

径向剪切干涉波面重构的数值模拟分析

王宇飞, 达争尚

(中国科学院西安光学精密机械研究所, 陕西 西安 710119)

摘要: 径向剪切干涉仪所采集到的干涉图并不直接反映原始待测波面信息, 为了获得原始待测波面信息, 波面重构是必要的。推导了波面重构的迭代算法, 并用 Matlab 分别对径向剪切中不同迭代次数、不同剪切比的波面重构迭代算法进行了数值模拟, 得出以下结论: 合适的剪切比可以简化迭代运算, 提高运算速度; 与小畸变波面重构相比, 残差波面 PV 值达到相同精度时, 大畸变波面重构需要更多的迭代次数。待测波面的 PV 值大于 10λ 时, 剪切比应在 0.7 以上, PV 值大于 6λ 小于 10λ , 剪切比在 0.5~0.7 之间, PV 值小于 6λ , 剪切比小于 0.5。

关键词: 径向剪切干涉; 干涉测量; 数值模拟

中图分类号: O436.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201645.0317001

Numerical simulation and analysis of wavefront reconstruction in radial shearing interference

Wang Yufei, Da Zhengshang

(Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710119, China)

Abstract: In order to acquire the original wavefront information in radial shearing interferometry, wavefront reconstruction is necessary, the iterative algorithm for wavefront reconstruction was deduced in this paper, based on which an numerical simulation using Matlab with different iteration number and shearing ratio was conducted. The simulation comes to the following conclusion: Properly selection of the shearing ratio can simplify the computational complexity. Compared with the small distortion wavefront reconstruction, more but appropriate iteration number in large distortion wavefront reconstruction is needed. Preferred shearing ratios for different measured wavefront PV values are summarized as follows: a. if $WPV > 10\lambda$, $\beta > 0.7$; b. if $6\lambda < WPV < 10\lambda$, $0.5 < \beta < 0.7$; c. if $WPV < 6\lambda$, $\beta < 0.5$.

Key words: radial shearing interference; interferometry; numerical simulation

收稿日期: 2015-07-05; 修订日期: 2015-08-03

基金项目: 激光参数测量技术研究与验证(YLHGC11B0A)

作者简介: 王宇飞(1991-), 男, 硕士生, 主要从事激光光束参量测量方面的研究。Email: thinker2014@gmail.com

导师简介: 达争尚(1973-), 男, 研究员, 博士, 主要从事激光光束参量测量方面的研究。Email: dazhengshang@opt.ac.cn

0 引言

径向剪切干涉技术由于无需设置参考光,测量口径范围大,对温度升降、空气流动、地面震动等环境影响不敏感,只要改变剪切比,测量精度也随之改变。相比传统干涉仪有其独特优点,所以被广泛应用在光学元件面型检测、脉冲波面的高速测量、光束质量测量等领域。国内外学者很早就对剪切干涉仪做了大量研究并已经应用在工程中^[1]。

在径向剪切干涉技术中,从干涉条纹图中提取出来的波面位相信息,并不直接反映被测波面的空间分布,而是扩束波面和缩束波面之间的位相差,即剪切波面位相分布。因此需要对存在的误差进行校正。径向剪切干涉技术的难点之一就是如何进行波面重构,对误差进行校正,以提高测试精度。文中对波面重构的迭代算法进行推导,并用 Matlab 数值计算软件对波面重构算法进行数值模拟,分别在不同迭代次数、不同剪切比的情况下对剪切波面进行仿真,最后对仿真结果进行分析,得出结论。

1 径向剪切干涉原理

径向剪切干涉是利用一定装置(通常是望远镜系统)把待测波面分成扩束、缩束两个波面,使两个波面在空间重叠区域发生干涉,形成径向剪切干涉条纹。图 1 是径向剪切干涉条纹图, r_0 表示原始待测波面半径, r_e 表示扩束波面半径, r_c 表示缩束波面半径。

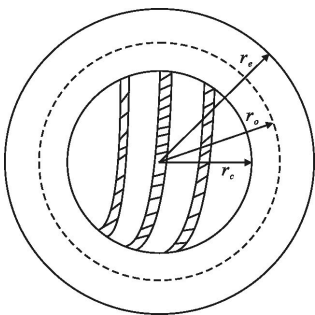


图 1 径向剪切干涉条纹图

Fig.1 Fringe of radial shearing interference

假定径向剪切干涉原始波面可由下式表示:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^n \rho^n (a_n \cos l\theta + b_n \sin l\theta) \quad (1)$$

