

基于容积卡尔曼滤波的空间碎片相对导航

董 鑫, 欧阳高翔

(中国科学院光电研究院, 北京 100049)

摘 要: 基于在轨服务航天器的测角和测距信息, 采用了一种基于容积法则进行数值逼近的容积卡尔曼滤波算法对空间碎片进行相对导航, 解决了初始测量误差较大时容易丢失目标的问题。为了提高算法的适用范围, 采用一种普适状态转移矩阵进行状态外推, 避免了近圆轨道的限制, 适用于任意类型的轨道。仿真结果表明, 容积卡尔曼滤波比传统采用的扩展卡尔曼滤波在初始估计误差较大的情况下可以获得更高的滤波精度和更快的收敛速度, 为今后的工程实施提供了理论上的依据。

关键词: 空间碎片; 相对导航; 容积卡尔曼滤波

中图分类号: V448.22 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2015)S-0152-06

Relative navigation for space-debris based on cubature Kalman filter

Dong Xin, Ouyang Gaoxiang

(Academy of Opto-Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: For the problem of relative navigation for space debris, cubature Kalman filter have been introduced based on the angle measurements and range measurements of on-orbit servicing spacecraft which is a numerical approximation algorithm using cubature law, resolving the problem of target missing with the larger error of initial measurement. In order to improve the field of application, a universal variable state transition equation was adopted to extrapolate the state, avoiding the limitation of near-circle orbit type. The simulation results show that the cubature Kalman filter has higher filtering accuracy and faster convergence speed than traditional extended Kalman filter in the situation of the larger error of initial estimation, which provides a theoretical basis for the implementation of the project in future.

Key words: space-debris; relative navigation; cubature Kalman filter

收稿日期: 2015-10-05; 修订日期: 2015-11-13

基金项目: 国家自然科学基金(11303029)

作者简介: 董鑫(1987-), 男, 硕士, 主要从事相对导航、制导和控制方面的研究。Email: dongxin@aoe.ac.cn

0 引言

近些年来,人类的航天活动日益频繁,每一次卫星的发射都会带来大量空间碎片的累积,分布在近地轨道至 GEO 的区域内,并且应用价值越大的轨道,空间碎片越集中。美国空间监视网(Space Surveillance Network,SSN)的数据显示,在轨可跟踪空间物体的数量已超过 21000 个,其中绝大部分为空间碎片^[1]。空间碎片具有很高的相对运动速度,能够严重改变航天器的表面性能、运行姿态和轨道,甚至造成航天器毁灭性破坏,威胁到航天员的生命安全^[2]。为了防止空间碎片带来的碰撞危险,采用在轨服务航天器对空间碎片进行清理的研究迫在眉睫。Liou^[3]指出在拥挤的轨道将碎片进行主动移除能够有效预防空间碎片与在轨航天器之间发生碰撞。如果采取有效的措施能够每年清理五个以上空间碎片,其增长速度都会得到极大地缓和^[4]。

在空间碎片清理的任务中,对空间碎片进行相对导航是一项关键技术,是实现与空间碎片交会、伴飞、实现抓捕的前提,直接影响到制导和控制的精度。目前,普遍采用扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman Filter,EKF)算法来确定碎片的相对位置和相对速度。EKF 算法是一种最小方差估计器,它将非线性模型进行一阶泰勒展开,然后应用线性系统卡尔曼滤波公式。当用 EKF 算法处理强非线性问题或展开点初始值与统计特性假设相差较大时,滤波的收敛速度很慢甚至会出现发散,并且采用 EKF 算法需要计算 Jacobi 矩阵及其幂,会造成计算量的增加。

文中采用激光测距仪和可见光相机作为相对测量传感器。JSpOC 利用地基跟踪雷达测量了大量空间碎片的轨道信息将其编成双行星历,在轨服务航天器利用其双行星历数据并且依靠在轨实时 GNSS 导航接近待清理的碎片。在轨服务航天器接近待处理空间碎片后,空间目标跟踪系统开始对空间碎片方位进行扫描^[5],捕获到碎片后,通过激光测距仪获得空间碎片相对于服务航天器的距离信息,通过可见光相机获得碎片相对于服务航天器的高低角和方位角信息,从而进入相对导航的过程。在对空间碎片的相对导航过程中,测量方程具有强非线性特征,并且由于碎片为非合作目标,初始测量误差较大,采

用 EKF 算法容易造成目标丢失。容积卡尔曼滤波^[6-7](Cubature Kalman Filter,CKF)算法是一种新的状态估计方法,它采用一组等权值的容积数值积分计算非线性变换后随机变量的均值和协方差,相比于 EKF 具有更好的非线性逼近性能和数值精度,适用于初始误差较大和具有强非线性的情况。

