

亚声速横向球/柱流场对激光传输影响的数值模拟

关 奇,杜太焦,陈志华,闫 伟,彭国良

(西北核技术研究所,陕西 西安 710024)

摘 要: 采用大涡模拟的方法计算了来流速度为 $0.5 \sim 0.7 Ma$ 情况下横向球/柱形结构附近的流场,给出了密度和光程差的统计结果,并采用相屏法研究了几种流场对激光传输的影响。结果表明:密度扰动均方根和光程差均方根随着来流速度和发射孔径的增加而增大; Ma 从 0.5 增至 0.7 时,孔径为 0.5 m 情况下,密度扰动均方根增长了 90%,孔径为 0.25 m 情况下,光程差均方根增长了 90%; $Ma=0.6$ 情况下,孔径从 0.25 m 增加到 0.75 m 时,两个参数各增加了 4 倍。激光 Strehl 比随来流速度和发射孔径的增大而减小;发射孔径为 0.25 m 情况下,随着 Ma 从 0.5 增加至 0.7,Strehl 比从 0.236 下降至 0.045; $Ma=0.6$ 情况下,发射孔径从 0.25 m 增加至 0.75 m 过程中,Strehl 下降了 90%。

关键词: 激光传输; 气动光学效应; 来流速度

中图分类号: TN241 **文献标志码:** A **文章编号:** 10.3788/IRLA201645.1211002

Numerical simulation of laser propagation effects through subsonic transverse hemispherical/cylindrical flow fields

Guan Qi, Du Taijiao, Chen Zhihua, Yan Wei, Peng Guoliang

(Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, China)

Abstract: Compressible large-eddy simulations were carried out to study the aero-optical effects caused by the flow field of a transverse hemispherical/cylindrical structure at Mach numbers of $Ma=0.5-0.7$. Statistic results of density and optical path difference were calculated from the density field, and the laser characteristics in far field were computed based on the phase screen method. It is found that the root-mean-square of density distortion and the root-mean-square of optical path difference increase with free stream velocity and aperture size. The one hand, with Mach number varying from 0.5 to 0.7, the root-mean-square of density distortion gain 90 percent when the aperture diameter is fixed to 0.5m, and the root-mean-square of optical path difference gain 90 percent when the aperture diameter is fixed to 0.25 m. On the other hand, with the free stream velocity fixed to 0.6, the two parameters gain 4 times respectively when aperture diameter increases from 0.25 m to 0.75 m. The laser Strehl Ratio decreases with free stream velocity and aperture size. It decreases from 0.236 to 0.045 when Mach number varies from 0.5 to 0.7 with aperture diameter fixed to 0.25 m, and it reduces 90 percent when aperture diameter increases from 0.25 to 0.75 m at $0.6 Ma$.

Key words: laser propagation; aero-optical effect; free stream velocity

收稿日期:2016-04-05; 修订日期:2016-05-15

作者简介:关奇(1989-),女,助理工程师,硕士,主要从事激光大气传输和气动光学效应方面的研究。Email:guanqi@nint.ac.cn

0 引言

高速运动的物体周围会产生复杂流场,流场中密度扰动会引起折射指数的改变,进而使其中传输的光波产生附加的相位畸变,影响激光的传输特性,这种效应叫做气动光学效应^[1]。气动光学研究对高速飞行器实现光学成像精确探测、机载光电成像系统实现精密跟踪技术发展具有十分重要的作用。

采用数值模拟方法研究气动光学效应,首先要采用计算流体力学方法对流场进行模拟,然后根据流场信息构造气动光学相位屏,再进一步研究其对激光传输的影响。近几年发展并逐步完善的大涡模拟(Large Eddy Simulation, LES)方法^[1]能以较低的计算资源获得足够多的与光学畸变相关的湍流信息,因此,成为研究气动流场的主要数值模拟方法;激光传输数值模拟通常采用相位屏法^[2]。

