

基于 APD 接收机的 LDPC 精确译码算法

马春波,夏宝会,敖 珺,康家郡

(桂林电子科技大学 信息与通信学院,广西 桂林 541004)

摘要: 从研究 APD 光电检测接收机被检测光场的量子统计模型出发,构造了一种适用于强度调制/直接检测的自由空间光通信系统中 LDPC 译码的精确实现方法。该方法在 APD 接收机输出统计模型(Webb-Gaussian 模型)的基础上,推导了 M-PPM 的 LDPC 译码算法中初始似然比值的精确计算方法,并给出了详细的译码过程。理论分析和仿真结果表明,与目前普遍采用的 APD 近似非对称 Gaussian 统计模型下的译码性能相比较,在相同的信道条件下,该方法可以获得大约 1~2 dB 的性能增益。这为进一步提高自由空间光通信系统的性能提供了一定的理论依据。

关键词: 自由空间光通信(FSO); 雪崩光电二极管(APD); 低密度奇偶校验(LDPC)码;
多进制脉冲位置调制(M-PPM)

中图分类号: TN929.12 文献标志码: A 文章编号: 1007-2276(2015)03-1028-06

Accurate decoding arithmetic of LDPC based on APD receivers

Ma Chunbo, Xia Baohui, Ao Jun, Kang Jiajun

(Institute of Information and Communication, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: Proceed from the detected optical field's quantum statistics model of the Avalanche Photo Diode (APD) photoelectric detection receivers, an accurate realize method of Intensity-Modulation/Direct-Detection (IM/DD) Free Space Optical Communication (FSOC) fit Low Density Parity Check(LDPC)Codes decoding algorithm was investigated. This scheme, which was based on APD receivers' output statistical model (Webb-Gaussian Model), derivated the accurate calculating method of the original value of the likelihood ratio in LDPC decoding arithmetic over M-PPM demodulation. A detailed decoding process was given at the same time. By taking theoretical analysis and simulations, a result has been proved that: comparing with the most frequent used asymmetric Gaussian approximation model of APD receivers, the scheme introduced in this paper could get a gain of 1-2 dB in the decoding performance while in the same SNR. This gives the theoretical support in order to improve the performance of FSOC system further more.

Key words: free space optical communication(FSO); avalanche photo diode(APD);
low density parity check(LDPC)codes; multilevel-pulse position modulation(M-PPM)

收稿日期:2014-07-14; 修订日期:2014-08-12

基金项目:国家自然科学基金(61167006);广西自然科学基金(2012GXNSFBA053173)

作者简介:马春波(1975-),男,教授,硕士生导师,博士,主要从事光通信技术、信息安全方面的研究工作。Email: machunbo@guet.edu.cn

通信作者:敖珺(1978-),女,教授,硕士生导师,博士,主要从事通信信号处理方面的研究工作。Email: junjunao1@263.net

0 引言

自由空间光通信是一种以激光作为信息载体,不需要任何有线信道作为传输媒介的通信方式。它结合了微波通信和光纤通信的优势,是目前大容量空间通信最具竞争力的解决方案。

但是,自由空间光通信链路容易受到大气的影 响,导致接收功率衰减,光强随机起伏;并且,自然光背景噪声、接收器件噪声等也会对通信系统造成干 扰^[1],致使信道条件急剧恶化。通过引入差错控制编 码技术,可以较好的补偿大气激光通信的信道失真。 LDPC 码是迄今为止发现的最优秀的差错控制编码 之一,不仅有逼近 Shannon 限的良好性能,而且译码 复杂度较低,结构灵活,是近年来信道编码领域的研 究热点。事实证明,LDPC 结合强度调制/直接检测 (IM/DD) 技术可以进一步提高系统在大气激光环境 下的性能,有效对抗由湍流引起的时域扰动^[2-5]。在 采用 IM/DD 的自由空间光通信系统中,接收端通常 采用 APD 探测器^[6]来检测光信号。参考文献[7-8]分 析了采用 APD 接收机时的 LDPC 码译码性能,并建 立了相应的链路误码率模型,但该方法仅适用于采 用 OOK 的 IM/DD 系统。在复杂的长距离大气激光 链路峰均功率约束条件下,多进制脉冲位置调制 (M-PPM)仍然是目前最接近信道容量极限的最佳调 制方式,但是在现有的研究中涉及如何从 M-PPM 信号中提取 LDPC 译码所需的每一个调制符号比特 位的对数似然比信息问题时,都仅局限于采用 APD 探测器输出信道模型的近似表达式,即非对称高斯 模型,其结果是导致译码性能的降低。文中根据 APD 输出电子数的精确统计模型(Webb-Gaussian 模 型),提出了 LDPC 码联合 M-PPM 的译码算法的精 确实现方案,同时给出了详细的译码过程,并进一步 讨论了基于 M-PPM 的 LDPC 码在 APD 输出电子精 确统计模型和近似模型下的译码性能差异。

