

非 Kolmogorov 大气湍流随机相位屏模拟

李玉杰, 朱文越, 饶瑞中

(中国科学院安徽光学精密机械研究所 大气成分与光学重点实验室, 安徽 合肥 230031)

摘要: 介绍了功率谱法、Zernike 多项式法、分形法模拟生成非 Kolmogorov 湍流相位屏的过程, 并利用这三种方法对符合非 Kolmogorov 统计特征的大气湍流相位屏进行了模拟。将不同方法得到的相位屏的相位结构函数与理论结构函数进行对比, 分析了三种相位屏模拟方法的准确性和模拟速度。结果表明: 添加次谐波和增加 Zernike 多项式阶数分别可以弥补功率谱法和 Zernike 多项式法生成的相位屏低频和高频不足的缺点, 但导致模拟效率下降; 分形法生成的湍流相位屏高频和低频都较为充足, 且模拟效率较高; 随着非 Kolmogorov 湍流谱幂率的增加, 功率谱法所需要的次谐波级数增加, Zernike 多项式法所需要的 Zernike 多项式的阶数减少, 分形法生成的相位屏的精度更高。

关键词: 数值模拟; 大气湍流; 光传播; 相位屏

中图分类号: O439; P401 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201645.1211001

Simulation of random phase screen of non-Kolmogorov atmospheric turbulence

Li Yujie, Zhu Wenyue, Rao Ruizhong

(Key Laboratory of Atmospheric Composition and Optical Radiation, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China)

Abstract: The methods of power spectrum, Zernike polynomial and Fractal used to generate atmospheric phase screens with the non-Kolmogorov statistics were introduced. Based on the three methods, non-Kolmogorov turbulent phase screens were simulated. Phase structure functions were calculated and compared with the theoretical results. In addition, the accuracy and efficiency of different methods were also analyzed. It shows that phase screen created by FFT method has the drawback of lacking low frequency, by adding subharmonics the phase screen can be compensated which also leading to the decreasing of simulation efficiency; phase screen created by Zernike polynomial method has the drawback of lacking high frequency, by using much more orders of Zernike polynomials the phase screen can be compensated which also leading to the decreasing of simulation efficiency; phase screen created by Fractal method is relatively good at both low and high frequency and the simulation efficiency is also high. In addition, the number of subharmonics and the order of Zernike polynomials under same condition of accuracy are related to the power law of non-Kolmogorov turbulent spectrum. As the spectral power law increases, the number of subharmonics increase and the order of Zernike polynomials decrease, and phase screens created by fractal method are more accurate.

Key words: numerical simulation; atmospheric turbulence; optical wave propagation; phase screen

收稿日期: 2016-04-24; 修订日期: 2016-05-15

基金项目: 国家 863 计划

作者简介: 李玉杰(1990-), 女, 博士, 主要从事激光大气传输数值模拟方面的研究工作。Email: liyjie1017@126.com

通讯作者: 朱文越(1976-), 男, 研究员, 主要从事大气光学特性、激光大气传输等方面的研究工作。Email: zhuwenyue@aiofm.ac.cn

0 引言

大气始终处于湍流状态, 大气温度的微弱起伏引起大气密度的变化, 从而引起大气折射率的随机起伏。当光在大气中传播时, 折射率的随机起伏将导致光波的波前发生畸变, 相干性下降, 产生一些光学湍流效应比如: 光斑漂移, 光束扩展, 光强闪烁, 能量衰减等^[1]。给光通信, 光学遥感, 光学测距以及成像等工程应用带来严重的困扰。数值模拟被广泛应用于湍流大气中的光传播研究中^[2-3], 数值模拟的核心是生成合适的相位屏从而代替光传播路径上湍流引起的光波的相位起伏。相位屏生成方法已被较多的研究, 其中最常用的方法有三种: 功率谱法又称为傅里叶变换法(FFT)^[4], 泽尼克多项式法(Zernike)^[5-6], 分形法 (Fractal)^[7]。这几种方法被广泛应用于 Kolmogorov 湍流相位屏的生成中。然而, 随着研究的深入, 人们发现, 实际大气大部分偏离了 Kolmogorov 湍流统计特征, 主要表现为: 惯性区内湍流不再具有各向同性特征, 一维温度谱的标度指数不再是 Kolmogorov 湍流时的 $-5/3$ 而是在 $-5/3$ 附近随机起伏^[8-9]。相应的, 将偏离 Kolmogorov 湍流统计特征的这部分湍流统称为非 Kolmogorov 湍流。

因此, 在非 Kolmogorov 湍流大气中的光传播研究中不仅要考虑湍流的各向异性还要考虑传播路径上湍流谱的变化问题, 因此, 数值模拟成为非 Kolmogorov 湍流大气中光传播研究的必要手段^[10]。对非 Kolmogorov 湍流相位屏的模拟仍要作进一步研究。