球/柱形结构是机载激光结构中常见的一种, Gordeyev 等人开展了垂直放置的球/柱形结构流场气动光学效应的相关实验研究^[3-5],给出了流场中密度、压力等参数的测量结果以及 $Ma=0.4$, 发射孔径为 0.114 m 情况下,光程差空间均方根随发射角的变化情况,其中,光程差的测量结果常作为数值模拟结果的比对实验值;另外,美国圣母大学(University of Notre Dame)等多家单位共同参与的机载气动光学实验室(The Airborne Aero-Optics Laboratory, AAOL)项目,通过实验方法获得了通过垂直放置的球/柱形结构周围流场传输 50 m 后的远场光强分布,实验结果证实了球/柱形结构周围流场的气动光学效应对激光传输有很大影响^[6]。在数值模拟研究方面,一些学者对自由来流速度 $Ma=0.3\sim 0.5$ 时垂直放置的球/柱形结构,进行了气动流场的数值模拟、光程差变化及光程差统计分析方面的研究^[7-8];此外,还有对 $Ma=0.6\sim 0.9$ 情况下这一结构周围流场的气动光学效应对激光传输影响的数值模拟研究^[9]。横向球/柱形结构与垂直放置的球/柱形结构周围流场分布不同,对应两种不同的工况,目前,尚未见到对横向球/柱形结构周围流场气动光学效应的相关研究。文中采用数值模拟方法研究 $Ma=0.5\sim 0.7$ 情况下,横向球/柱形结构附近流场的气动光学效应,并通过远场光斑参数分

析气动光学效应对激光传输的影响,研究结果对激光相关应用具有重要意义。

1 气动流场的大涡模拟

横向球/柱形结构的气动流场计算模型如图 1 所示。结构左端是半径为 0.5 m 的半球,右端是半径 $R=0.5\text{ m}$ 、高 $H=0.5\text{ m}$ 的圆柱。球心为坐标原点,来流方向为 x_1 轴,圆柱底部与 y_1, z_1 平面平行。定义激光发射方向与负 x_1 轴的夹角为激光发射角,记为 θ 。文中的计算结果均为 $\theta=0^\circ$ 情况下的结果。

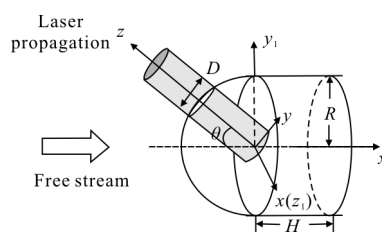


图1 仿真模型示意图

Fig.1 Schematic of simulation model

针对该模型采用 LES 方法,计算自由来流马赫数分别为 $0.5, 0.55, 0.6, 0.65$ 和 0.7 情况下其周围的流场分布。LES 方法中的亚格子模型,采用经过 Lilly^[10]修正后的 Smagorinsky 动力模型^[11],时间离散采用隐式方法,时间步长为 0.0001 s 。由于流场具有绕 x_1 轴的旋转对称性,故只需计算 $z_1=0$ 且 $y_1>0$ 平面内的流场分布情况。计算区域沿 x_1, y_1 两个方向分别为 $13\text{ m}\times 2\text{ m}$,网格数为 $72\ 710$ 。 $y_1=0$ 采用轴边界,球/柱形结构表面采用绝热无滑移壁面边界,另外三条边采用压力远场边界。

2 密度统计结果

获得全局坐标系下的密度数据 $\rho(x_1, y_1, z_1)$ 后,需将其转换为激光传输计算时的局地坐标系下的结果 $\rho(x, y, z)$,转换过程需要进行插值计算,插值方法采用反距离权重插值法。密度扰动定义为:

$$\rho'(x, y, z) = \rho(x, y, z) - \langle \rho(x, y, z) \rangle \quad (1)$$

式中: $\langle \cdot \rangle$ 表示对变量求 xy 平面内的平均值,密度扰动均方根记为 ρ'_{rms} 。由公式(1)可知是流场深度 z 的函数。

2.1 密度扰动均方根随流场深度的变化

文中计算了孔径 $D=0.5\text{ m}$ 情况下密度扰动均方

根 ρ'_{rms} 随流场深度 z 的变化,结果如图 2 所示。

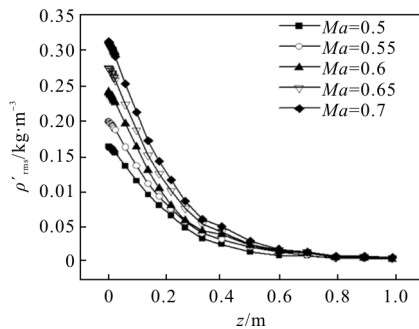


图 2 ρ'_{rms} 随流场深度的变化
Fig.2 ρ'_{rms} vs depth of flow area

图 2 结果显示横向球/柱形结构周围流场的 ρ'_{rms} 随 z 的增加而减小,文中将同一流速度的 ρ'_{rms} 与 z 之间按照公式(2)进行拟合:

$$\rho'_{rms} = A_1 e^{-\frac{z}{B_1}} \quad (2)$$

按照公式(2)进行拟合后,不同来流速度情况下各参数及其方差以及拟合评价参数的结果如表 1 所示,结果显示: Reduced χ^2 在 10^{-7} 量级, $R^2 > 0.995$, 每个拟合参数有三位有效数字,拟合效果较好。