式中: ρ, θ 为极坐标; $n \geq l, n$ 和 l 具有相同的奇偶性。

缩束波面的压缩率 $S_c = \rho/\rho'$, 其中, $\rho = r/r_0, \rho' = r/r_c, (r$ 为干涉图中某点的径向距离)。扩束波面的扩展率 $S_e = \rho/\rho''$, 其中 $\rho'' = r/r_e$ 。

缩束波面方程为:

$$W(\rho', \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^n (\rho')^n (a_n \cos l\theta + b_n \sin l\theta) \quad (2)$$

扩束波面方程为:

$$W(\rho'', \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^n (\rho'')^n (a_n \cos l\theta + b_n \sin l\theta) \quad (3)$$

因此扩束波面和缩束波面的光程差可以表示为:

$$W_{OPD}(\rho', \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^n (1 - \beta^n) (\rho')^n (a_n \cos l\theta + b_n \sin l\theta) \quad (4)$$

其中, $\beta = \rho''/\rho' = r_c/r_e$

在两个波面的公共区域令光程差等于 $N\lambda$ 可得:

$$W_{OPD}(\rho', \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^n (1 - \beta^n) W(\rho', \theta) = N\lambda \quad (5)$$

式中: N 为干涉条纹的级数; λ 为干涉波长; β 为剪切比。

由公式(5)可知,径向剪切波面表达式与原始波面表达式极为相似,仅仅差了一个因式 $(1 - \beta^n)$ 。当待测波面放大到一定程度时,波面就近似于平面波。此时,径向剪切干涉仪就近似于普通的 Twyman-Green 干涉仪,径向剪切干涉条纹图就可作为待测波面与理想平面波产生的干涉条纹图处理。条纹图经计算机处理后得到的光程差就可以被认为是原始波面的位相分布。但是这种方法只能适用于小畸变待测光波面,对于大畸变待测光波面而言,实际扩束系统的放大倍数不可能特别大,其波面被放大到一定程度,依然是畸变波面,不能近似认为是理想平面波,从而会引入较大的重构误差。由此,引入迭代法。

2 迭代法

缩束、扩束波面的光程差可表示为: $W_{OPD}(\rho', \theta) = W(\rho', \theta) - W(\beta\rho', \theta)$, 不断放大两个波面。

$$W_{OPD}(\rho, \theta) = W(\rho', \theta) - W(\beta\rho', \theta) \quad (6)$$

$$W_{OPD}(\beta\rho', \theta) = W(\beta\rho', \theta) - W(\beta^2\rho', \theta) \quad (7)$$

$$W_{OPD}(\beta^2\rho', \theta) = W(\beta^2\rho', \theta) - W(\beta^3\rho', \theta) \quad (8)$$

$$W_{OPD}(\beta^n\rho', \theta) = W(\beta^n\rho', \theta) - W(\beta^{n+1}\rho', \theta) \quad (9)$$

式子左右两边分别相加,得:

$$W(\rho', \theta) = \sum_{n=0}^n W_{OPD}(\beta^n\rho', \theta) + W(\beta^{n+1}\rho', \theta) \quad (10)$$

由上式知道, 当迭代次数 n 大到一定程度时, $W(\beta^{n+1}\rho', \theta)$ 趋于 0, 只要能够从径向剪切干涉条纹图得到相位差 $W_{\text{OPD}}(\rho', \theta)$, 通过迭代运算就可以得到缩束波面 $W(\rho', \theta)$ 。由参考文献[9]可知, 缩小光束波面 $W(\rho', \theta)$ 可看作是如图 1 所示半径为 r_o 区域内的原始波面经过缩小转化成半径为 r_c 区域上的再次分布, 这种改变不会更改原函数性质, 即原始待测波面和缩束波面两者在形状上是一样的, 因此可认为所求解的波面 $W(\rho', \theta)$ 即为待测波面。在实际系统中, 迭代次数不需要达到无限多次。

