此幅度  $r$  的边缘概率密度函数  $p(r, z)$  所满足的随机微分方程为:

$$\frac{\partial p(r, z)}{\partial z} = - \frac{\sigma^2}{4r} \frac{\partial p(r, z)}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{4} \cdot \frac{\partial^2 p(r, z)}{\partial r^2} \quad (21)$$

其解为:

$$p(r, z) = \frac{2r}{\sigma^2 z} e^{-\frac{r^2+r_0^2}{\sigma^2 z}} I_0\left(\frac{2rr_0}{\sigma^2 z}\right) \quad (22)$$

式中:  $I_0\left(\frac{2rr_0}{\sigma^2 z}\right)$  为修正的一类零阶贝塞尔函数;  $r_0$  为初始幅度值。

下面进一步求解工程应用中常用的统计特性变量——功率谱。有两种求解方法:(1) 根据  $r$ 、 $\theta$  两者的联合概率密度函数  $p(r, \theta; z)$  求相关函数  $\langle Q(z)Q(z)^* \rangle$ , 然后利用傅里叶变换得到功率谱  $S(f)$ 。该方法是求解随机信号功率谱的常规思路, 但从上述推导可知, 概率密度函数  $p(r, \theta; z)$  求解难度较大, 因此该方法对于非线性情况不容易求解功率谱  $S(f)$ ; (2) 利用随机微分方法, 虽然理论分析有一定难度, 但计算简单。文中利用随机微分理论进行求解, 根据公式(4)

$$dQ(z)Q(z)^* = Q(z)dQ(z)^* + Q(z)^*dQ(z) + dQ(z)dQ(z)^* \quad (23)$$

因为

$$\frac{d\langle W(z) \rangle}{dz} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{d\langle W^*(z) \rangle}{dz} = 0 \quad (25)$$

所以将公式(1)代入得到:

$$\frac{d\langle Q(z)Q(z)^* \rangle}{dz} = \frac{\sigma^2}{2} \delta(z) \quad (26)$$

因此利用傅里叶变换可以得到功率谱  $S(f)$  为:

$$S(f) = \frac{\sigma^2}{2} \quad (27)$$

## 2 实验与结果分析

根据公式(22)可知光脉冲信号在光纤信道中传输时幅度分布的变化情况。实验参数设置如下:  $\sigma=1$ 、 $r_0=1$ , 当传输距离  $z=1$  时幅度分布  $p(r, z)$  如图 1 所示。