参数 A_1 为球/柱形结构表面 ρ'_{rms} 的数值,量级为 $10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; B_1 表示 ρ'_{rms} 减小为 A_1 的 e^{-1} 时流场区域的深度,结果表明其与发射孔径同一量级。

表 1 不同来流速度时 ρ'_{rms} 与 z 关系拟合结果

Tab.1 Results of nonlinear fit between ρ'_{rms} and z at different free stream velocities

Ma	A_1	σ_{A_1}	B_1	σ_{B_1}	Reduced χ^2	R^2
0.5	0.016 9	0.000 1	0.226	0.005	1.23×10^{-7}	0.997 2
0.55	0.020 5	0.000 1	0.219	0.004	9.21×10^{-7}	0.998 6
0.6	0.024 9	0.000 2	0.207	0.004	2.18×10^{-7}	0.997 8
0.65	0.028 4	0.000 1	0.215	0.004	1.89×10^{-7}	0.998 5
0.7	0.032 1	0.000 2	0.217	0.004	2.19×10^{-7}	0.998 6

2.2 密度扰动均方根随来流速度的变化

来流速度的变化会引起球/柱形结构周围流场密度分布的变化,因此 ρ'_{rms} 将随来流速度的变化而变化。图 3 给出了 $D=0.5 \text{ m}$ 时,流场深度分别在 0.001、0.025 和 0.1 m 情况下, ρ'_{rms} 随来流速度的变化。结果表明:流场深度相同时, ρ'_{rms} 随来流速度的

增大而增大, $z=0.001 \text{ m}$ 处, Ma 从 0.5 增至 0.7 时, ρ'_{rms} 增长了 90%。

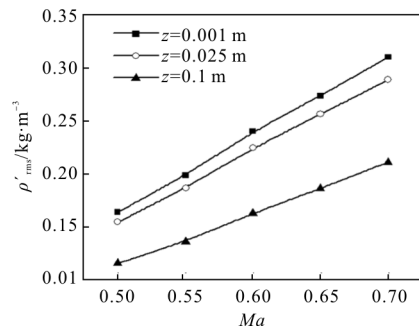


图 3 ρ'_{rms} 随来流马赫数的变化
Fig.3 ρ'_{rms} vs Ma

2.3 密度扰动均方根随孔径的变化

密度扰动均方根计算的是某一孔径范围内的结果,故 ρ'_{rms} 是孔径尺寸的函数。文中计算了来流马赫数分别为 0.5 和 0.6 情况下, ρ'_{rms} 在 $D=0.25 \sim 0.75 \text{ m}$ 范围内的数值,结果如图 4 所示: ρ'_{rms} 随孔径的增大而增大。孔径从 0.25m 增至 0.75m 时, ρ'_{rms} 增加了 4 倍。

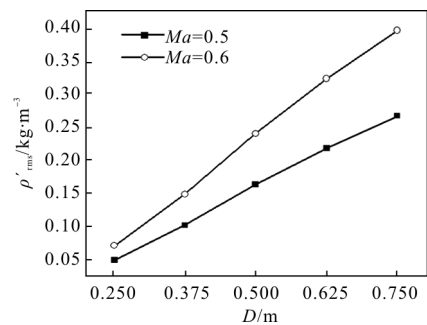


图 4 ρ'_{rms} 随孔径的变化
Fig.4 ρ'_{rms} vs D

3 光程差计算结果

光程差是密度扰动沿着传输路径的积分,其空间均方根可以反映流场对其中传输的光波的影响程度,是衡量气动光学效应的重要参数。

光程差可以按照公式(3)进行计算:

$$L_{OPD}(x,y) = K_{GD}(\lambda) \int_0^L \rho'(x,y,z) dz \quad (3)$$

式中: L 是流场区域的厚度; $K_{GD}(\lambda)$ 为 G-D 系数,是波长 λ 的函数。在近红外至中红外波段附近 $K_{GD}(\lambda)$ 随波长变化很小^[9],文中取 $K_{GD}(\lambda) = 2.24 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ 。