3 数值模拟

用迭代法可对出瞳形状不同的波面进行重构。实际检测中, 不但需要知道波面的形状, 同时也希望获取波面的波像差信息, 为此采用 Zernike 多项式构造研究的波面。其具有如下特点: (1) 对光学波面的拟合精度较高; (2) 其正交性使拟合多项式的系数相互独立, 避免了系数之间的耦合造成其物理意义的混淆不清; (3) 自身具有旋转对称性, 因而用于光学问题的求解过程中具有良好的收敛性。(4) 与初级像差有着一定的对应关系, 很容易与光学设计中的 Seidel 像差函数建立起联系, 所以经常采用 Zernike 多项式拟合求解光学像差。这里为了计算简便, 选用 Zernike 多项式的前八项进行仿真。Zernike 多项式前八项在笛卡尔直角坐标系中表示为:

$$W(x, y) = z_0 + z_1x + z_2y + z_3(-1 + 2x^2 + 2y^2) + z_4(x^2 - y^2) + z_5 2xy + z_6(-2x + 3x^3 + 3xy^2) + z_7(-2y + 3yx^2 + 3y^3) + z_8(1 - 6x^2 - 6y^2 + 6x^4 + 12x^2y^2 + 6y^4) \quad (11)$$

式中: z_0 表示常数项系数; z_1 表示 x 方向倾斜系数; z_2 表示 y 方向倾斜系数; z_3 表示离焦系数; z_4 表示像散系数(轴线方向为 0° 或者 90°); z_5 表示像散系数(轴向方向为 $\pm 45^\circ$); z_6 表示沿 x 轴的三级慧差系数; z_7 表示沿 y 轴的三级慧差系数; z_8 表示三级球差系数。

采用迭代算法, 运用 Matlab 数值计算软件分别对径向剪切中的不同迭代次数、不同剪切比的情况来进行模拟分析。

3.1 不同迭代次数比较

构造一个畸变波面, x, y 的取值范围为 $(-0.5, 0.5)$, 剪切比 β 取 0.5, 取 Zernike 系数 $z_0 = z_1 = z_2 = z_3 = z_7 = 0$, $z_4 = -0.071$, $z_5 = 0.54$, $z_6 = 0.039$, $z_8 = 0.0057$, 仿真得到原始波面 ($PV = 0.0711\lambda$)、扩束波面、径向剪切波面。不

同迭代次数下复原波面与残差波面的仿真图如图 2 所示(以 1 次、4 次为例)。

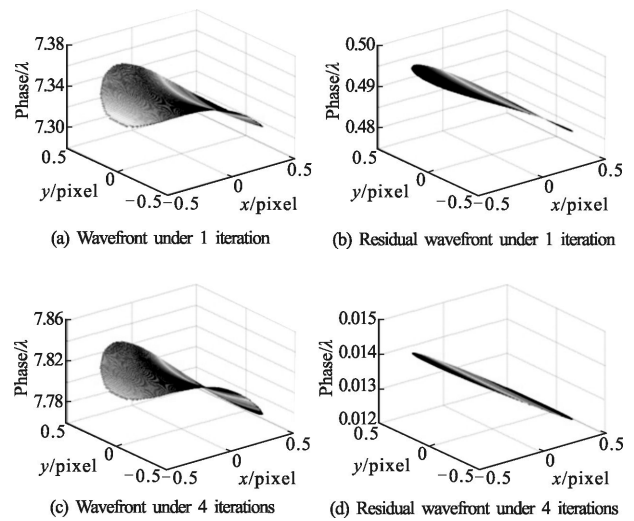


图 2 不同迭代次数下复原波面与残差波面

Fig.2 Reconstruction wavefront and residual wavefront under different iterations

表 1 同剪切比不同迭代次数复原波面与残差波面 PV 值

Tab.1 Residual wavefront vs reconstruction wavefront(same shearing ratio, different iterations)

Iterations N	Reconstruction wavefront PV/λ	Residual wavefront PV/λ
0	0.071 1	-
1	0.055 1	5.833 5e-4
2	0.063 4	1.442 7e-4
3	0.067 3	3.597 0e-5
4	0.069 3	8.986 4e-5

对以上图表进行分析: 所构造的畸变波面, 由于其原始波面 PV 值 (0.0711λ) 并不是特别大, 可认为是小畸变波面。由表 1 可知, 小畸变波面经过一次迭代之后复原波面的 PV 值即达到局部极小值点。之后, 随着迭代次数的增加, 复原波面的 PV 值不断增大, 残差波面的 PV 值不断减小。由仿真图可知, 随着迭代次数的增加, 复原波面与原始波面越来越接近, 验证了迭代算法的正确性。在具体的工程应用中, 可以通

过设定残差波面 PV 值的精度来控制迭代次数。

3.2 不同剪切比比较

为了不同剪切比之间的比较, 依然构造一个畸变波面(原始波面 $PV=14.9978\lambda$)。选取 Zernike 多项式前八项, 取 Zernike 系数 $z_0=z_1=z_2=z_3=z_5=0, z_4=-0.85, z_6=-0.8, z_7=0.5, z_8=0.069$ 。得到不同剪切比下的图表(见表 2~4), 由于篇幅有限仅给出剪切比为 0.5 时(迭代次数为 1、2、6 次为例)的仿真结果如图 3 所示。