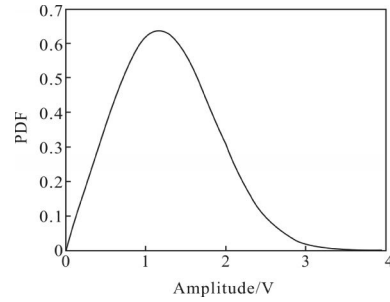


图 1 光脉冲幅度的概率密度函数

Fig.1 Probability density function of optical pulse amplitude

当传输距离  $z=10$  时幅度分布  $p(r, z)$  如图 2 所示。

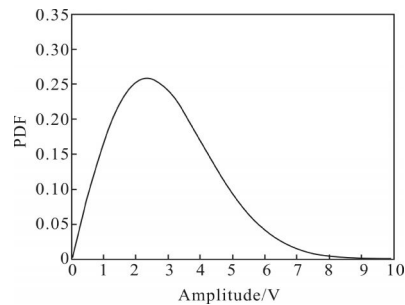


图 2 光脉冲幅度的概率密度函数

Fig.2 Probability density function of optical pulse amplitude

当传输距离  $z=100$  时幅度分布  $p(r, z)$  如图 3 所示。

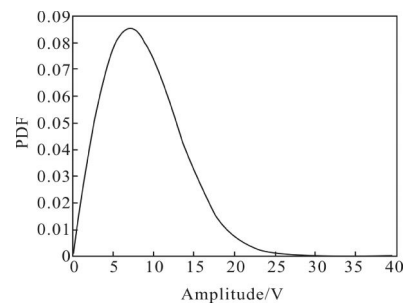


图 3 光脉冲幅度的概率密度函数

Fig.3 Probability density function of optical pulse amplitude

当  $r_0=10$ 、传输距离  $z=1$  时幅度分布  $p(r, z)$  如图 4 所示。

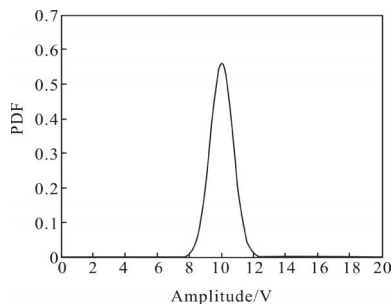


图 4 光脉冲幅度的概率密度函数

Fig.4 Probability density function of optical pulse amplitude

当传输距离  $z=10$  时幅度分布  $p(r,z)$  如图 5 所示。

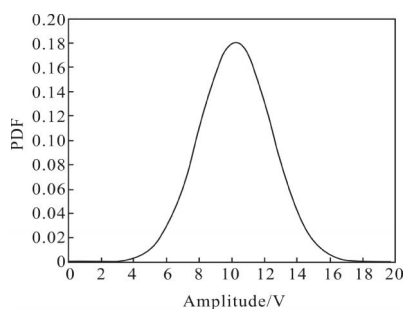


图 5 光脉冲幅度的概率密度函数

Fig.5 Probability density function of optical pulse amplitude

当传输距离  $z=100$  时幅度分布  $p(r,z)$  如图 6 所示。

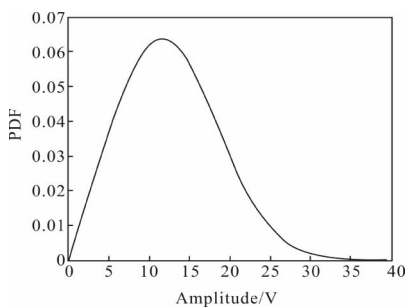


图 6 光脉冲幅度的概率密度函数

Fig.6 Probability density function of optical pulse amplitude

比较图 1~3 可以看出,当光脉冲信号较弱时(初始幅度  $r_0$  小),随着传输距离  $z$  的增加,光脉冲幅度的概率密度函数极大值越来越偏离  $r_0$ , 即信号失真严重,因此需要采取相应技术进行补偿。但比较图 4~6 可以看出:当光脉冲信号较强时(初始幅度  $r_0$  大),随着传输距离  $z$  的增加,光脉冲幅度的概率密度函数极大值位于  $r_0$  附近,即光脉冲信号失真小。综上所述,理论分析与实验结果验证了利用随机微分方程

对光纤信道非线性演化规律分析的正确性。

### 3 结 论

文中研究重点在于根据光脉冲在光纤传输信道中所满足的非线性薛定谔方程,采用随机微分方程的分析方法,得到光纤信道的动力学机理模型。在此基础上,可以很方便地仿真分析长距离光纤通信中噪声对光纤信道的影响。研究思路为:首先在非线性薛定谔方程的基础上引入噪声项,然后利用公式将其整理成极坐标系下标准的随机微分方程组,最后利用福克尔-普朗克 (Fokker-Planck) 方程就可以得到光脉冲在光纤信道中的概率密度函数,从而可以精细地研究光纤信道的统计特性。通过仿真实验表明随着传输距离的增加,光脉冲信号的失真(偏离初始幅度  $r_0$ )越来越严重,尤其是当光脉冲信号较弱时(初始幅度  $r_0$  小),因此需要采取相应技术进行补偿。但当光脉冲信号较强时(初始幅度  $r_0$  大),随着传输距离  $z$  的增加,光脉冲幅度的概率密度函数极大值位于  $r_0$  附近,即光脉冲信号失真小。

### 参 考 文 献:

- [1] Qiao Hailong, Jia Weiguo, Liu Baolin, et al. Effect of Ramam gain on the characteristic of soliton propagation [J]. *Acta Phys*, 2013, 62(10): 104212. (in Chinese)  
乔海龙, 贾维国, 刘宝林, 等. 拉曼增益对孤子传输特性的影响[J]. *物理学报*, 2013, 62(10): 104212.
- [2] Nga N T H, Sangirov J, Joo G C, et al. 10 Gbps/ch full-duplex optical link using a single-fiber channel for signal transmission [J]. *IEEE Photonics Technology Letters*, 2014, 26(6): 609-612.
- [3] Hager C, Beygi L, Agrell E, et al. A low-complexity detector for memoryless polarization-multiplexed fiber optical channels [J]. *IEEE Communications Letters*, 2014, 18(2): 368-371.
- [4] Beygi L, Agrell E, Johannisson P, et al. A discrete-time model for uncompensated sigle-channel fiber optical links[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2012, 60(11): 3440-3450.
- [5] Silva N A, Almeida A J, Pinto A N. Interference in a quantum channel due to classical four-wave mixing in optical fibers [J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 2012, 48(4): 472-479.

- [6] Zhao Jiasheng. Influences of finite gain bandwidth on evolution of self-Similar pulse propagation in fiber amplifiers [J]. *Chinese J Lasers*, 2012, 39(8): 0802006. (in Chinese)  
赵佳生. 光纤放大器中有限增益带宽对自相似脉冲放大演化的数值研究[J]. 中国激光, 2012, 39(8): 0802006.
- [7] Xiang Lian, Li Hu, Zhang Xiaoping. Modified perturbation method for multi-span nonlinear fiber [J]. *Chinese J Lasers*, 2010, 37(4): 1033–1036. (in Chinese)  
向练, 李虎, 张晓萍. 多跨距非线性光纤链路中基于微扰理论的优化方法[J]. 中国激光, 2010, 37(4): 1033–1036.
- [8] Li Chao, Zhao Lei, Huang Zhihua et al. Theory study on self-similar pulse in mode-locked fiber laser [J]. *Chinese J Lasers*, 2013, 40(6): 0602017–1–0602017–6. (in Chinese)  
李超, 赵磊, 黄志华, 等. 自相似脉冲在锁模光纤激光器中产生的理论研究[J]. 中国激光, 2013, 40(6): 0602017.
- [9] Ren Liping. Selfsimilar propagation of linearly chirped pulses in fibers with longitudinal gain profile [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2012, 41(8): 1004–1008. (in Chinese)  
任丽平. 线性光脉冲在具有纵向增益光纤中的自相似传播研究[J]. 光子学报, 2012, 41(8): 1004–1008.