

用粒子群算法设计非球面准直透镜的方法

秦 华,冯东太,刘 波,吴国栋

(山东理工大学 理学院,山东 淄博 255049)

摘 要:提出了一种用于LED准直照明的非球面透镜设计方法,该方法产生于对非球面几何光学特性分析和粒子群优化算法优越的寻优能力。用该方法设计了一个基于点光源准直的出光口径30 mm的非球面透镜,为了证明准直透镜的准直效果,用光线追迹方法模拟了准直透镜对于点光源的准直过程。模拟结果显示,点光源经准直透镜后出射光线的最大半视场角为0.004 60,0.8 mm×0.8 mm LED光源经准直透镜后出射光线的最大半视场角为4.91°,表明了粒子群算法用于非球面准直透镜设计的可行性和有效性。与现有的设计方法相比,该设计方法意义更直观,实施更简单。

关键词:LED准直照明;非球面光学特性;粒子群算法;准直透镜

中图分类号: TN312.8; TH703 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2015)06-1811-07

Design method of collimating aspheric lenses based on PSO algorithm

Qin Hua, Feng Dongtai, Liu Bo, Wu Guodong

(School of Sciences, Shandong University of Technology, Zibo 255049, China)

Abstract: An aspheric lens design method was presented for an application to LED collimating illumination. The method was derived from a basic geometric-optics analysis and the powerful optimization capability of particle swarm method. By using this method, a highly collimating aspheric lens based on a point source was designed. To verify the practical performance of the collimating lens, a ray-tracing method was employed to trace light rays emitted from an ideal point light source through the collimating lens. The simulation results show that the lens works well with an ideal point and the maximum half view angle of light rays emitted from the lens is 0.004 60, for a 0.8 mm×0.8 mm LED source, the maximum half view angle of light rays emitted from the lens is 4.91°, which manifests the feasibility and effectiveness of Particle Swarm Optimization (PSO) algorithm applied to designing aspheric collimating lens. Compared with the conventional design method, this design approach is more intuitive and easier to implement.

Key words: LED collimating illumination; optical properties of aspheric surface; particle swarm optimization(PSO) algorithm; collimating lens

收稿日期:2014-10-10; 修订日期:2014-11-09

基金项目:山东省自然科学基金(ZR2012FM001, ZR2013FM007)

作者简介:秦华(1964-),男,副教授,博士,主要从事光学设计、全固态激光器及透明导电薄膜方面的研究。Email:zfqinh@gmail.com

0 引言

把点光源或者近似点光源的LED出射光变为近乎于平行光在实际中有很多应用,比如探照灯、手电筒、夜视系统甚至聚焦系统中。实现点发光或近似点发光的准直主要依靠一套准直系统,包含准直透镜和反射曲面镜等。这些准直透镜包括对称球面、对称非球面透镜或者自由曲面透镜,反射或折射曲面为自由曲面或者非球面^[1-3]。透射-全反射型组合曲面的LED透镜是靠折射和反射面型的合理结构使LED芯片发出的所有光按照设计者的要求出射或者分布,同时还要求系统整体结构紧凑小巧。利用自由曲面透镜或者自由曲面反射镜作为准直镜是目前最为普遍的准直方式^[4-6],设计这种准直镜的一般方法是通过光源与照明目标之间的映射关系把设计问题转换为解一组微分方程^[1,4,7-8],这组微分方程一般没有解析解,因此需要数值求解复杂的微分方程,数值方法的选择对于设计者是一种困难挑战,因为它不仅涉及到方法的复杂程度,而且涉及到解的精度。还有一些方法,虽然没有利用这种映射关系建立一组微分方程,但是需要复杂的数学推导和运算,甚至需要更进一步的优化,得到一系列的离散点,再将离散点拟合成曲线或者曲面^[9],拟合过程造成的误差会引起目标面上照度分布的偏移^[10]。