文中基于非 Kolmogorov 湍流结构函数和折射率起伏谱, 用功率谱法, Zernike 多项式法以及分形法分别模拟了非 Kolmogorov 湍流相位屏, 并用结构函数对每一种方法下的模拟结果与理论结果进行了对比。分析了三种方法生成非 Kolmogorov 湍流相位屏的准确度和模拟效率。

1 相位屏生成方法

湍流大气中光传播的数值模拟从光的传播方程出发, 采用多层相位屏代替连续的随机介质。假设光沿着 z 方向传播, 若光场表示为 $E=ue^{ikz}$, 则傍轴近似条件下, 随机介质中的光传播满足抛物线方程^[11]:

$$2ik \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2k^2 n_1 u = 0 \quad (1)$$

式中: $k=2\pi/\lambda$, λ 为光波的波长; n_1 为折射率起伏量。

多层相位屏模拟湍流大气中的光传播是将连续随机介质用一系列间隔为 Δz 的相位屏来代替, 光波经多层相位屏相位调制最终到达接收平面, $\Delta z=z_i-z_{i-1}$, z_{i-1} 表示第 $i-1$ 个相位屏的位置, z_i 表示第 i 个相位屏的位置, 第 i 个相位屏上的光场表示为^[12]:

$$u(x, y, z_i) = F^{-1} \left\{ \exp \left[-\frac{j\Delta z}{2k} (\kappa_x^2 + \kappa_y^2) \right] \cdot F \left[e^{j\phi(r, z_{i-1})} E(r, z_{i-1}) \right] \right\} \quad (2)$$

式中: $u(r, z_{i-1})$ 为第 $i-1$ 个相位屏上的光场; $\phi(r, z_{i-1})$ 为第 $i-1$ 个相位屏上的相位分布, $r=\sqrt{x^2+y^2}$; κ_x 和 κ_y 分别为相位空间波数, 单位为 rad/m, 与湍流的尺度有关; F 表示傅里叶变换; F^{-1} 表示傅里叶逆变换。数值模拟中最重要的问题是, 生成合适的相位屏从而代替光传播路径上湍流引起的光波的相位起伏。下面将介绍几种模拟湍流相位屏的方法。

1.1 功率谱法

目前常用的构造相位屏的方法是利用湍流折射率谱和复高斯随机数矩阵产生相空间复随机场, 然后进行逆傅里叶变换获得二维相位的空间分布, 该方法称为功率谱法, 又称为傅里叶变换法(FFT)^[4]。相位屏生成过程如下:

相位功率谱 $\Phi_\phi(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, z)$ 可以表示为折射率谱 $\Phi_n(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, z)$ 的函数, 当光沿着 z 方向传播时, 垂直于传播方向的平面内 $\kappa_z=0$, 两者之间的关系表示为:

$$\Phi_\phi(\kappa_x, \kappa_y, z) = 2\pi k^2 \Delta z \Phi_n(\kappa_x, \kappa_y, z) \quad (3)$$

对于非 Kolmogorov 湍流, 不考虑内外尺度的三维折射率谱模型表示为^[13]:

$$\Phi_n(\alpha, \kappa) = A(\alpha) \tilde{C}_n^2 \kappa^{-\alpha}, 1/L_0 \leq \kappa \leq 1/l_0 \quad (4)$$

式中: $\kappa=\sqrt{x^2+y^2}$; α 为三维谱幂率, 为保证波结构函数的连续性, α 的取值限制在 $3<\alpha<4$ 之间; \tilde{C}_n^2 为非 Kolmogorov 折射率结构常数, 通常称为广义折射率结构常数, 单位为 $m^{3-\alpha}$; $A(\alpha)$ 为一致性函数, 其作用就是对一定范围内的标度指数 α , 使湍流结构函数和其功率谱间可以进行互换; L_0 为湍流外尺度; l_0 为湍流内尺度。 $A(\alpha)$ 表示为^[13]:

$$A(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha-1)}{4\pi^2} \cos \left[\frac{\alpha\pi}{2} \right], 3<\alpha<5 \quad (5)$$

式中： $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数，当 $\alpha \rightarrow 3$ 时， $A(\alpha) \rightarrow 0$ ， $\Phi_n(\alpha, \kappa) \rightarrow 0$ ，此时湍流不存在。当 $\alpha=11/3$ 时， $A(\alpha)=0.033$ ， $\tilde{C}_n^2=C_n^2$ ，单位为 $\text{m}^{-2/3}$ 。公式(4)表示的非 Kolmogorov 谱转化为 Kolmogorov 谱^[11]：

$$\Phi_n(\kappa)=0.033C_n^2\kappa^{-11/3}, 1/L_0 \leq \kappa \leq 1/l_0 \quad (6)$$