1 多进制脉冲位置调制

在 M-PPM 中,一个连续输入的二进制信息序 列被分成 n 比特一组,这 n 比特信息通过编码器映 射为由 $M=2^n$ 个时隙组成的信息帧的某个时隙处的 光脉冲,每个时隙的持续时间为 T_s 秒。信号在特定

的时隙被发射端以光脉冲的形式发射,接收端检测 光脉冲所在位置,进而恢复数据信息。M-PPM 信息 帧结构如图 1 所示。

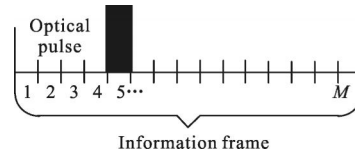


图 1 M-PPM 信息帧结构图

Fig.1 Construction of M-PPM information frame

2 APD 探测器模型下基于 M-PPM 的 LDPC 精确译码算法

2.1 APD 探测器的输出概率统计模型 (Webb-Gaussian 模型)

APD 的输出由两部分组成,一部分是 APD 产生 的雪崩电子,其分布一般用 Webb 密度函数来建模, 另一部分是后续电子器件的热噪声和表面暗电流所 产生的电子,其服从 Gaussian 分布,因此,APD 输出 电子的精确分布是这两个随机变量的卷积,称为 Webb-Gaussian 分布。

当入射光照射到 APD 工作面上,在一个时隙 T_s 内,APD 平均吸收的光子数为:

$$\bar{n}_x = \frac{\eta}{h\nu} \int_0^{T_s} [P_b(t) + \gamma P_s(t)] dt, x \in \{0, 1\} \quad (1)$$

式中: $P_s(t)$ 为入射到 APD 上的信号光功率; $P_b(t)$ 为背 景光功率; η 为 APD 的量子效率; h 为普朗克常数; ν 为光波频率; 当 $x=1$ 时, $\gamma=1$, 当 $x=0$ 时, $\gamma=\alpha_c$, α_c 为 调制器的消光系数。

APD 吸收的光子数服从 Poisson 分布,其分布为:

$$P(n) = \frac{(\bar{n}_x)^n}{n!} \cdot \exp(-\bar{n}_x) \quad (2)$$

在吸收 n 个光子的 APD 输出端得到 q 个电子 的条件概率为^[9-10]:

$$P(q|n) = \frac{n \cdot \Gamma\left(\frac{q}{1-k} + 1\right)}{q \cdot (q-n)! \cdot \Gamma\left(\frac{k \cdot q}{1-k} + n + 1\right)} \cdot \left[\frac{1+k \cdot (G-1)}{G}\right]^{\left(n + \frac{k \cdot q}{1-k}\right)} \cdot \left[\frac{(1-k) \cdot (G-1)}{G}\right]^{(q-n)} \quad (3)$$

式中: k 为电离率; G 为 APD 的平均增益。将公式(3)

在吸收光子数 n 上平均, 可得:

$$P(q) = \sum_{n=1}^q [P(q|n) \cdot P(n)] = \sum_{n=1}^q \left[\frac{n \cdot \Gamma\left(\frac{q}{1-k} + 1\right)}{q(q-n)! \cdot \Gamma\left(\frac{kq}{1-k} + n + 1\right)} \cdot \left[\frac{1+k(G-1)}{G}\right]^{(n+\frac{kq}{1-k})} \cdot \left[\frac{(1-k) \cdot (G-1)}{G}\right]^{(q-n)} \cdot \frac{(\bar{n}_x)^n \cdot \exp(-\bar{n}_x)}{n!} \right] \quad (4)$$