程差空间均方根记为 r_{OPD} ,由公式(3)可知,它是

流场区域厚度 L 的函数, 由于 $\rho'(x,y,z)$ 是孔径和来流速度的函数, 故 r_{OPD} 也是孔径和来流速度的函数。

3.1 光程差均方根随流场厚度的变化

文中计算了不同来流速度情况下, $D=0.5\text{ m}$ 孔径范围内光程差的空间均方根。图 5 给出了不同来流速度情况下 r_{OPD} 随流场厚度 L 的变化, 结果显示 r_{OPD} 随着流场厚度的增加而增大, 并且在 $L>0.5\text{ m}$ 后趋于稳定, 稳定值在 μm 量级。

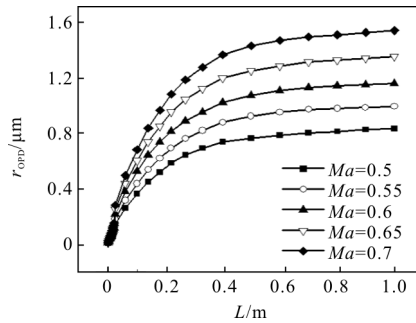


图 5 不同来流速度情况下 r_{OPD} 随流场厚度的变化

Fig.5 r_{OPD} vs thickness of flow area at different free stream velocities

由于 r_{OPD} 是 L_{OPD} 在 xy 平面内的空间均方根, 因此, 理论上 r_{OPD} 与满足如下关系:

$$r_{OPD}(x,y)=K_{GD}(\lambda) \int_0^L \rho'_{rms}(z)dz \quad (4)$$

结合公式(2)和公式(4)可知, 对同一来流速度情况下的 r_{OPD} 与流场厚度 L 可以按照公式(5)进行拟合:

$$r_{OPD}=C+A_2 e^{-\frac{L}{B_2}} \quad (5)$$

拟合公式(5)中, 参数 C 为 $L=\infty$ 情况下 r_{OPD} 的数值, 是气动光学光程差的理论值; 又由公式(4)可知, 同一来流速度情况下, 参数 B_1 与 B_2 在理论上是相等的, 且有 $C+A_2=0$ 。

表 2 给出了按照公式(5)进行拟合后, 各参数拟合结果。结果显示: Reduced χ^2 在 10^{-4} 量级, $R^2>0.995$, 每个拟合参数有三位有效数字; 从表 1 与表 2 的拟合结果来看, 参数 B_1 与 B_2 数值相差不大, 并且近似有 $C+A_2=0$, 故拟合效果较好。

采用数值模拟方法按照公式(3)计算光程差时,

表 2 不同来流速度时 ρ'_{rms} 与流场厚度 L 关系的拟合结果

Tab.2 Results of nonlinear fit between ρ'_{rms} and L at different free stream velocities

Ma	C	σ_C	A_2	σ_{A_2}	B_2	σ_{B_2}	Reduced χ^2	R^2
0.5	0.822	0.006	-0.823	0.006	0.174	0.004	1.49×10^{-4}	0.998 7
0.55	0.988	0.007	-0.987	0.008	0.178	0.005	2.28×10^{-4}	0.998 6
0.6	1.15	0.01	-1.14	0.01	0.173	0.005	4.12×10^{-4}	0.998 1
0.65	1.34	0.01	-1.34	0.01	0.174	0.005	4.44×10^{-4}	0.998 5
0.7	1.53	0.01	-1.52	0.01	0.175	0.005	5.49×10^{-4}	0.998 6

需要确定气动光学区域的厚度。文中定义气动光学区域厚度为: 满足光程差均方根的相对误差 ϵ_{OPD} ($\epsilon_{OPD}=|r_{OPD}-C|/C$) 小于 0.1% 时, 公式(5)中 L 的最小值。文中中横向球/柱形结构周围流场气动光学区域的厚度为 $L=1.5\text{ m}$ 。后文中的均为按照公式(3)计算, 积分上限为 $L=1.5\text{ m}$ 的结果。