文中结合折反定律的矢量形式、非球面的折射反射特性以及粒子群优化算法在多维空间的优越寻优能力,提出了一种基于粒子群算法进行透射-全反射复合型准直透镜的设计方法,能够实现点光源的准直,这种方法意义直观明了,既不需要解复杂的微分方程组,又不需要复杂的数学推导,也不需要由离散点拟合曲线和曲面,只需要由入射光矢量得到出射光矢量并由此构造出评价函数代入粒子群算法中进行优化即可。文中给出了这种准直透镜的基本结构,阐述了这种设计方法的理论基础及合理性,用实例说明了这种设计方法的步骤过程,用光线追迹模拟了此准直透镜的准直效果。

1 准直镜结构组成及光学特性分析

1.1 准直镜的基本结构

图1为准直镜的纵切面,主要由上下两个反射

面①②和一个折射面③组成,这三个面都是非球面,还有一个球面④和一对垂直和平行平面,点光源位于球面④的圆心处,球面④不改变光线的传播方向,一对垂直平面对于平行光也不改变其传播方向。准直透镜关于X轴旋转对称,属于旋转非球面或旋转球面,每一旋转面上的光学性质相同,为了简单起见取XOY面上半部分研究其光线传播特性。准直镜的准直过程如下:点光源发出的小于 θ 角的光经折射面③折射后准直出射,大于 θ 角的光经反射面①②反射后准直出射。下面分别分析非球面作为反射面和折射面的光学特性,并由此得到光经过折射面或者反射面后的准直方法。

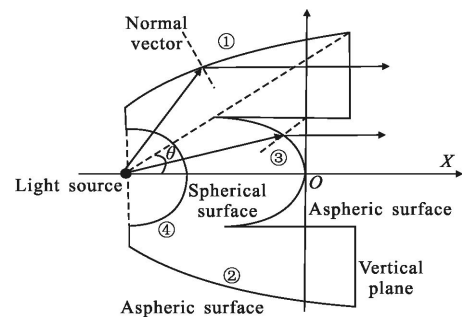


图1 准直镜的结构

Fig.1 Structure of the proposed collimating lens

1.2 反射面的反射特性分析

图2为将图1的上下两个反射面单独分离出来的简图,①②面都是偶次非球面,其方程为:

$$x = d + \frac{Ch^2}{1 + \sqrt{1 - h^2C^2(1 + a_2)}} + a_4h^4 + a_6h^6 + a_8h^8 + a_{10}h^{10} + a_{12}h^{12} + a_{14}h^{14} \quad (1)$$

式中: $h = \sqrt{y^2 + z^2}$; $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, a_{14}$ 为方程(1)中各高次项的系数; C 为二次曲面的顶点曲率; d 为非球面顶点离开原点的距离。坐标系如图2所示,点光源位于 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点, $\vec{Q}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ 表示入射光单位矢量,可由 θ_k 求出。入射光线与非球面的交点 $P(x, y, z)$ 可以由 \vec{Q} 和非球面方程(1)用近似方法求得^[8], P 点处的非球面单位法矢量 $\vec{N}(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N)$ 可由 P 点坐标和公式(1)求得。用 $\vec{Q}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 表示 P 点处反射光线单位矢量,由反射定律的向量公式可以得到:

$$\vec{Q}_2 = \vec{Q}_1 - 2(\vec{Q}_1 \cdot \vec{N})\vec{N} \quad (2a)$$

其分量形式为:

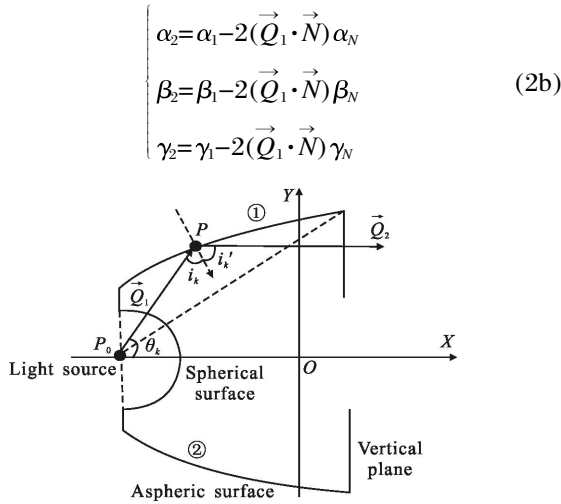


图 2 准直镜反射面上光线反射示意图

Fig.2 Schematic diagram of light rays reflected from a reflective surface of the collimating lens