表 2 剪切比为 0.25 不同迭代次数复原波面和残差波面的 PV 值

Tab.2 Residual wavefront vs reconstruction wavefront(different iterations, shearing ratio is 0.25)

Shearing ratio β	Iterations N	Reconstruction wavefront PV/λ	Residual wavefront PV/λ
0.25	0	14.997 8	-
	1	14.951 8	0.062 4
	2	14.117 1	0.003 9
	3	14.843 7	9.765 6e-4
	4	14.899 2	6.103 5e-4

表 3 剪切比为 0.5 不同迭代次数下复原波面和残差波面的 PV 值

Tab.3 Residual wavefront vs reconstruction wavefront (different iteration, shearing ratio is 0.5)

Shearing ratio β	Iterations N	Reconstruction wavefront PV/λ	Residual wavefront PV/λ
0.5	0	14.997 8	-
	1	14.604 1	0.244 1
	2	14.799 6	0.124 3
	3	10.676 8	0.062 4
	4	12.721 2	0.031 2
	5	14.998 1	0.001 8

表 4 剪切比为 0.66 不同迭代次数下复原波面和残差波面的 PV 值

Tab.4 Residual wavefront vs reconstruction wavefront(different iteration, shearing ratio is 0.66)

Shearing ratio β	Iterations N	Reconstruction wavefront PV/λ	Residual wavefront PV/λ
0.66	0	14.997 8	-
	1	13.518 2	0.962 5
	2	13.139 2	0.633 4
	3	14.360 2	0.240 9
	4	14.507 6	0.124 5
	5	14.713 9	0.082 4
	6	14.997 2	0.004 5

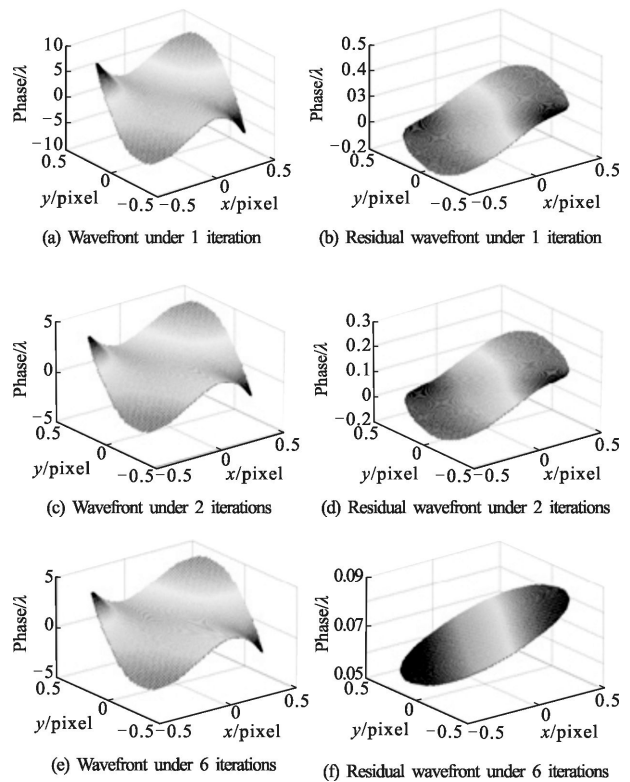


图 3 剪切为 0.5 时不同迭代次数的结果

Fig.3 Different iteration results when the shearing ratio is 0.5

对以上仿真图表进行分析;从表 2,3,4 可知,构造的畸变波面初始 PV 值(14.9978λ)比较大,可认为是大畸变波面。当剪切比为 0.5 时,迭代 5 次残差波面 PV 值达到 0.0018;剪切比为 0.25 时,迭代 3 次残差波面 PV 值即可达到 9.765 6e-4;剪切比为