文中注意到空间碎片并不完全运行在圆轨道上,基于以上事实文中希望所得到导航滤波算法具有一定的普适性,为此在滤波状态方程选取上,采用 Der 在参考文献[8]中提出一种求解状态转移矩阵的简洁形式,该状态转移矩阵四个偏导数矩阵在数学表达式上成简单的并矢向量的线性组合,这些并矢向量仅是在初始时刻给出的初始位置和速度的函数。需要指出的是这个转移矩阵适用于任何圆锥曲线,而适用于近圆轨道的 C-W 方程是它的一种特殊情形。

由于空间碎片的轨道姿态信息很难通过地面精确测量得到,实际中是通过在轨服务航天器的相对测量敏感器对其进行观测得到的,文中将相对运行坐标系建立为服务航天器的轨道坐标系,这样可以不用考虑空间碎片的轨道姿态参数,对碎片的轨道偏心率也没有任何要求。

1 相对导航状态方程

首先,建立对空间碎片的相对导航状态方程。假设在轨服务航天器在地心赤道惯性系下的位置矢量为 r ,速度矢量为 v ,在惯性空间的运动方程为:

$$\ddot{r} = -\frac{\mu r}{r^3} \quad (1)$$

式中: μ 为地球引力常数。

当在初始时刻 t_0 的时候给出位置和速度的初值 $r(t_0)$ 、 $v(t_0)$ 后, t 时刻的位置和速度可以采用如下的表达方式:

$$\begin{bmatrix} r(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fI & \dot{f}I \\ gI & \dot{g}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t_0) \\ v(t_0) \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: I 为 3×3 的单位矩阵, f, g, \dot{f}, \dot{g} 分别是关于 t 、 $r(t_0)$ 和 $v(t_0)$ 的函数; $r(t)$ 和 $v(t)$ 为 t 时刻的位置和速度。

在地心赤道惯性系下,公式(2)可以用来外推服务航天器与碎片的相对运动^[9]:

$$\begin{bmatrix} \delta r(t) \\ \delta v(t) \end{bmatrix} = \Phi(t, t_0) \begin{bmatrix} \delta r(t_0) \\ \delta v(t_0) \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中: $\delta r(t_0)$ 、 $\delta v(t_0)$ 为初始时刻的相对位置和相对速度, $\delta r(t)$ 、 $\delta v(t)$ 为 t 时刻的相对位置和相对速度; $\Phi(t, t_0)$ 为状态转移矩阵, 其形式为:

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_0} & \frac{\partial r}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial r_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{bmatrix} \quad (4)$$

参考文献[8], 上面的四个子矩阵 Φ_{11} 、 Φ_{12} 、 Φ_{21} 和 Φ_{22} 可以有如下的表示:

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= fI + [r \ v] \begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} \\ M_{31} & M_{32} \end{bmatrix} [r_0 \ v_0]^T \\ \Phi_{12} &= gI + [r \ v] \begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} [r_0 \ v_0]^T \\ \Phi_{21} &= \dot{f}I - [r \ v] \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} [r_0 \ v_0]^T \\ \Phi_{22} &= \dot{g}I - [r \ v] \begin{bmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{22} & M_{23} \end{bmatrix} [r_0 \ v_0]^T \end{aligned} \quad (5)$$

式中: M_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ 是 3×3 矩阵 M 的元素, 参考文献[8]中有 M 、 f 、 g 、 \dot{f} 和 \dot{g} 的详细推导过程。

由于相对运动坐标系为服务航天器的轨道坐标系, 而上述状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 是在地心赤道惯性坐标系下得到的, 为此需要将 $\Phi(t, t_0)$ 变换到服务航天器轨道坐标系下:

$$\Phi(t, t_0)|_o = A(t)\Phi(t, t_0)|_A^{-1}(t_0) \quad (6)$$

式中: A 为地心赤道惯性坐标系到服务航天器轨道坐标系的转换矩阵。

令空间碎片在服务航天器轨道坐标系下的状态量为 $X = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$, 可以得到如下的相对导航状态方程:

$$\dot{X}_r = \Phi(t, t_0)X_{r0} + B(t, t_0)U_0 + w \quad (7)$$

式中: $B(t, t_0)$ 为控制输入矩阵; U_0 为作用在服务航天器上的控制力产生的加速度; w 为过程噪声。

2 相对测量数学模型

文中采用激光测距仪和可见光相机作为相对测量传感器, 其中激光测距仪输出空间碎片与服务航天器之间的距离信息, 可见光相机输出空间碎片在服务航天器相机测量坐标系下的角度信息。