如果光线从非球面上的 P 点沿 \vec{Q}_2 方向反射出, 其行进距离在 X 轴上的分量为 Δx , 则在 Y 轴上的分量为 $\Delta y = (\beta_2/\alpha_2)/\Delta x$, 若 $\Delta y = 0$, 那么折射光线就平行于 X 轴。如果在反射非球面上取足够多的入射光线, 每一条入射光线所对应的反射光线都有一个 Δy_k , 下标 k 是为了区别每一条光线, 把所有光线的 Δy_k 的平方求和得:

$$\sum_k \Delta y_k^2 = [(\beta_{2k}/\alpha_{2k})\Delta x_k]^2 \quad (3)$$

取所有光线的 Δx_k 相同, 则 $\sum_k \Delta y_k^2$ 就只是 \vec{Q}_2 的函数。从公式(2)可以看出, \vec{Q}_2 矢量是 \vec{Q}_1 矢量与非球面单位法矢 \vec{N} 的函数, 而非球面单位法矢 \vec{N} 是非球面方程参数 $C, d, a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, a_{14}$ 的函数, 如果 \vec{Q}_1 一定, 那么 \vec{Q}_2 就只是非球面方程参数的函数, $\sum_k \Delta y_k^2$ 也就只是非球面方程参数的函数。把 $\sum_k \Delta y_k^2$ 作为一个评价函数, 选择非球面参数 $C, d, a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, a_{14}$ 的适当组合, 使评价函数为 0 或近似为 0, 则所有的折射光线都将近似平行 X 轴, 从而达到准直的目的。

1.3 折射曲面的折射特性分析

在准直镜中, 曲面③对光线起折射作用, 曲面方程如同公式(1)。建立如图 3 所示的坐标系, 如同分析光线的反射一样, 用 $\vec{Q}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ 表示入射光单位

矢量, 非球面与入射光线的交点 $P(x, y, z)$ 及 P 点处的非球面单位法矢量 $\vec{N}(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N)$ 的求解如同 1.2 节。用 $\vec{Q}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 表示 P 点处折射光线单位矢量, 由折射定律向量公式 $n\vec{Q}_1 \times \vec{N} = n'\vec{Q}_2 \times \vec{N}$ 可以求出 \vec{Q}_2 。

$$\vec{Q}_2 = \frac{n}{n'}\vec{Q}_1 + \frac{g}{n'}\vec{N} \quad (4)$$

其分量形式为:

$$\alpha_2 = \frac{n}{n'}\alpha_1 + \frac{g}{n'}\alpha_N, \beta_2 = \frac{n}{n'}\beta_1 + \frac{g}{n'}\beta_N, \gamma_2 = \frac{n}{n'}\gamma_1 + \frac{g}{n'}\gamma_N$$

式中: n, n' 分别为折射面两侧的折射率; $g = n' \cos I'' - n \cos I$, $\cos I = |\vec{Q}_1 \cdot \vec{N}| = |\alpha_1\alpha_N + \beta_1\beta_N + \gamma_1\gamma_N|$, $\cos I'' = \sqrt{1 - n^2/n'^2(1 - \cos^2 I)}$, I 和 I'' 分别为入射角和折射角, 如图 3 所示。