0.66 时, 迭代模拟仿真最大次数 6 次残差波面 PV 值仅达到 0.0045λ 。说明随着径向剪切比的减小, 只需要经过比较少的迭代次数就能达到比较高的精度。但是剪切比越小, 形成的径向剪切干涉条纹越密集, 干涉条纹的处理困难。可以通过选择恰当的剪切比, 简化迭代过程中繁琐的数值运算, 提高运算速度的同时, 提高剪切干涉条纹处理的精度。结合 3.1 部分可知, 当剪切比都等于 0.5 时, 残差波面 PV 值达到相同精度时, 所需要的迭代次数不同, 大畸变波面需要更多的迭代次数。由此说明在剪切比相同的情况下, 复原大畸变波面能力更差, 需要更多的迭代次数。这也意味着所需处理数据更多、计算时间更长。通过对这些研究, 可以根据待测波面的情况, 恰当的选择一个径向剪切比。预先知道待测波面大概的 PV 值, 然后根据 PV 值的大小合理选择径向剪切比, 获得较高的精度和速度。

根据以上方法, 分别在不同迭代次数、不同剪切比的情况下对剪切波面进行大量仿真, 结合干涉条纹处理的难易程度。得出以下结论: $W_{PV} > 10\lambda$, 剪切比应在 0.7 以上; $6\lambda < W_{PV} < 10$, 剪切比在 0.5~0.7 之间; $W_{PV} < 6\lambda$, 剪切比小于 0.5。

4 结 论

文中对波面重构的迭代算法进行了推导, 并用 Matlab 数值计算软件分别分析了径向剪切中的不同迭代次数、不同剪切比这两个变量在数值模拟过程中对仿真精度、计算复杂度的影响。通过对两次不同变量模拟仿真的纵向对比, 又分析了畸变不同的待测波面对仿真精度和计算复杂度的影响。通过分析可以得出, 可以通过选择恰当的剪切比, 从而简化迭代过程中繁琐的数值运算, 提高运算速度; 相同剪切比情况下, 复原大畸变波面能力更差, 需要更多的迭代次数, 随着迭代次数的增加, 复原波面的 PV 值都会出现一个局部极小值点, 随后反而变大。实际应用工程项目中, 预估待测波面的 PV 值就显得很有意义。根据预估, 可以在进行有限次迭代运算的情况下获得较高的精度, 并且减少待测波面重构所需要的时间。对于波面实时测量系统, 具有实用价值。根

据该论文已有的仿真数据, $W_{PV} > 10\lambda$, 剪切比应在 0.7 以上; $6\lambda < W_{PV} < 10\lambda$, 剪切比在 0.5~0.7 之间; $W_{PV} < 6\lambda$, 剪切比小于 0.5。此结论可作为类似系统设计参考。

参 考 文 献:

- [1] Hariharan P, Sen D. Interferometric measurements of the aberrations of microscope objectives [J]. *Opt Acta*, 1962, 9: 159-175.
- [2] Wegner P J, M A Hennesian, Salmon J T, et al. Wavefront and divergence of the Beamlet prototype laser [C]//SPIE, 1999, 3492: 1019-1030.
- [3] Barnes A R, Smith L C. A combined phase, near and far field diagnostic for large aperture laser system [C]//SPIE, 1999, 3492: 564-672.
- [4] Tsuguo Kohno, Daiji Matsumoto, Takanori Yazawa, et al. Radial shearing interferometer for in-process measurement of diamond turning [J]. *Opt Eng*, 2000, 39(10): 2696-2699.
- [5] Waldemar Kowalik, Beata Garnarcz, Henryk Kasprzak. Corneal topography measurement by means of radial shearing interference: Part II—measurement errors [J]. *Optik*, 2003, 114 (5): 199-206.
- [6] Toto-Arellano N I, Rodriguez-Zurita G, Meneses-Fabian C, et al. A single-shot phase-shifting radial-shearing interferometer [J]. *Journal of optics A: Pure and Applied Optics*, 2009, 0457(045704): 1-6.
- [7] Feng Sheng, Wu Jian, Zheng Chunyan. Radial shearing interferometer [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2008, 37 (5): 188-192. (in Chinese)
冯胜, 吴健, 郑春燕. 径向剪切干涉仪 [J]. 红外与激光工程, 2008, 37(5): 188-192.
- [8] Du Yongzhao, Feng Guoying, Zhang Kai, et al. Effect of CCD nonlinearity on wavefront detection by shearing interferometry [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2010, 22(8): 1775-1779. (in Chinese)
杜永兆, 冯国英, 张凯, 等. 非线性效应对剪切干涉法波前检测的影响 [J]. 强激光与粒子束, 2010, 22(8): 1775-1779.
- [9] Jin Yafang. The study of radial shearing interference wavefront reconstruction algorithm [D]. Nanjing: Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2011: 14. (in Chinese)
金亚方. 径向剪切干涉波面重构算法研究 [D]. 南京: 南京理工大学, 2011: 14.