将公式(4)用连续韦伯分布近似表示为:

$$P(q) = g_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}_x G^2 F}} \cdot \left[1 + \frac{(y - \bar{n}_x G)(F-1)}{\bar{n}_x G F} \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{(y - \bar{n}_x G)^2}{2\bar{n}_x G^2 F \left(1 + \frac{(y - \bar{n}_x G)(F-1)}{\bar{n}_x G F} \right)} \right] \quad (5)$$

其中, 过量噪声因子 $F = kG + (2 - 1/G) \times (1 - k)$ 。

均值 $m=0$, 方差 $\sigma^2=1$ 的标准 Webb 随机变量 ω 的概率密度函数为:

$$\phi(\omega; \delta^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[1 + \frac{\omega}{\delta} \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{\omega^2}{2 \left(1 + \frac{\omega}{\delta} \right)} \right] \quad (6)$$

式中: $\delta^2 = \bar{n} \cdot F / (F - 1)^2$ 为偏斜率, $\omega > -\delta$ 。

令 $m_x = \bar{n}_x G, \sigma_x^2 = \bar{n}_x G^2 F$, 则有:

$$g_1(y) = \frac{1}{\sigma_x} \cdot \phi\left(\frac{y - m_x}{\sigma_x}; \delta_x^2\right), y > m_x - \delta_x \cdot \sigma_x \quad (7)$$

除了 APD 产生的雪崩电子外, 后续电路中的热噪声和表面暗电流所产生的电子数 q' 也要考虑, 其服从均值为 $m' = i_s T_s / e$, 方差为 $\sigma'^2 = 2BT_s(i_s T_s / e + 2k_b T T_s / (R_f e^2))$ 的 Gaussian 分布。 q' 的概率密度函数为:

$$g_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma'} \cdot \exp\left(-\frac{(y - m')^2}{2\sigma'^2}\right) \quad (8)$$

式中: i_s 为 APD 表面的暗电流; B 为噪声带宽; k_b 为 Boltzmann 常数; R_f 为负载阻抗; T 为等效噪声温度; T_s 为时隙长度; e 为电子电荷。

APD 探测器输出的总电子数 $q_{sum} = q + q'$, 所以 q_{sum} 的概率密度函数 $f_x(y)$ 为 $g_1(y)$ 与 $g_2(y)$ 的卷积, 即:

$$f_x(y) = g_1(y) * g_2(y) = \int_{m_x - \sigma_x \cdot \delta_x}^{\infty} g_1(w) \cdot g_2(y - w) dw =$$

$$\int_{m_x - \sigma_x \cdot \delta_x}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma' \sigma_x} \left[1 + \frac{w - m_x}{\sigma_x \delta_x} \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{(w - m_x)^2}{2\sigma_x^2 \left(1 + \frac{w - m_x}{\sigma_x \delta_x} \right)} \right] \cdot \exp\left[-\frac{(y - w - m')^2}{2\sigma'^2} \right] dw \quad (9)$$

一般情况下, 为了简化计算, 大多将光电转换器输出的服从 Webb 分布的电子数近似为 Gaussian 分布。对这两种分布的概率密度曲线进行了仿真, 仿真参数如表 1 所示。

表 1 概率密度曲线仿真参数

Tab.1 Parameters used in the simulation of probability density curves

Parameters	Value
Ionization rate	0.007
Quantum efficiency	0.38
Extinction coefficient	0
Optical frequency/Hz	$1 * 10^{10}$
Incident light power/W	$1.1958 * 10^{-14}$
Background light power/W	$3 * 10^{-14}$
Average gain of APD receivers	100
Time duration of a PPM slot/s	$2.62 * 10^{-9}$

仿真结果如图 2 所示。其中, 横坐标为电子数, 纵坐标为概率密度值。可以看出, 服从 Webb 分布的电子数的概率密度曲线大约在电子数取值为 500 时达到峰值, 而近似的 Gaussian 分布电子数的概率密度曲线峰值大约出现在电子数为 700 时, 并且, 相比于 Gaussian 分布, Webb 分布的曲线下降更为平缓, 且电子数分布更为集中。当电子数达到一定值, 两种分布的概率密度曲线趋近于零。分析可见, Webb 分布可以近似为非对称 Gaussian 分布, 但是由于二者