用一组复高斯随机数 a_R 对相位功率谱进行滤波，可以得到相空间的一个二维频域复随机相位场 $\tilde{\phi}(\kappa_x, \kappa_y)$ ^[12]：

$$\tilde{\phi}(\kappa_x, \kappa_y)=a_R \sqrt{\Phi_\phi(\kappa_x, \kappa_y, z)} \quad (7)$$

$$a_R=A_R+iB_R \quad (8)$$

式中： A_R, B_R 是实部和虚部均值皆为 0、方差为 1 的高斯随机数。对二维频域复随机场进行傅里叶逆变换，可以得到一个二维空间复随机相位场 $\phi(x, y)$ ：

$$\phi(x, y)=\iint a_R \sqrt{\Phi_\phi(\kappa_x, \kappa_y)} e^{i(\kappa_x x + \kappa_y y)} d\kappa_x d\kappa_y \quad (9)$$

其离散形式表示为：

$$\begin{aligned} \phi(j\Delta x, l\Delta y) &= \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_y} (A_R+iB_R) \sqrt{\Delta\kappa_x \Delta\kappa_y} \cdot \\ &\sqrt{2\pi k^2 \Delta z \Phi_n(m\Delta\kappa_x, n\Delta\kappa_y)} \cdot \\ &\exp\left(2\pi i \left(\frac{jm}{N_x} + \frac{ln}{N_y}\right)\right) \end{aligned} \quad (10)$$

式中： $\kappa_x=m\Delta\kappa_x, \kappa_y=n\Delta\kappa_y, \Delta\kappa_x=2\pi/D_x$ 和 $\Delta\kappa_y=2\pi/D_y$ 分别为 x 方向和 y 方向频率间隔， $D_x=N_x\Delta x$ 和 $D_y=N_y\Delta y$ 分别为相位屏两个方向上的长度； N_x 和 N_y 分别为两个方向上的网格数； Δx 和 Δy 分别为两个方向上的网格间距。

傅里叶变换模拟湍流相位屏的方法虽然简单，但生成的相位屏具有低频不足的缺点。这是因为该方法生成的相位屏的最小频率为 $\Delta\kappa_x$ ，而不包含 $(-\Delta\kappa_x/2, \Delta\kappa_x/2)$ 和 $(-\Delta\kappa_y/2, \Delta\kappa_y/2)$ 这部分频率的贡献，从而造成相位屏低频不足。Lane^[14]等提出了一种增加次谐波的方法能够对 FFT 法生成的相位屏的低频进行补偿，该方法生成的次谐波表示为：

$$\begin{aligned} \phi_{sp}(j\Delta x, l\Delta y) &= \sum_{p=1}^{N_x} \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 (A_R+iB_R) \sqrt{\Delta\kappa_x \Delta\kappa_y} \cdot \\ &\sqrt{2\pi k^2 \Delta z \Phi_n(m\Delta\kappa_x, n\Delta\kappa_y)} \cdot \\ &\exp\left(2\pi i \left(\frac{jm}{3^p N_x} + \frac{ln}{3^p N_y}\right)\right) \end{aligned} \quad (11)$$

式中： p 为次谐波级数，次谐波频率间隔分别为 $\Delta\kappa_{xp}=\Delta\kappa_x/3^p$ 和 $\Delta\kappa_{yp}=\Delta\kappa_y/3^p$ 。将公式(10)和(11)相加即

为经次谐波补偿后的相位屏相位，这种方法生成的相位屏包含更多的低频信息，从而能够改善相位屏模拟大尺度的统计特征。

模拟长和宽均为 1 m 的方形相位屏，网格点数为 512×512，且 $\Delta x=\Delta y$ ，大气相干长度 r_0 为 0.1 m，图 1(a)和(b)分别为非 Kolmogorov 湍流谱幂率为 3.9 时，未加次谐波和加 13 级次谐波后的相位屏，从图中可以看出加 13 级次谐波以后，图像更为平滑，表明相位屏的大尺度信息更充分，即低频更加充足。

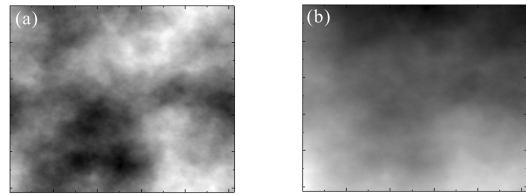


图 1 谱幂率等于 3.9 时，功率谱法得到的非 Kolmogorov 湍流相位屏，(a)未加次谐波时的相位屏，(b)加 13 级次谐波后的相位屏

Fig.1 Non-Kolmogorov phase screens created by using turbulent spectrum method with a spectral power law 3.9, (a)without subharmonic, (b)with 13 orders of subharmonic

1.2 Zernike 多项式法

Zernike 多项式法常被应用于自适应光学系统中。大气湍流导致光波的波前畸变，畸变波前可以分解为圆域内正交的 Zernike 多项式^[5]：

$$\phi(r)=\sum_{j=1}^{\infty} a_j Z_j(r) \quad (12)$$

式中： $(Z_j, j=1, 2, 3 \dots \infty)$ 为 Zernike 多项式的第 j 项； a_j 为 Zernike 多项式第 j 项的系数。