3.2 来流速度对气动光学效应的影响

为便于分析, 通常将光程差展开成 Zernike 多项式的和:

$$L_{OPD}(x',y')=A+[B(2x')+C(2y')]+L_{OPD}^{\text{high-order}}(x',y') \quad (6)$$

式中: x' 和 y' 是归一化的局域坐标, 其值与 x 和 y 只相差一个比例常数; A 是活塞项, 为 $L_{OPD}(x',y')$

在 $x'y'$ 平面内的平均值; $[B(2x')+C(2y')]$ 是倾斜项, 影响传输到远场的激光光束整体倾斜; 高阶项 $L_{OPD}^{\text{high-order}}(x',y')$ 影响激光远场光斑形状和功率密度分布。

文中主要研究气动光学效应对激光远场光斑峰值功率密度的影响, 因此, 下文考虑高阶项气动光学光程差 $L_{OPD}^{\text{high-order}}(x',y')$ 及其空间均方根 r_{OPD}^h 随各参数的变化情况, 以此来研究不同参数情况下气动光学效应的强弱。

图 6 给出了发射孔径 $D=0.25\text{ m}$ 情况下, r_{OPD}^h 随来流速度的变化情况, 结果表明: $D=0.25\text{ m}$ 时, r_{OPD}^h 在 $10^{-1}\mu\text{m}$ 量级, 并且来流速度越大, r_{OPD}^h 越大, 即气

动光学效应随来流速度的增大而增强。 Ma 从 0.5 增至 0.7 时, r_{OPD}^h 增加了 90%。

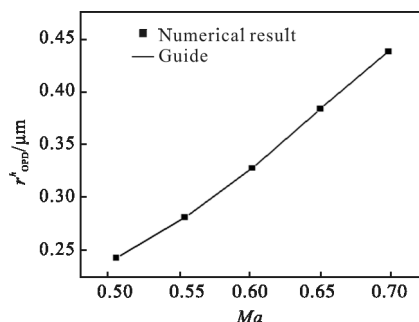


图 6 r_{OPD}^h 随 Ma 变化

Fig.6 r_{OPD}^h vs Ma

3.3 发射孔径对气动光学效应的影响

由 2.3 节内容可知, ρ'_{rms} 随孔径的增大而增大, 又由公式(4)可知, r_{OPD}^h 是发射孔径的函数。图 7 给出了 Ma 分别为 0.5 和 0.6 情况下, r_{OPD}^h 随发射孔径的变化情况。结果表明: r_{OPD}^h 随发射孔径增大而增大。孔径从 0.25 m 增至 0.75 m 时, r_{OPD}^h 增加了 4 倍。

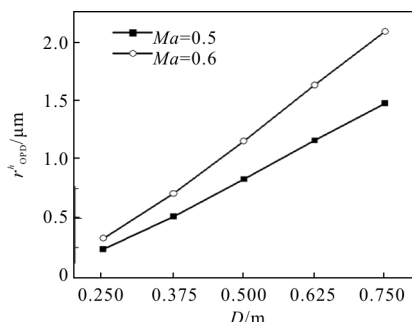


图 7 r_{OPD}^h 随 D 变化

Fig.7 r_{OPD}^h vs D

3.4 光程差结果验证

为了验证光程差计算的正确性, 文中数值求解了垂直放置的球/柱形结构周围流场及光程差, 给出了 r_{OPD}^h 随发射角的变化情况, 并与 Gordeyev 等人的两种探测器的实验测量结果^[3]进行了对比, 见图 8。结果表明: 文中的数值模拟结果与波前探测器的测量结果(图 8 中 WFS 曲线)量级相同, 并且 r_{OPD}^h 随发射角的变化趋势也与波前探测器结果一致; Gordeyev 指出 Malley 探测器结果偏低, 文中数值模拟结果优于 Malley 探测器的结果(图 8 中 Malley 曲线), 从而验证了光程差计算的正确性。