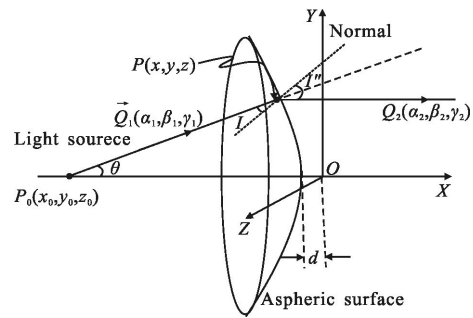


图 3 非球面上任一点的入射光线矢量、折射光线矢量

Fig.3 Vectors of the incident and refracted ray at any point on the aspherical surface

如图 3 所示, 在 XOY 面内, \vec{Q}_1 由 θ 角(光线与 x 轴的夹角) 决定。如果光线从非球面上的 P 点沿 \vec{Q}_2 方向折射出, 其行进距离在 X 轴上的分量为 Δx , 则在 Y 轴上的分量为 $\Delta y = (\beta_2/\alpha_2)/\Delta x$, 若 $\Delta y = 0$, 那么折射光线就平行于 X 轴。如果在折射非球面上取足够多的入射光线, 每一条入射光线所对应的折射光线都有一个 Δy_k , 下标 k 是为了区别每一条光线, 把所有光线的 Δy_k 求和得:

$$\sum_k \Delta y_k^2 = [(\beta_{2k}/\alpha_{2k})\Delta x_k]^2 \quad (5)$$

取所有光线的 Δx_k 相同, 则 $\sum_k \Delta y_k^2$ 就只是 \vec{Q}_2 的函数。如同 1.2 节的分析一样, \vec{Q}_2 矢量是 \vec{Q}_1 矢量与非球面方程参数 $C, d, a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, a_{14}$ 的函数,

如果 \vec{Q}_1 一定,那么 \vec{Q}_2 就只是非球面方程参数的函数, $\sum_k \Delta y_k^2$ 也就只是非球面方程参数的函数。把 $\sum_k \Delta y_k^2$ 作为一个评价函数,选择非球面参数 $C, d, a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, a_{14}$ 的适当组合,使评价函数为 0 或近似为 0,那么所有的折射光线都将近似平行 X 轴,从而达到准直的目的。

1.4 使评价函数极小的方法

由以上分析可知,评价函数 $\sum_k \Delta y_k^2$ 是非球面方程参数的函数,使 $\sum_k \Delta y_k^2$ 为 0 或近似为 0 或极小的非球面参数所决定的曲面就是要找的曲面,文中用粒子群算法寻找这样的曲面参数。

把非球面参数 $C, d, a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, a_{14}$ 这 9 个量作为粒子群算法中一个粒子所具有的维数, $\sum_k \Delta y_k^2$ 作为粒子群算法中的适应度函数,每一维的搜索空间根据具体问题自由确定,在此搜索空间中寻找 $\sum_k \Delta y_k^2$ 的极小值,得到一组 $C, d, a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, a_{14}$, 由这组参数决定的非球面就是在此搜索空间中使点光源变为准直光的反射面或折射面。非球面曲线段的优化可以分段进行,但是优化出的两个不同非球面曲线段可能不连续,为此可以把前一个曲线段的最后一个 X 值点与后一段的第一个 X 值点的差的平方 Δx_m^2 作为一个优化量加入到 $\sum_k \Delta y_k^2$ 中,即粒子群算法中的适应度函数变为 $\sum_k \Delta y_k^2 + q_m \Delta x_m^2$ 。其中下标 m 表示第 m 段曲线, q_m 表示权重,可以根据优化情况决定其大小。若 $\Delta x_m^2 = 0$,则前后两段曲线连续,如果 Δx_m^2 太大,则加大 q_m 后再次优化,直到 Δx_m^2 达到一个预定的极小值为止。

2 反射面①②与折射面③的优化结果及其光路模拟-设计实例

这一节描述了一个设计实例及对此设计结果的光路模拟。选用有机玻璃作为准直透镜的材料,其折射率 $n=1.52054$ 。假定点光源位于 $P_0(-11, 0, 0)$,根据 1.2 和 1.3 节的分析,把 θ 角划分为两部分: $0^\circ \leq \theta \leq 34^\circ$ 为光线折射部分, $34^\circ \leq \theta \leq 85^\circ$ 为光线反射部分,两部分分别用粒子群算法进行优化。准直透镜的