圆域内正交的 Zernike 多项式可以表示为径向和角向量的函数形式，一般用极坐标 (ρ, θ) 来表示^[5]：

$$Z_j(r, \theta)=Z_n^m(r, \theta)=\sqrt{(n+1)} R_n^m(r) G^m(\theta) \quad (13)$$

式中： m 和 n 都是非负整数，且 $m \leq n$ 。径向向量 $R_n^m(r)$ 和角向量 $G^m(\theta)$ 分别为^[5]：

$$R_n^m(r)=\sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2}-s\right)! \left(\frac{n-m}{2}-s\right)!} r^{n-2s} \quad (14)$$

$$G^m(\theta)=\begin{cases} \sqrt{2} \sin(m\theta) & m \neq 0, \text{ odd } j \\ \sqrt{2} \cos(m\theta) & m \neq 0, \text{ even } j \\ 1 & m = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Zernike 多项式任意两项的系数 a_j 与 a_j' 的协方

差为^[5]:

$$\langle a_i a_j' \rangle = \iint df df' Q_j(f) \Phi_\phi(2f/D, 2f'/D) Q_j(f') \quad (16)$$

式中: f 为光波空间频率。 $Q_j(f)$ 为 Zernike 多项式的傅里叶变换:

$$Q_j(f) = \iint \rho d\rho d\theta Z_j(\rho, \theta) e^{-i2\pi f \rho} \quad (17)$$

将 Zernike 多项式(13)代入(17)得:

$$Q_j(f, \Phi) = \sqrt{n+1} \frac{J_{n+1}(2\pi f)}{\pi f} \cdot \begin{cases} (-1)^{(n-m)/2} \sqrt{2} \cos(n\varphi), m \neq 0, \text{even } j \\ (-1)^{(n-m)/2} \sqrt{2} \sin(m\varphi), m \neq 0, \text{odd } j \\ (-1)^{m/2}, m=0 \end{cases} \quad (18)$$

式中: $J_l(x)$ 表示第一类第 l 阶贝塞尔函数。

$\Phi_\phi(2f/D, 2f'/D)$ 为频率归一化的波前相位功率谱, D 为光束的口径,光波在非 Kolmogorov 湍流大气中传播时,相位功率谱表示为^[13]:

$$\Phi_\phi(f) = (2\pi)^{-2\alpha} B(\alpha) c_1(\alpha) r_0^{2-\alpha} f^{-\alpha} \quad (19)$$

则频率归一化的相位功率谱表示为:

$$\Phi_\phi\left(\frac{2f}{D}, \frac{2f'}{D}\right) = (4\pi)^{-2\alpha} B(\alpha) c_1(\alpha) \left(\frac{D}{r_0}\right)^{\alpha-2} f^{-\alpha} \quad (20)$$

式中: r_0 和 α 与上面意义相同。

$$c_1(\alpha) = 2 \left(\frac{8}{\alpha-2} \Gamma\left[\frac{2}{\alpha-2}\right] \right)^{(\alpha-2)/2} \quad (21)$$

$$B(\alpha) = \frac{\Gamma[\alpha/2]}{2^{2-\alpha} \pi \alpha \Gamma[-\alpha/2]} \quad (22)$$

将公式(18)和(20)代入公式(16),经积分变换得到 Zernike 多项式的系数协方差矩阵:

$$\langle a_i a_j' \rangle = B(\alpha) c_1(\alpha) 2^{5-2\alpha} \pi^{1-\alpha} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{\alpha-2} \cdot ((n+1)(n'+1))^{1/2} (-1)^{(n+n'-2m)/2} \delta_{nm} I_{mm'} \quad (23)$$

其中

$$I_{mm'} = \int f^{-(1+\alpha)} J_{n+1}(2\pi f) J_{n'+1}(2\pi f) df = \frac{\Gamma[(n+n'-\alpha+2)/2]}{\Gamma[(n-n'+\alpha+2)/2] \Gamma[(n'-n+\alpha+2)/2]} \cdot \frac{\pi^\alpha \Gamma[\alpha+1]}{2\Gamma[(n+n'+\alpha+4)/2]} \quad (24)$$

系数协方差组成的矩阵 C_a 为实对称正定矩阵,因此可以对其进行奇异值分解,获得两个矩阵^[5]:

$$C_a = X \cdot S \cdot X^T \quad (25)$$

式中: S 为对角矩阵; X 为单位矩阵,其转置与逆相同, $X = X^{-1} = X^T$ 。

存在一个矩阵 B ,其元素 $\{b_i, i=1, 2, 3, \dots, \infty\}$ 是均值为 0,方差由对角矩阵决定的高斯随机变量,满足以下关系^[5]:

$$A = X \cdot B \quad (26)$$

式中: A 为 Zernike 系数向量,其元素为 $\{a_j, j=1, 2, 3, \dots, \infty\}$ 。将上式代入公式(12),则畸变波前可以表示为:

$$\phi(r) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_i X_{ij} z_j(r) \quad (27)$$