可见光相机对空间碎片的高低角 α 和方位角 β 进行测量, 如图 1 所示。其中 x 轴为相机光轴的方向, 高低角 α 为空间碎片的方向矢量与相机焦平面

(xOz) 的夹角, 方位角 β 为空间碎片的方向矢量在焦平面的投影与相机光轴的夹角。空间碎片在相机测量坐标系下的位置矢量为 $\rho_c = (x_c, y_c, z_c)^T$, 则角度信息和距离信息的测量值可表示为:

$$\begin{cases} \alpha_m = \alpha + v_\alpha = \arctan(-y_c, \sqrt{x_c^2 + z_c^2}) + v_\alpha \\ \beta_m = \beta + v_\beta = \arctan(z_c, x_c) + v_\beta \\ \rho_m = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2} + v_\rho \end{cases} \quad (8)$$

式中: α_m 、 β_m 和 ρ_m 为实际测量值; v_α 、 v_β 和 v_ρ 分别表示测量噪声。

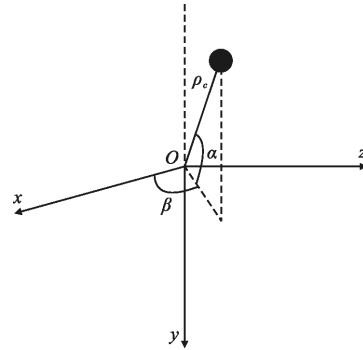


图 1 碎片在服务航天器测量坐标系下的位置

Fig.1 Position of debris in measurement coordinate of servicing satellite

为了使问题简化, 假设相机的测量坐标系与服务航天器的本体坐标系重合, 相对导航的观测方程为:

$$Z = h(X) + v = \begin{bmatrix} \arctan(-y, \sqrt{x^2 + z^2}) \\ \arctan(z, x) \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\rho \end{bmatrix} \quad (9)$$

3 容积卡尔曼滤波算法

考虑如下具有加性噪声的非线性系统状态方程和量测方程:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1} \quad (10)$$

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad (11)$$

式中: $x_k \in R^n$ 为系统 k 时刻的状态向量; $z_k \in R^m$ 为系统 k 时刻的观测量; $u_{k-1} \in R^p$ 为控制输入向量; $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 分别为系统非线性状态函数和量测函数; 过程噪声 w_{k-1} 和量测噪声 v_k 之间相互独立, 并且满足

$$\begin{cases} E\{w_k\} = 0, E\{w_k w_j^T\} = Q_k \delta_{kj} \\ E\{v_k\} = 0, E\{v_k v_j^T\} = R_k \delta_{kj} \\ E\{v_k w_j^T\} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

式中: $Q_k \geq 0$ 为系统噪声方差阵; $R_k > 0$ 为量测噪声方差阵; δ_{ij} 为 Kronecker 符号。

非线性高斯滤波的核心问题在于求解非线性函数与高斯密度函数乘积的多维积分问题^[10]。Arasaratnam^[6]等人通过三阶容积积分法则,利用 $2n$ 个容积点加权求和近似计算加权高斯积分。首先考虑如下 n 维高斯密度函数积分:

$$I(f) = \int_{R^n} f(x) \exp(-x^T x) dx \quad (13)$$

将变量由 $x \in R^n$ 变换到球坐标系中,令 $x = ry$, $y^T y = 1$, 使得 $x^T x = r^2$, $r \in [0, \infty)$, 将公式(13)变换为一个径向积分:

$$I(f) = \int_0^\infty S(r) r^{n-1} \exp(-r^2) dr \quad (14)$$

和一个球面积分:

$$S(r) = \int_{U_n} f(ry) d\sigma(y) \quad (15)$$

公式(15)可以看作权值函数为 $w(y) = 1$ 的球面积分。分别采用高斯求积规则和 3 阶球面容积规则求解积分式(14)和(15),可以得到:

$$I(f) \approx \frac{\sqrt{\pi^n}}{2^n} \sum_{i=1}^{2n} f\left(\sqrt{\frac{n}{2}} [1]_i\right) \quad (16)$$

式中: $[\cdot]_i$ 为对称点集 $[\cdot]$ 的第 i 列,

$$[1] = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (17)$$

将上述结果扩展到任意非标准高斯密度函数的积分:

$$\int_{R^n} f(x) N(x; \mu, \Sigma) dx \approx \sum_{i=1}^{2n} w_i f(\sqrt{\Sigma} \xi_i + \mu) \quad (18)$$