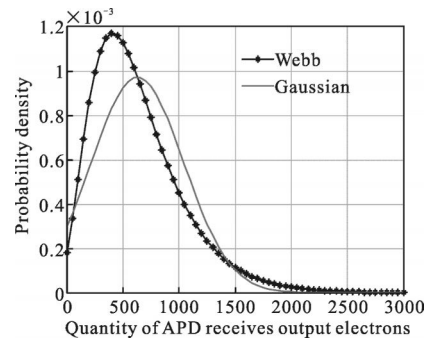


图 2 Webb 分布与近似 Gaussian 分布的概率密度曲线

Fig.2 Probability density curves of Webb distribution and approximate Gaussian distribution

之间存在一定的差异,近似的 Gaussian 模型对译码性能有一定的影响。

2.2 M-PPM 信号的对数似然值计算

由前面的推导可以得到 APD 接收机精确模型下每个时隙的概率密度值,但在 LDPC 的译码过程中需要得到 M-PPM 符号中每一个比特的似然比估计值,为了推导每一个比特的对数似然比值,首先假定定时准确、没有码间干扰,且各 M-PPM 时隙吸收的光子数是相互独立的,然后给出如下定义:

$P(x_l=c)=Pr(\text{码字 } c|\text{给定的 M-PPM 信息})$ 。其中码字只取决于那些由它所调制的 M-PPM 符号的软输出。假设共有 $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 共 n 个比特映射到一个 M-PPM 符号上, c 是其中第 l 个比特, Y 是 M-PPM 的 $M=2^n$ 个时隙的输出矢量。

设一个 M-PPM 符号的第 d 个时隙有光脉冲,其余 $M-1$ 个时隙无光脉冲,则:

$$P(Y|X)=f_1(y_d) \prod_{i \neq d}^M f_0(y_i) = \frac{f_1(y_d)}{f_0(y_d)} \prod_{i=1}^M f_0(y_i) \quad (10)$$

假设第 k 个 M-PPM 符号的第 i 个时隙的似然函数为:

$$L_i^k = \frac{f_1(y_i)}{f_0(y_i)} \quad (11)$$

将公式(9)中的 x 分别取“0”和“1”代入公式(11)中可以计算出 L_i^k 。然后将 L_i^k 代入公式(10)中,得出:

$$P(Y|X)=L_d^k \cdot \prod_{i=1}^M f_0(y_i) \quad (12)$$

由贝叶斯公式可得:

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)} = \frac{P(Y|X)P(X)}{\sum_{i=1}^M P(Y|X_i)P(X_i)} = \frac{L_d^k \prod_{i=1}^M f_0(y_i)}{\sum_{i=1}^M (L_i^k \prod_{j=1}^M f_0(y_j))} = \frac{L_d^k}{\sum_{i=1}^M L_i^k} \quad (13)$$

因此,可以得到第 k 个 M-PPM 符号第 l 个比特取值 c 的后验概率为:

$$P(x_l=c) = \frac{\sum_{X=(x_1,x_2,\dots,x_n)} L_d^k}{\sum_{i=1}^M L_i^k} \quad (14)$$

由公式(14)可得第 k 个 M-PPM 符号第 l 个比特

的对数似然比为:

$$L(p_l) = \ln \left(\frac{P(x_l=0)}{P(x_l=1)} \right) = \ln \left(\sum_{X=(x_1,x_2,\dots,x_n)} L_d^k \right) - \ln \left(\sum_{X=(x_1,x_2,\dots,x_n)} L_d^k \right) \quad (15)$$

现以 8-PPM 为例,给出 M-PPM 符号中每一个比特的对数似然比估计值的计算方法。首先,将一个 8-PPM 符号所对应的二进制信息比特序列表示为 $X=(x_1,x_2,x_3)$ 。如果 $x_1=0$,则所有可能的二进制信息比特序列是 $X_1=(0,0,0), X_2=(0,0,1), X_3=(0,1,0), X_4=(0,1,1)$;如果 $x_1=1$,则所有可能的二进制信息比特序列是 $X_5=(1,0,0), X_6=(1,0,1), X_7=(1,1,0), X_8=(1,1,1)$ 。所以 x_1 分别为“0”或者“1”时,第 k 个 8-PPM 符号的 x_1 比特位的后验概率为:

$$P(x_1=0) = \frac{L_1^k + L_2^k + L_3^k + L_4^k}{\sum_{i=1}^8 L_i^k} \quad (16)$$

$$P(x_1=1) = \frac{L_5^k + L_6^k + L_7^k + L_8^k}{\sum_{i=1}^8 L_i^k} \quad (17)$$