图 2 (a) 和 (b) 为 Zernike 多项式法模拟的非 Kolmogorov 湍流相位屏,模拟参数为:口径为 1 m,网格点数为 512×512,横向和纵向网格间距相等 $\Delta x = \Delta y$,大气相干长度 r_0 为 0.1 m。从图中可以看出,当湍流谱幂率为 3.1 时,299 阶多项式模拟产生的相位屏相对于 9 阶多项式产生的相位屏图像不再那么平滑,即包含了更多的小尺度成分,高频信息更加突出。

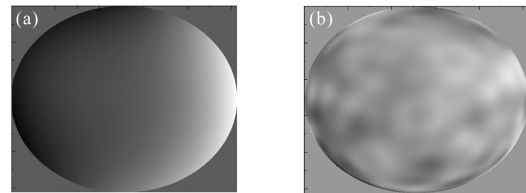


图 2 谱幂率为 3.9 时,Zernike 多项式法生成的非 Kolmogorov 湍流相位屏,(a)9 阶多项式,(b)299 阶多项式

Fig.2 Non-Kolmogorov phase screens created using Zernike polynomials method with a spectral power law 3.9, (a)with 9 orders, (b)with 299 orders

1.3 分形法

湍流引起的畸变波前是一个分形面,因此可以用分形布朗运动来模拟大气湍流畸变波前。分形法模拟相位屏是利用相位结构函数,通过插值得到相位屏上每一个点的相位值,具体生成相位屏的过程如下:

非 Kolmogorov 湍流相位结构函数表示为^[13]:

$$D_\phi(r) = c_1(\alpha) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha-2} \quad (28)$$

式中: $c_1(\alpha)$ 的表达式与(20)式中的相同, r_0 为大气相干长度, $r_0 = \left(\frac{c_1(\alpha) \Gamma[\alpha/2]}{-2^{4-\alpha} \pi^2 k^2 A(\alpha) \Gamma[(2-\alpha)/2] \tilde{C}_n^2 L} \right)^{1/(\alpha-2)}$,当 $\alpha = 11/3$ 时, $c_1(11/3) = 6.88$, $r_0 = (0.423 k^2 C_n^2 L)^{-5/3}$,非 Kolmogorov 湍流相位结构函数转化为 Kolmogorov 湍流相位结构函数:

$$D_\phi(r) = 6.88 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{5/3} \quad (29)$$

若要生成一个长宽均为 D_0 的方形相位屏, 网格数为 $2^N \times 2^N$, 需要进行 N 次插值。首先由相位结构函数生成方形相位屏的四个顶点的值 A_1, A_2, A_3, A_4 [7]:

$$\begin{cases} A_1=R^a+R^b+R^c \\ A_2=R^a+R^b-R^c \\ A_3=R^a-R^b-R^c \\ A_4=R^a-R^b+R^c \end{cases} \quad (30)$$

式中: R^a 是均值为 0, 方差为 δ_a^2 的高斯随机量; R^b, R^c 是均值为 0, 方差分别为 δ_b^2, δ_c^2 的高斯随机量, 其中 $\delta_a^2, \delta_b^2, \delta_c^2$ 为相位结构函数的函数, 表示为:

$$\delta_a^2=[2*c_1(D_0/r_0)^{\alpha-2}-c_1(\sqrt{2} D_0/r_0)^{\alpha-2}]/2 \quad (31)$$

$$\delta_b^2=\delta_c^2=[c_1(\sqrt{2} D_0/r_0)^{\alpha-2}-c_1(D_0/r_0)^{\alpha-2}]/4 \quad (32)$$

然后再由初始的四个顶点求这 4 个顶点组成的方格的中心点 O 和每条边的中点 B_1, B_2, B_3, B_4 的值, O 点的值为 4 个顶点值的平均再加上一个高斯随机量, 中点的值为相邻两个顶点值的平均再加上一个高斯随机量分别表示为 [7]:

$$\begin{cases} O=(A_1+A_2+A_3+A_4)/4+\Delta_0 \\ B_1=(A_1+A_2)/2+\Delta_1 \\ B_2=(A_2+A_3)/2+\Delta_2 \\ B_3=(A_3+A_4)/2+\Delta_3 \\ B_4=(A_1+A_4)/2+\Delta_4 \end{cases} \quad (33)$$

式中: 高斯随机量 Δ_0 的均值为 0, 方差为 $c_1(2^{2-\alpha}-0.25)(D_1/r_0)^{\alpha-2}$, 高斯随机量 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ 的均值为 0,

方差为 $c_1(2^{(2-\alpha)/2}-0.25-0.125 \cdot 2^{(\alpha-2)/2}) \left(\frac{D_1}{r_0}\right)^{\alpha-2}$, $D_1=D_0/2$ 。

依次类推, 经过 N 次插值可以得到网格数为 $2^N \times 2^N$ 大小的相位屏。同样选取长度为 1 m 的方形屏, 网格点数为 512×512 且 $\Delta x=\Delta y$, 大气相干长度 r_0 为 0.1 m, 图 3 为分形法模拟的湍流谱幂率为 3.9 时的相位屏, 从