横、纵向尺寸要求小于 30 mm。根据以上分析求评价函数或粒子群算法中适应度函数的流程图如图 4 所示。

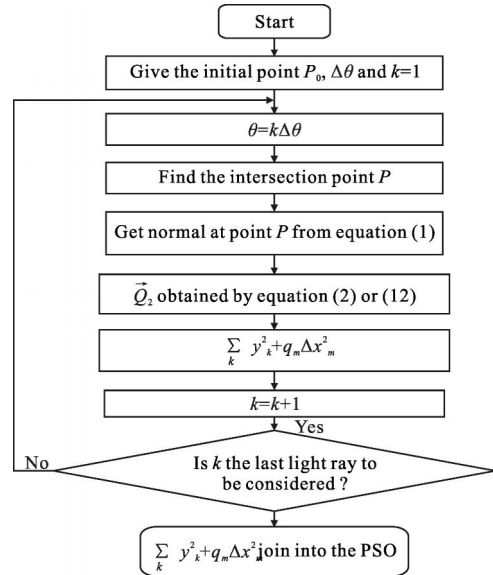


图 4 构建粒子群算法中适应度函数的流程图

Fig.4 Flow chart for constructing the fitness function in the PSO method

在 Matlab 环境下,用粒子群算法自编优化程序,以 $\sum_k \Delta y_k^2 + q_m \Delta x_m^2$ 作为适应度函数,对非球面参数 $C, d, a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, a_{14}$ 进行了优化,分别得到反射部分和折射部分的优化结果如下。

2.1 反射面①的优化结果及其光路模拟

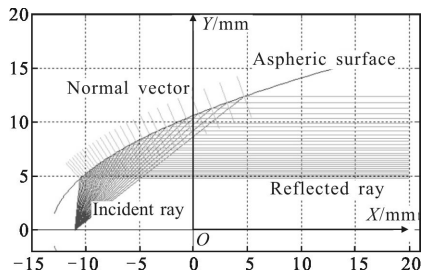
表 1 列出了准直透镜反射部分非球面系数的优化结果,这些系数中的 $a_8, a_{10}, a_{12}, a_{14}$ 都设置为 0,当然也可以不设置为 0,根据具体情况自由设定。

表 1 准直镜反射部分非球面系数的优化结果

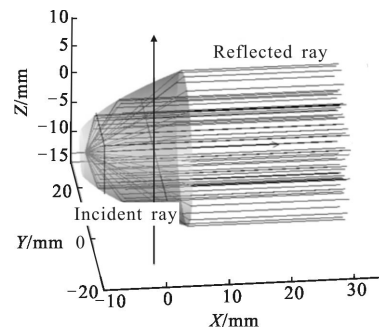
Tab.1 Optimization result of coefficients in the equation of the reflection collimating portion

Parameter	Value
C/mm^{-1}	0.233 0
d/mm	-13.146 5
a_2	-1.014 7
a_4	$2.321 6 \times 10^{-5}$
a_6	$7.999 2 \times 10^{-9}$
a_8	0
a_{10}	0
a_{12}	0
a_{14}	0

点光源在 $34^\circ \leq \theta \leq 85^\circ$ 发出的光在由表 1 参数所决定的反射面上的光路模拟如图 5 所示, 其中非球面曲线、法线、入射光线和反射光线已标出。为了更清晰地看到光线在准直透镜中的传输过程, 分别给出了二维和三维光路模拟, 如图 5(a) 和图 5(b) 所示。从模拟结果可以看出, 点光源发出的在 $34^\circ \leq \theta \leq 85^\circ$ 的光几乎成完全平行光出射, 从图 5(b) 可以看出反射面的形状。