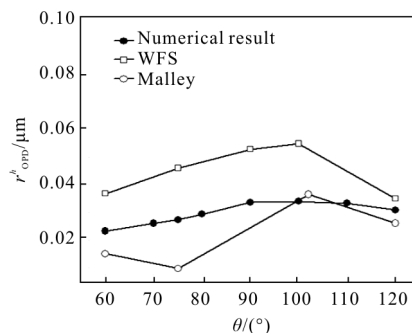


图 8 r_{OPD}^h 随 θ 变化

Fig.8 r_{OPD}^h vs θ

4 气动光学效应对激光传输的影响

气动光学效应引起的附加相位可以由公式(7)计算:

$$\phi(x,y) = \frac{2\pi}{\lambda} L_{OPD}^{\text{high-order}}(x,y) \quad (7)$$

模拟计算时, 假设激光从球头发射, 激光光源为截断高斯, 激光波长 $\lambda=1.315 \mu\text{m}$, 传输距离为 20 km。研究气动光学效应对激光传输的影响时, 将上述气动相位加载到激光传输出口, 激光真空传输 20 km 后, 通过光斑峰值功率密度的变化分析气动光学效应对激光传输的影响。

4.1 传输结果验证

评估气动光学效应对远场激光参数影响通常使用 Strehl 比 R_S , 在相位不是太大的情况下, R_S 与 $\phi(x,y)$ 的空间均方根 $\phi(x,y)$ 具有以下关系^[12-13]:

$$\frac{I}{I_0} = R_S \approx \exp(-\phi_{rms}^2) \quad (8)$$

式中: I 为气动光学效应作用下激光远场瞬时峰值功率密度; I_0 为激光真空传输到远场的瞬时峰值功率密度。为了验证传输计算结果的正确性, 文中计算给出了 $Ma=0.5 \sim 0.7$, $D=0.25 \text{ m}$ 、 0.5 m 和 0.75 m , 发射角 $\theta=0^\circ \sim 60^\circ$ 情况下的激光传输出口的 ϕ_{rms} 及其对应的远场 R_S 。图 9 给出了理论曲线和数值模拟结果。

图 9 结果表明, 在 $\phi_{rms} < 2.0 \text{ rads}$ 情况下, 数值模拟计算得到的 ϕ_{rms} 与远场 R_S 的关系近似满足理论公式(8)。

通过第 3 节内容的分析, 得知, r_{OPD}^h 随着来流速度和孔径的变化而变化, 由公式(8)可知, 气动光学效应对激光传输的影响也将受到这两个参数的影响。

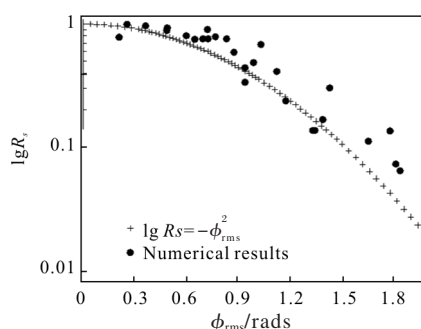


图 9 $\lg R_s$ 与 ϕ_{rms} 的关系

Fig.9 $\lg R_s$ vs ϕ_{rms}

4.2 不同来流速度情况下气动光学效应对激光传输的影响

图 10 给出了 $D=0.25\text{ m}$ 情况下, R_s 随来流速度的变化情况, 结果表明: $R_s < 0.25$, 气动光学效应严重减弱了激光远场峰值功率密度, 并且来流速度越大, R_s 越小, 随着 Ma 从 0.5 增至 0.7, R_s 从 0.236 下降到 0.045。综上, 气动光学效应对激光传输有很大影响, 并且这种影响随着来流速度的增加而增强。

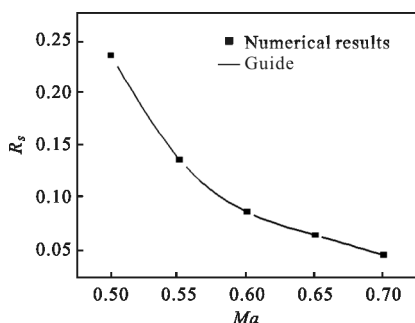


图 10 R_s 随 Ma 变化

Fig.10 R_s vs Ma

4.3 不同发射孔径情况下气动光学效应对激光传输的影响

文中计算了 $Ma=0.5$ 和 0.6 情况下, 发射孔径在 $0.25\sim 0.75\text{ m}$ 范围内的 R_s , 结果如图 11 所示。结果显

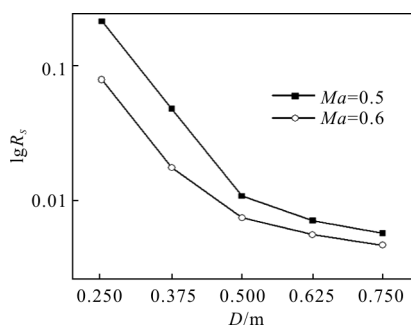


图 11 $\lg R_s$ 随 D 变化

Fig.11 $\lg R_s$ vs D

示 R_s 随发射孔径的增大而减小, 并且 $D=0.75\text{ m}$ 与 $D=0.25\text{ m}$ 对应的 R_s 之比小于 0.1。因此, 发射孔径越大, 气动光学效应对激光传输的影响越大。