图 3 分形法模拟的谱幂率为 3.9 时的非 Kolmogorov 湍流相位屏
Fig.3 Non-Kolmogorov turbulence phase screen created by Fractal

method with a spectral power law 3.9

图中可以看出, 其高频和低频成分都较为充足。

2 相位屏模拟的验证

相位结构函数描述了波前相位的二阶统计特征, 常作为检验相位屏好坏的一种方法。下面用该方法对 FFT 方法、分形法、Zernike 多项式法生成的非 Kolmogorov 湍流相位屏进行验证。相位结构函数定义为 [11]:

$$D_\phi(r)=\langle[\phi(r+r_1)-\phi(r)]^2\rangle \quad (34)$$

非 Kolmogorov 湍流大气中的相位结构函数用公式(28)表示, Kolmogorov 湍流大气中的相位结构函数用公式(29)表示。

2.1 功率谱法模拟的湍流相位屏的相位结构函数的验证

模拟长和宽均为 1 m 的方形相位屏, 网格点数为 512×512 , 大气相干长度 r_0 为 0.1 m, 不考虑湍流的内外尺度, 对 FFT 方法生成的 500 个相位屏做统计得到相位结构函数的平均值。图 4(a)~(d)分别为湍流谱幂率为 3.1、3.3、3.7、3.9 时的相位屏的结构函数。并对每一种谱幂率时, 加次谐波和不加次谐波时的相位结构函数与理论值进行了对比。从图中可以看出, FFT 方法生成的相位屏低频不足, 经次谐波补偿后, 相位屏低频部分得到明显的改善, 但随着次谐波级数的增加结构函数不再变化, 且不同的湍流谱幂率所需要增加的次谐波级数也不同, 当湍流谱幂率为 3.1、3.3、3.7、3.9 时, 所需要增加的次谐波级数分别为 4、7、15、14 级。当非 Kolmogorov 湍流谱幂率为 3.9 时, 次谐波级数增加到 14 级时, 相对误差在 1.3%~25.02%之间, 模拟一个相位屏耗时约 3.7 s。

2.2 Zernike 多项式法模拟的湍流相位屏的相位结构函数的验证

图 5(a)~(d)为 Zernike 多项式法模拟的湍流谱幂率分别为 3.1、3.3、3.7、3.9 时的相位屏的结构函数与理论值对比, 模拟参数的设置与上面相同。从图中可以看出, Zernike 多项式法生成的相位屏高频明显不足。但随着 Zernike 多项式阶数的增加, 相位结构函数的模拟值与理论值越来越接近。当非 Kolmogorov 湍流谱幂率为 3.1 时, Zernike 多项式增加到 299 阶时, 相位结构函数的模拟值与理论值已经较为接近, 当谱幂率为 3.3 时, 多项式增加到 299 阶时, 模拟值与理论值已经符合的很好, 当谱幂率分别

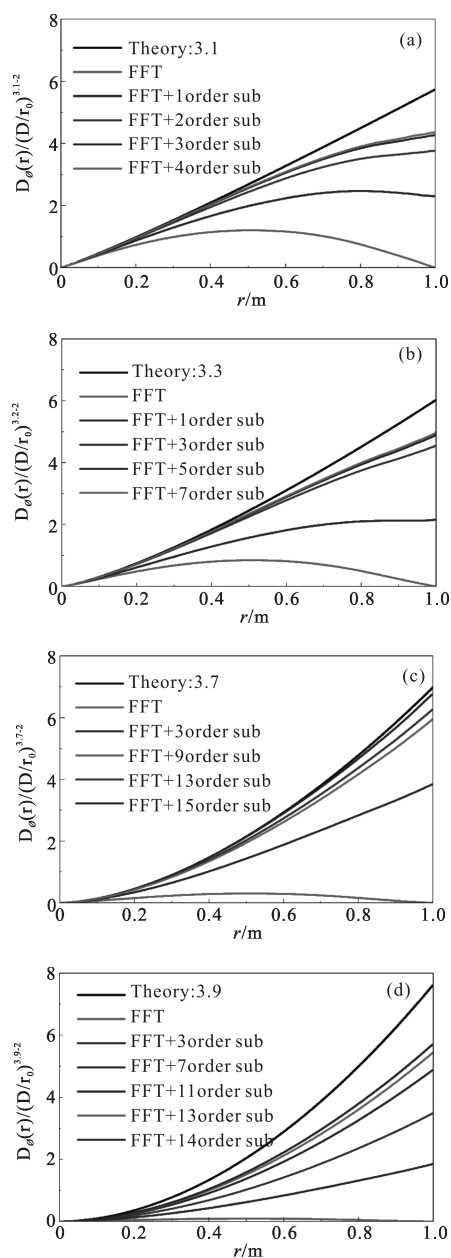


图 4 FFT 方法生成的湍流相位屏的相位结构函数与理论值的比较, (a) $\alpha=3.1$, (b) $\alpha=3.3$, (c) $\alpha=3.7$, (d) $\alpha=3.9$