(a) Light path simulation in two-dimensional space



(b) 三维光路模拟图

(b) Light path simulation in three-dimensional space

图 5 点光源发出的光经反射非球面反射后的光路模拟

Fig.5 Ray tracing under the action of the aspherical refractive surface for a point source

2.2 折射面②的优化结果及其光路模拟

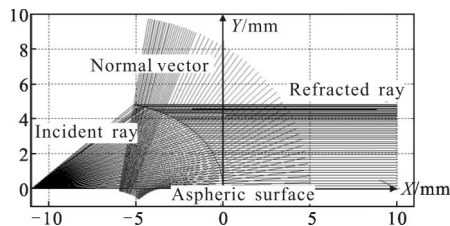
表 2 列出了准直镜折射部分非球面系数的优化结果, 折射部分分 5 段优化, 每一段分别为系数不同

表 2 准直镜折射部分非球面系数的优化结果

Tab.2 Optimization result of coefficients in the equation of the refraction collimating portion

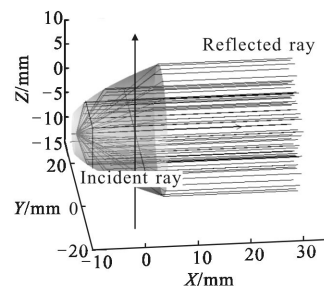
	C/mm^{-1}	d/mm	a_2	a_4	a_6	a_8	a_{10}	a_{12}	a_{14}
$0^\circ \leq \theta \leq 24^\circ$	-0.27	-1.96×10^{-3}	-0.47	-5.25×10^{-5}	-4.78×10^{-6}	5.00×10^{-8}	-5.00×10^{-9}	-6.00×10^{-10}	-5.00×10^{-11}
$24^\circ \leq \theta \leq 28^\circ$	-0.91	0.97	-1.76	4.76×10^{-4}	-5.00×10^{-5}	-4.27×10^{-6}	-3.07×10^{-9}	-6.00×10^{-10}	1.73×10^{-12}
$28^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$	-1.0	9.07×10^{-2}	-5.92	-5.00×10^{-3}	5.00×10^{-5}	1.10×10^{-7}	-1.67×10^{-7}	-3.31×10^{-11}	-5.00×10^{-12}
$30^\circ \leq \theta \leq 32^\circ$	-0.99	0.83	-1.94	-5.00×10^{-4}	5.00×10^{-5}	5.00×10^{-6}	-4.61×10^{-7}	3.84×10^{-9}	-5.00×10^{-11}
$32^\circ \leq \theta \leq 34^\circ$	-1.0	3.94×10^{-2}	-3.03	-5.00×10^{-4}	-3.44×10^{-5}	-1.96×10^{-6}	-7.42×10^{-9}	-6.23×10^{-9}	2.42×10^{-12}

的非球面。图 6(a) 为点光源在 $0^\circ \leq \theta \leq 34^\circ$ 发出的光在由表 2 参数所决定的折射面上的二维光路模拟, 图 6(b) 为三维光路模拟图。



(a) 二维光路模拟图

(a) Light path simulation in two-dimensional space



(b) 三维光路模拟图

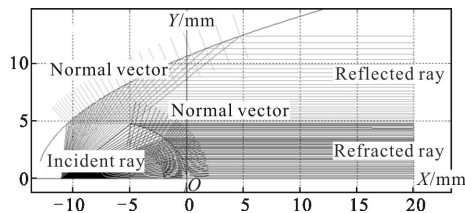
(b) Light path simulation in three-dimensional space

图 6 点光源发出的光经折射非球面反射后的光路模拟

Fig.6 Ray tracing due to the action of the aspherical refractive surface for a point source