式中: $\sqrt{\Sigma}$ 为协方差矩阵 Σ 的平方根; (ξ_i, w_i) 为容积点集,容积点为 $\xi_i = \sqrt{\frac{m}{2}} [1]_i$, 权值为 $w_i = \frac{1}{m}$, $i = 1, 2, \dots, m = 2n$ 。

具体的滤波流程如下:

(1) 时间更新

第一步: 假设 $k-1$ 时刻的后验概率密度函数 $p(x_{k-1}|D_{k-1}) = N(\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1})$ 是已知的。对状态误差协方差进行因式分解:

$$P_{k-1|k-1} = S_{k-1|k-1} S_{k-1|k-1}^T \quad (19)$$

第二步: 计算容积点 ($i = 1, 2, \dots, m$)

$$X_{i,k-1|k-1} = S_{k-1|k-1} \xi_i + \hat{x}_{k-1|k-1} \quad (20)$$

式中: $m = 2n$, n 为状态向量的维数。

第三步: 计算通过非线性状态方程传播后的容积点

$$X_{i,k|k-1}^* = f(X_{i,k-1|k-1}, u_{k-1}) \quad (21)$$

第四步: 估计容积点的状态和预测误差协方差阵

$$\hat{x}_{k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{i,k|k-1}^* \quad (22)$$

$$P_{k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{i,k|k-1}^* X_{i,k|k-1}^{*T} - \hat{x}_{k|k-1} \hat{x}_{k|k-1}^T + Q_{k-1} \quad (23)$$

(2) 量测更新

第一步: 对一步预测协方差阵进行因式分解

$$P_{k|k-1} = S_{k|k-1} S_{k|k-1}^T \quad (24)$$

第二步: 计算容积点 ($i = 1, 2, \dots, m$)

$$X_{i,k|k-1} = S_{k|k-1} \xi_i + \hat{x}_{k|k-1} \quad (25)$$

第三步: 计算通过非线性量测方程传播后的容积点

$$Z_{i,k|k-1} = h(X_{i,k|k-1}) \quad (26)$$

第四步: 计算量测预测值、输出预测方差阵和互协方差阵

$$\hat{z}_{k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_{i,k|k-1} \quad (27)$$

$$P_{z_{k|k-1}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_{i,k|k-1} Z_{i,k|k-1}^T - \hat{z}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^T + R_k \quad (28)$$

$$P_{x_{k|k-1} z_{k|k-1}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{i,k|k-1} Z_{i,k|k-1}^T - \hat{x}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^T \quad (29)$$

第五步: 滤波更新

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1}) \quad (30)$$

$$K_k = P_{x_{k|k-1} z_{k|k-1}} P_{z_{k|k-1}}^{-1} \quad (31)$$

$$P_k = P_{k|k-1} - K_k P_{z_{k|k-1}} K_k^T \quad (32)$$

4 数值仿真

为了验证利用 CKF 算法对空间碎片的相对导航能力, 设计了如下的仿真算例: 空间碎片选为 GEO 轨道上的碎片, 这一轨道的资源稀缺, 具有宝贵的价值, 其在历元时刻 2011 年 10 月 17 日 0 时 0 分

0 秒的位置参数为 $[32333.218, -27223.008, 0.743]$ km, 速度参数为 $[1.9664, 2.3342, 0.3365]$ km/s, 空间碎片与在轨服务航天器之间的真实初始相对位置为 $[508.77, -508.81, -6.76]$ km, 初始相对速度为 $[-3.07, 3.07, -0.07]$ km/s, 分别采用 CKF 算法和 EKF 算法对空间碎片进行相对导航。

滤波周期为 0.5 s, 滤波初始状态值和初始误差协方差阵为:

$$X_0 = [518.76 \quad -498.81 \quad 3.23 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$P_0 = \text{diag}[100 \quad 100 \quad 100 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

在仿真算例中将初始值设置的误差较大, 这是用来仿真在轨服务航天器对空间碎片的初始估计值偏差较大时的情况, 在这样的情况下分别采用 CKF 算法和 EKF 算法对空间碎片进行相对导航。其中, 过程噪声和测量噪声分别为 $Q_k = 10^{-4} I_3, R_k = \text{diag}([\sigma_\alpha^2 \quad \sigma_\beta^2 \quad \sigma_\rho^2])$, $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ 和 σ_ρ 分别为高低角误差方差、方位角误差方差和距离误差方差, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0.001^\circ, \sigma_\rho = 0.5 \text{ m}$ 。