Fig.4 Comparison of structure function of phase screens between simulation results with theoretical results by FFT method, (a) $\alpha=3.1$, (b) $\alpha=3.3$, (c) $\alpha=3.7$, (d) $\alpha=3.9$

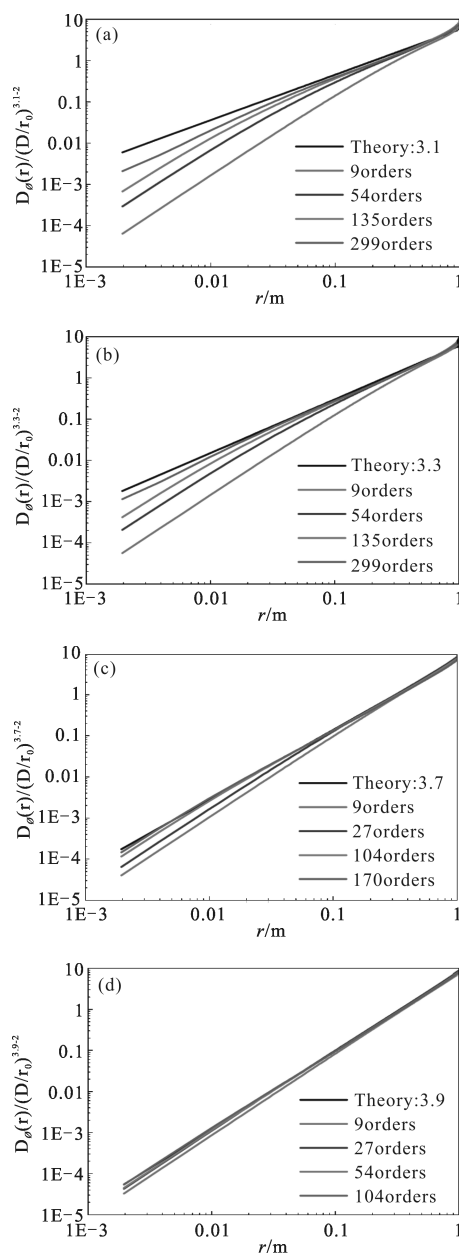


图 5 Zernike 多项式法生成的湍流相位屏的相位结构函数与理论值的比较, (a) $\alpha=3.1$, (b) $\alpha=3.3$, (c) $\alpha=3.7$, (d) $\alpha=3.9$

Fig.5 Comparison of structure function of phase screens between simulation results with theoretical results by Zernike polynomials method, (a) $\alpha=3.1$, (b) $\alpha=3.3$, (c) $\alpha=3.7$, (d) $\alpha=3.9$

为 3.7 和 3.9 时, 多项式分别增加到 170 阶和 104 阶时模拟值与理论值符合的很好。可以发现随着湍流谱幂率的增加, 使用较少阶的 Zernike 多项式就可以模拟出满足需要的湍流相位屏。当谱幂率为 3.9 时, Zernike 多项式增加到 104 阶, 相位结构函数的模拟值与理论值的相对误差在 0%~7.26% 之间, 模拟一个相位屏耗时约 3.1 s。

2.3 分形法模拟的湍流相位屏的相位结构函数的验证

图 6 为分形法模拟的湍流谱幂率为 3.1、3.3、3.7、3.9 时的相位屏的结构函数与理论值的对比, 实线为理论值, 虚线为模拟值, 模拟参数的设置与上面相同。从图中可以看出, 分形法模拟的相位屏低频和低频都与理论值符合的较好, 且谱幂率为 3.7 和 3.9 时的相位屏相比于谱幂率为 3.1 和 3.3 时的相位屏

与理论值符合的更好,说明当谱幂率较大时分形法很容易就生成满足需要的湍流相位屏,且模拟速度较快。当谱幂率为 3.9 时,相位结构函数的模拟值与理论值的相对误差在 0.39%~7.3%之间,生成一个相位屏只需要约 0.1 s。

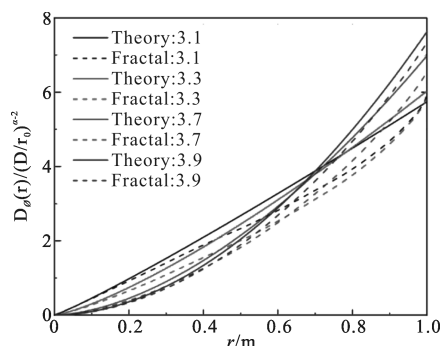


图 6 分形法生成的湍流相位屏的相位结构函数与理论值的比较

Fig.6 Comparison of phase structure functions between simulation results and theoretical results by fractal method