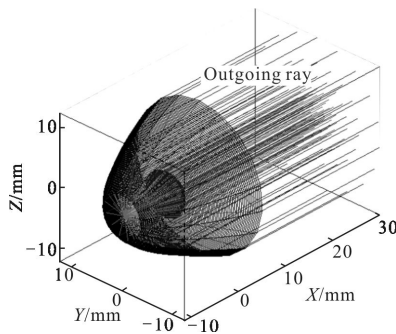
2.3 反射面①与折射面②合在一起的光路模拟

反射部分与折射部分合在一起的光路模拟图如图 7 所示。其中图 7(a)为二维光路模拟,图 7(b)为三维光路模拟。模拟显示点光源经过准直透镜准直后,出射光线的最大半视场角仅为 0.0046° ,即此非球面准直镜几乎可以完全把点光源变为准直光线。



(a) 二维光路模拟图

(a) Simulation in two-dimensional space



(b) 三维光路模拟图

(b) In three-dimensional space

图 7 点光源发出的光线经过准直透镜的光路模拟

Fig.7 Simulation of rays from the point source through the collimating lens

3 准直透镜出射光的光强分布

图 8 为 $x=6.0$ m 处沿 y 方向的光强分布。假定点光源在 $-85^\circ \leq \theta \leq 85^\circ$ 内按 θ 均匀发出 50 万条光线,光源为朗伯发光体,每一条光线所携带的能量与 $\cos\theta$ 成正比,统计 $x=6.0$ m 平面上每一条光线的位置分布及携带的能量则得到如图 8 所示的光强分布。从图 8 中可以看出,光全部落在半径为 $y \approx 13$ mm 的圆内,但在这个圆内光强分布并不均匀, $y \approx 5$ mm 圆内的光强明显大于圆外的光强, $5 \text{ mm} < y < 13 \text{ mm}$ 的圆内光强分布较为均匀, $y < 5$ mm 圆内的光强分布不均匀,在 $y \approx \pm 4.9$ mm 附近光强有尖峰,其原因是点光源按 θ 均匀发出的光线经折射非球面折射后在 $y \approx \pm 4.9$ mm 附近被压缩,使其附近的光线密度增加

(如图 7(a)所示),因而导致 $y \approx \pm 4.9$ mm 附近光强增大。

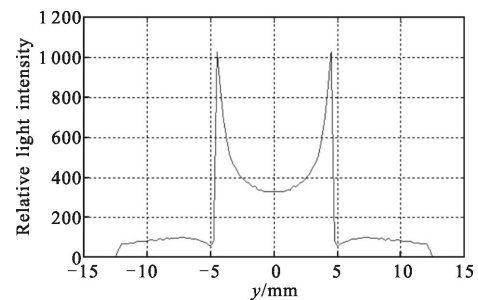


图 8 在 $x=6$ m 处平面上的光强分布

Fig.8 Light intensity distribution on a target plane at 6 m away

上述对准直透镜的研究都是相对于理想点光源而言,而实际中光源总是有一定大小,LED 是一个发光芯片,芯片尺寸影响准直透镜的准直效果,表 3 列出了计算机模拟得到的芯片尺寸与准直光束半视场角、照明区域半径之间的关系。从表中可以看出,芯片尺寸对准直光束半视场角有很大影响,随着芯片尺寸增大,半视场角迅速增大。如果要求准直光束的半视场角不超过 5° ,LED 芯片的尺寸应该小于 $0.8 \text{ mm} \times 0.8 \text{ mm}$,在这种情况下,照明区域的能量损失主要是菲涅耳损失和准直透镜材料的吸收损失。

表 3 LED 芯片尺寸与半视场角、照明区域半径之间的关系

Tab.3 Half-view-angles and radiuses of an illuminated area vs different chip sizes

Chip size/mm ²	Half-view-angle/($^\circ$)	Radius of an illuminated area/m
0.2×0.2	1.17	0.12
0.4×0.4	2.05	0.21
0.6×0.6	3.48	0.36
0.8×0.8	4.91	0.52
1.0×1.0	6.57	0.69
1.2×1.2	8.92	0.94

图 9 为 $0.8 \text{ mm} \times 0.8 \text{ mm}$ LED 经过准直透镜准直后,在离开坐标原点 $x=6$ m 照明平面上的光强分布。