所以其对数似然比为:

$$L(p_1^k) = \ln \frac{P(x_1=0)}{P(x_1=1)} = \ln(L_1^k + L_2^k + L_3^k + L_4^k) - \ln(L_5^k + L_6^k + L_7^k + L_8^k) \quad (18)$$

同理可得,该调制符号所对应的 x_2 和 x_3 比特位的对数似然比值为:

$$L(p_2^k) = \ln \frac{P(x_2=0)}{P(x_2=1)} = \ln(L_1^k + L_2^k + L_5^k + L_6^k) - \ln(L_3^k + L_4^k + L_7^k + L_8^k) \quad (19)$$

$$L(p_3^k) = \ln \frac{P(x_3=0)}{P(x_3=1)} = \ln(L_1^k + L_3^k + L_5^k + L_7^k) - \ln(L_2^k + L_4^k + L_6^k + L_8^k) \quad (20)$$

将公式(18),(19),(20)计算出的每一个 8-PPM 符号所对应的信息比特的对数似然比值作为 LDPC 译码变量节点的初始值 $L(P_i)$,并代入 LDPC 码的信息更新迭代译码过程。

由于 LDPC 码的置信传播译码算法中的最小和算法运算简单,具有较低的复杂度,在硬件平台实现时被大量的采用,所以现以最小和算法为例,给出译码信息更新规则:

$$L^{(0)}(q_{ij}) = L(P_i) \quad (21)$$

$$L(r_{ji}) = \prod_{i \in R \setminus i} \text{sgn}(L(q_{i'j})) \cdot \min_{i' \in R \setminus i} (|L(q_{i'j})|) \quad (22)$$

$$L(q_{ij})=L(P_i)+\sum_{j \in C_i} L(r_{ji}) \quad (23)$$

式中： $L(P_i)$ 为变量节点 i 的初始值； $L(q_{ij})$ 为变量节点 i 传递给校验节点 j 的信息； $L(r_{ji})$ 为校验节点 j 传递给变量节点 i 的信息； R_i 为与校验节点 j 相连的变量节点的集合； C_i 为与变量节点 i 相连的所有校验节点的集合。

3 仿真结果与分析

为评估文中述及算法的性能,分别对 APD 探测器输出的 Webb 精确模型和 Gaussian 近似模型下的误码性能进行了仿真。仿真采用的调制方式为 4-PPM、8-PPM 和 16-PPM,设定译码器最大迭代次数为 50 次,信息迭代更新采用最小和算法,仿真中使用的参数如表 2 所示。

表 2 译码性能仿真参数

Tab.2 Parameters used in the simulation of decoding performance

Parameters	Value
Code length	1 056
Code rate/bps	1/2
Ionization rate	0.007
Quantum efficiency	0.38
Extinction coefficient	0
Optical frequency/Hz	1×10^{10}
Load impedance/k Ω	100
Background light power/W	3×10^{-14}
Average gain of APD receivers	100
Time duration of a PPM slot/s	2.62×10^{-9}
Surface dark current of APD/A	2×10^{-9}
Thermal noise equivalent bandwidth/Hz	$1.908 4 \times 10^8$
Equivalent thermal noise temperature/K	300

仿真结果如图 3 所示。其中,纵坐标为误码率,横坐标为比特信噪比:

$$SNR_{dB}=10\log_{10}(\rho_0 M/\log_2 M) \quad (24)$$

式中： $\rho_0=(m_1-m_0)^2/(\sigma_0^2+\sigma'^2)$ 为时隙信噪比； M 为 M-PPM 的进制数。

实线所示为 Webb-Gaussian 模型下的误码率曲线,虚线所示为近似的 Gaussian 模型下的误码率曲线。可以看出,当信噪比较低时,Webb-Gaussian 模型和近似的非对称 Gaussian 模型下的误码性能非常

接近,译码性能都不太理想,且随着信噪比的增大,误码性能改善并不明显。当信噪比增大到一定值后,两种模型下的误码性能曲线开始快速收敛,且二者之间的误码性能差距变大,精确模型明显优于近似的高斯模型,在相同的信道条件下可以获得大约 1~2 dB 的性能增益。随着信噪比的继续增大,误码率趋近于零。同时,由相同模型下的 4-PPM、8-PPM 和 16-PPM 的误码性能曲线可以看出,随着调制阶数 M 的增大,误码性能下降。