3 结论

用 FFT 法,分形法以及 Zernike 多项式法模拟了非 Kolmogorov 湍流相位屏,并用相位结构函数对模拟结果进行了验证。

结果表明:FFT 法生成的相位屏具有低频不足的缺点,Zernike 多项式法生成的相位屏具有高频不足的缺点。使用 FFT 法时增加多级次谐波和使用 Zernike 多项式法时增加 Zernike 多项式的阶数都可以生成满足需要的相位屏,但这两种方法都会占用更多的计算机内存,降低模拟效率;分形法生成的湍流相位屏高频和低频信息都较为充足,且模拟效率较高,应作为相位屏模拟的常用方法。除此之外,若模拟结果要达到相同的精确度,非 Kolmogorov 湍流谱幂率不同时,所要增加的次谐波级数和 Zernike 多项式阶数也不相同。湍流谱幂率越大,需要增加的次谐波级数越大,Zernike 多项式阶数越少。但当谱幂率趋于 4 时,即使增加 14 级次谐波,相位结构函数的模拟结果与理论结果仍存在较大的差距,随着非 Kolmogorov 湍流谱幂率的增加分形法生成的相位屏的相位结构函数也与理论值符合的更好。

参考文献:

[1] Xiang Ningjing, Wu Zhensen, Wang Mingjun. Spreading and

wander of Gaussian-Schell model beam propagation through atmospheric turbulence [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(3): 658-662. (in Chinese)

向宁静,吴振森,王明军.部分相干高斯-谢尔光束在大气湍流中的展宽与漂移[J].*红外与激光工程*,2013,42(3):658-662.

[2] Qian Xianmei, Zhu Wenyue, Rao Ruizhong. Simulation of effect of a high-frequency bump in the turbulence spectrum on laser propagation [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2006, 35(S): 432-436. (in Chinese)

钱仙妹,朱文越,饶瑞中.湍流谱中高频“泵浦”对激光大气传输影响的数值模拟研究[J].*红外与激光工程*,2006,35(S):432-436.

[3] Korotkova O. Intensity and power statistics of laser and random beams in Non-Kolmogorov turbulence [C]//*Imaging and Applied Optics*, 2014: 2.

[4] Cai Dongmei, Wang Kun, Jia Peng, et al. Sampling methods of power spectral density method simulating atmospheric turbulence phase screen [J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(10): 104217. (in Chinese)

蔡冬梅,王昆,贾鹏,等.功率谱反演大气湍流随机相位屏采样方法的研究[J].*物理学报*,2014,63(10):104217.

[5] Nicolas Roddier. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials [J]. *Opt Engineering*, 1990, 129(10): 1174-1179.

[6] Wang Qitao, Tong Shoufeng, Xu Youhui. On simulation and verification of the atmospheric turbulent phase screen with Zernike polynomials [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(7): 1907-1911. (in Chinese)

王奇涛,佟首峰,徐友会.采用 Zernike 多项式对大气湍流相位屏的仿真和验证[J].*红外与激光工程*,2013,42(7):1907-1911.

[7] Wu Hanling, Yan Haixing, Li Xinyang. Generation of rectangular turbulence phase screens based on fractal characteristics of distorted wavefront [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, 129(1): 114-119. (in Chinese)

吴晗玲,严海星,李新阳.基于畸变相位波前分形特征产生矩形湍流相位屏[J].*光学学报*,2009,129(1):114-119.

[8] Szymon Gladysz, Karin Stein, Erik Sucher, et al. Measuring non-Kolmogorov turbulence[J]. *SPIE*, 2013, 8890: 889013.

[9] Wu Xiaoqing, Huang Yinbo, Mei Haiping, et al. Measurement of non-Kolmogorov turbulence characteristic parameter in atmospheric surface layer [J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(6): 1-6. (in Chinese)

吴晓庆,黄印博,梅海平,等.近地面层大气非 Kolmogorov 湍流特征参数测量[J].*光学学报*,2014,34

- (6): 1–6.
- [10] Rao Ruizhong, Li Yujie. Light propagation through non-Kolmogorov-type atmospheric turbulence and its effects on optical engineering [J]. *Acta Optica Sinica*, 2015, 35(5): 0501003. (in Chinese)
饶瑞中, 李玉杰. 非 Kolmogorov 大气湍流中的光传播及其对光电工程的影响[J]. 光学学报, 2015, 35(5): 0501003.
- [11] Tatarskii V I. Wave Propagation in a Turbulent Medium[M]. Beijing: Science Press, 1978.
- [12] Rao Ruizhong. Modern Atmospheric Optics [M]. Beijing: Science Press, 2012. (in Chinese)
饶瑞中. 现代大气光学[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [13] Stribling B E, Welsh B M, Roggemann M C. Optical propagation in non-Kolmogorov atmospheric turbulence [J]. *SPIE*, 1995, 2471: 181–196.
- [14] Lane R G, Glindemann A, Dainty J C. Simulation of a Kolmogorov phase screen [J]. *Waves in Random Media*, 1992, 2(3): 209–224.