从图中可以看出,照明区域中心部分光强较强,边缘部分光强相对弱一些,这种光强分布可适用于手电筒、头灯等照明。

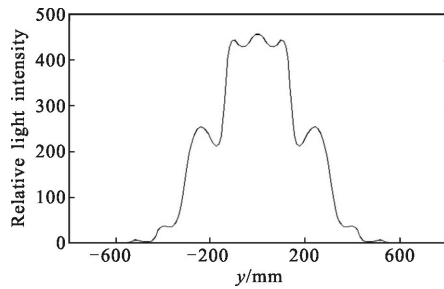


图9 0.8 mm×0.8 mm LED 光源经准直透镜后在 $x=6$ m 处平面上的光强分布

Fig.9 Light intensity distribution on a target plane at 6 m away for chip size of 0.8 mm×0.8 mm due to the action of the collimator lens

4 结 论

基于反射定律、折射定律和非球面形状的可塑性,提出了用粒子群算法设计点光源准直透镜的方法,详细描述了粒子群算法中适应度函数的构建步骤,编程实现了这种设计方法。用光线追迹模拟了点光源的准直过程,验证了设计结果的准确性。同现有文献中的准直透镜设计方法相比,粒子群算法更直观明了,实现过程也更加简单,而且可以得到准直透镜的确定方程,免去了自由曲面方法构建曲面的麻烦,也避免了由离散点拟合自由曲面过程中拟合误差所导致的目标面上照度分布偏移。应用这种方法设计的一个出光口径 30 mm 准直透镜,对于理想的点光源其半视场发散角仅为 0.0046° ,准直效果很好。应用于 0.8 mm×0.8 mm LED 光源,其出射光线的最大半视场角为 4.91° ,说明文中提出的粒子群算法用于反射折射型 LED 准直系统的设计优化具有重要的应用价值和理论意义。

参考文献:

- [1] Ding Y, Liu X, Zheng Z R, et al. Freeform LED lens for uniform illumination[J]. *Opt Express*, 2008, 16(17): 12958–12966.
- [2] Pawlak A, Zaremba K. Reflector luminaire with high power light-emitting diodes for general lighting[J]. *Appl Opt*, 2008, 47(3): 467–473.
- [3] Sun L, Jin S, Cen S. Free-form microlens for illumination applications[J]. *Appl Opt*, 2009, 48(29): 5520–5527.
- [4] Fournier F R, Cassarly W J, Rolland J P. Fast freeform reflector generation using source-target maps[J]. *Opt Express*, 2010, 18(5): 5295–5304.
- [5] Chen J J, Lin C T. Freeform surface design for a light-emitting diode-based collimating lens[J]. *Opt Eng*, 2010, 49(9): 093001.
- [6] Zhang W, Liu Q, Gao H, et al. Free-form reflector optimization for general lighting [J]. *Opt Eng*, 2010, 49(6): 063003.
- [7] Ries H, Muschawek J. Tailored freeform optical surfaces[J]. *J Opt Soc Am A*, 2002, 19(3): 590–595.
- [8] Wang G, Wang L, Li L, et al. Secondary optical lens designed in the method of source target mapping [J]. *Appl Opt*, 2011, 50(21): 4031–4036.
- [9] Wang Hong, Zhang Xiaofan, Wang Haihong, et al. Design for optical freeform reflector of LED streetlight [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2010, 39(4): 727–731. (in Chinese)
王洪, 张小凡, 王海宏, 等. 自由曲面 LED 路灯反射器设计[J]. *红外与激光工程*, 2010, 39(4): 727–731.
- [10] Zhao Huifu, Liu Hua, Sun Qiang, et al. Design of RIXR LED collimating system [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2011, 19(7): 1472–1479. (in Chinese)
赵会富, 刘华, 孙强, 等. 基于折射/全反射/反射/折射结构的 LED 准直系统的设计[J]. *光学精密工程*, 2011, 19(7): 1472–1479.