仿真结果如图 2 和图 3 所示, 两幅图分别为空间碎片相对于在轨服务航天器的位置估计值和速度估计值, 其中“实线”表示 EKF 的滤波估计结果, “虚线”表示 CKF 的滤波估计结果。从仿真结果可以看出, EKF 算法对于初始值比较敏感, 当在轨服务航天器对空间碎片的初始估计值偏差较大的时候, 滤波收敛速度很慢而且精度不高, 用这种算法对空间碎片进行相对导航很容易使碎片脱离相机的视场, 造成碎片丢失。而 CKF 算法不需要对非线性函数进行一阶泰勒展开, 对初始值不敏感, 在初始误差较大的情况下依然可以快速的收敛, 并且可以获得较高的精度。

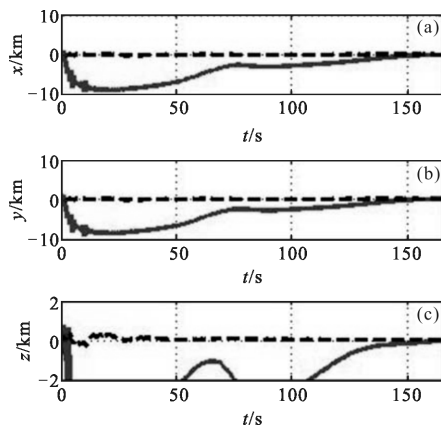


图 2 相对位置估计误差

Fig.2 Estimation errors of relative position

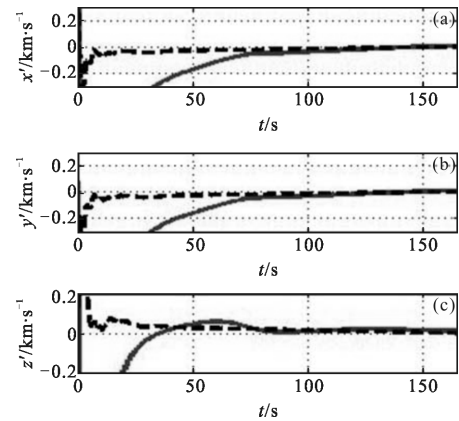


图 3 相对速度估计误差

Fig.3 Estimation errors of relative velocity

5 结论

相比于传统的 EKF 滤波算法, 采用 CKF 滤波算法对空间碎片进行相对导航可以确保导航系统在初始估计值偏差较大且观测方程具有较强非线性情况下仍具有较快的收敛速度和导航精度。文中采用的普适状态转移矩阵适用于任意类型的轨道, 避免了近圆轨道假设的局限性。文中的研究工作对工程实践具有理论指导意义。

参考文献:

- [1] Song Liang, Li Zhi, Ma Xingrui. A novel position and attitude estimation for space debris [J]. *Journal of Astronautics*, 2015, 36(8): 906-915. (in Chinese)
宋亮, 李志, 马兴瑞. 对空间碎片的相对位姿估计[J]. 宇航学报, 2015, 36(8): 906-915.
- [2] Liu Chunbo, Zhao Shaobo, Han Xiang'e. Detection of space debris of centimeters in size via spaceborne lidar [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(5): 1244-1248. (in Chinese)
刘春波, 赵少博, 韩香娥. 危险空间碎片的天眼激光雷达探测[J]. 红外与激光工程, 2012, 41(5): 1244-1248.
- [3] Liou J C. An active debris removal parametric study for LEO environment remediation [J]. *Advances in Space Research*, 2011, 47(11): 1865-1876.
- [4] Yamamoto T, Murakami N, Nakajima Y, et al. Navigation and trajectory design for Japanese active debris re-removal mission [C]//24th International Symposium on Space Flight Dynamics, 2014: 1-29.
- [5] Zhou Yanping, Fu Sen, Yu Siyuan, et al. Acquisition

- probability model of noncooperative maneuvering target detection in space [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2010, 39(4): 639–643. (in Chinese)
- 周彦平, 付森, 于思源, 等. 天基非合作目标探测中的捕获概率模型[J]. 红外与激光工程, 2010, 39(4): 639–643.
- [6] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54 (6): 1254–1269.
- [7] Arasaratnam I, Haykin S, Hurd T R. Cubature Kalman filtering for continuous-discrete systems: Theory and simulations [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(10): 4977–4993.
- [8] Der G J. An elegant state transition matrix [J]. *Journal of the Astronautical Sciences*, 1997, 45(4): 371–390.
- [9] Reynolds H B. Implementation of a Two-impulse Rendezvous Maneuver with Universal Variables [M]. NewYork: Microcom Memorandum, 1998: 84–98.
- [10] Ito K, Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(5): 910–927.