5 结论

文中首先采用大涡模拟方法计算了自由来流马赫数 $Ma=0.5, 0.55, 0.6, 0.65$ 和 0.7 情况下, 横向球/柱形结构周围的气动流场, 流场结果表明: 密度扰动均方根在球/柱形表面附近达到最大值, 最大值在 $10^{-2}\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 量级; 且密度扰动均方根随流场深度增加而减小, 随来流速度和孔径的增大而增大。其次, 计算了气动光学光程差和表征气动光学效应强弱的参数, 气动光学光程差空间均方根, 结果表明, 发射孔径为 0.5 m 情况下, 光程差空间均方根在微米量级, 气动光学效应随来流速度和发射孔径的增大而增强; 发射孔径为 0.25 m 情况下, Ma 从 0.5 增至 0.7 时, r_{OPD}^h 增加了 90%; $Ma=0.5, 0.6$ 情况下, 孔径从 0.25 m 增至 0.75 m 时, r_{OPD}^h 增加了 4 倍。最后, 采用相位屏法计算了激光 Strehl 比 R_s , 结果表明: 气动光学效应对激光传输有很大影响, 并且 R_s 随来流速度和发射孔径的增大而减小, 即气动光学效应对激光传输的影响随着来流速度和发射孔径的增大而增强; $Ma=0.5, 0.6$ 时, $D=0.75\text{ m}$ 与 $D=0.25\text{ m}$ 对应的 R_s 之比小于 0.1。

参考文献:

- [1] Wang M, Mani A, Gordeyev S. Physics computation of aero-optics[J]. *Annu Rev Fluid Mech*, 2012, 44(1): 299-321.
- [2] Fleck J A, Morris J R, Feit M D. Time-dependent propagation of a high energy laser beam through the atmosphere [J]. *Applied Physics*, 1976, 10(2): 129-160.
- [3] Gordeyev S, Martiqua L P, Thomas M, et al. Aero-optical environment around a conformal-window turret [J]. *AIAA*, 2007, 45(7): 1514-1524.
- [4] Gordeyev S, Jumper E, Vukasinovic B, et al. Hybrid flow control of a turret wake, part II :aero-optical effects[C]//48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 2010, 0438: 1-17.
- [5] Gordeyev S, Jumper E. Fluid dynamics and aero-optics of turrets [J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2010, 46 (8): 388-400.

- [6] Jumper E, Zenk M A, Gordeyev S, et al. Airborne aero-optics laboratory [J]. *Optical Engineering*, 2013, 52 (7): 071408-1-11.
- [7] Arunajatesan S, Sinha N. Analysis of line of sight effects in distortions of laser beams propagating through a turbulent turret flow field[C]//43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2005, 1081: 1-10.
- [8] Ladd J, Mani M, Bower W. Validation of aerodynamic and optical computations for the flow about a cylindrical/hemispherical turret [C]//27th AIAA Applied Aerodynamics Conference, 2009, 4118: 1-9.
- [9] Guan Qi, Chen Zhihua, Du Taijiao, et al. Numerical simulation of aero-optical effects of a laser beam propagating through a subsonic hemispherical/cylindrical flow field [J]. *Modern Applied Physics*, 2015, 6 (1): 32-36. (in Chinese)
- 关奇, 陈志华, 杜太焦, 等. 亚声速球/柱流场对激光传输影响的数值模拟[J]. *现代应用物理*, 2015, 6(1): 32-36.
- [10] Lilly D K. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method [J]. *Physics of Fluids*, 1992, 4 (3): 633-635.
- [11] Moin P, Squires K, Cabot W, et al. A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport [J]. *Physics of Fluids*, 1991, 3(11): 2746-2757.
- [12] Mahajan V N. Strehl ratio for primary aberrations: some analytical results for circular and annular pupils [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1982, 72(9): 1258-1266.
- [13] Mahajan V N. Strehl ratio for primary aberrations in terms of their aberration variance [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1983, 73(6): 860-861.