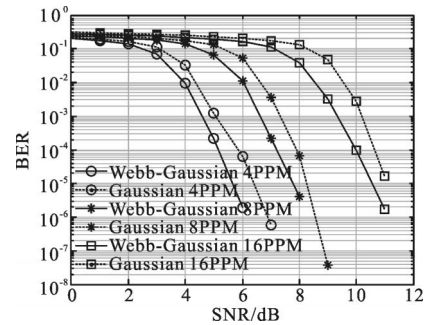


图 3 Webb-Gaussian 模型和 Gaussian 模型下基于 M-PPM 的 LDPC 码的译码性能曲线

Fig.3 Decoding performance curves of M-PPM based LDPC codes under Webb-Gaussian model and Gaussian model

4 结论

文中针对使用 APD 作为接收机,LDPC 联合 M-PPM 的无线激光通信系统的译码进行了优化。基于 APD 接收机输出电子数的 Webb-Gaussian 模型,提出了 M-PPM 下 LDPC 码译码算法的精确实现方案,并采用最小和算法进行了验证。仿真结果表明,基于 M-PPM 的 LDPC 码在 Webb-Gaussian 模型下能够获得比高斯近似模型下更低的误码率,为提高通信系统的误码性能提供了理论依据。

参考文献:

[1] Leng Jiaofeng, Hao Shiqi, Lv Xuguang, et al. Modified decoding algorithm of LDPC codes for wireless optical communication [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(8): 2130-2135. (in Chinese)
冷蛟锋, 郝士琦, 吕旭光, 等. 一种改进的无线光通信 LDPC 码译码算法 [J]. 红外与激光工程, 2012, 41(8): 2130-2135.

[2] Wu Yongsheng, Yang Aiyong, Sun Yunan, et al. An

- enhanced soft value calculations for LDPC coded pulse – position–modulation[J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16(5): 745–747.
- [3] Liu Min. Research on the transmission performance of LDPC and PPM in wireless laser communication system[D]. Xi'an: Xidian University, 2013. (in Chinese)
刘敏. 无线激光通信系统中 LDPC 码和 PPM 的传输性能研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2013.
- [4] Yuan Jianguo, Wang Wang, Liang Tianyu. A novel construction method of QC–LDPC codes for high–speed long–haul optical communication systems [J]. *Journal of Optoelectronics Laser*, 2012, 23(5): 906–909. (in Chinese)
袁建国, 王望, 梁天宇. 一种高速长距离光通信系统中 QC–LDPC 码的构造方法 [J]. 光电子·激光, 2012, 23(5): 906–909.
- [5] Yuan Jianguo, Wang Wang, Tang Bin, et al. A novel construction method of QC–LDPC codes based on Galois field multi– plicative group [J]. *Journal of Optoelectronics Laser*, 2012, 23(7): 1304–1308. (in Chinese)
袁建国, 王望, 汤彬, 等. 光通信系统中基于伽罗华域乘群的 QC–LDPC 码的一种新颖构造方法 [J]. 光电子·激光, 2012, 23(7): 1304–1308.
- [6] Zheng Ruitong, Wu Guan hao. Pulsed one –dimensional scannerless LiDAR system based on linear APD array [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41 (1): 96–100. (in Chinese)
郑睿童, 吴冠豪. 基于线阵 APD 探测器的脉冲式一维非扫描激光雷达系统 [J]. 红外与激光工程, 2012, 41 (1): 96–100.
- [7] Xiang Jinsong, Ma Shengming, Liu Fei, et al. Decoding technology and performance analysis of LDPC code over APD receiver for space optical communication[J]. *Journal of Optoelectronics Laser*, 2013, 24(4): 687–691. (in Chinese)
向劲松, 马圣明, 刘飞, 等. 空间光通信 APD 接收机下 LDPC 码译码方法及性能分析 [J]. 光电子·激光, 2013, 24 (4): 687–691.
- [8] Chen Chunyi, Yang Huamin, Tong Shoufeng, et al. Modeling and power analysis for uplink of laser communication between airplane and satellite[J]. *Journal on Communications*, 2008, 29(1): 125–131. (in Chinese)
陈纯毅, 杨华民, 佟首峰, 等. 飞机对卫星激光通信上行链路建模与功率分析[J]. 通信学报, 2008, 29(1): 125–131.
- [9] McIntyre R J. The distribution of gains in uniformly multiplying avalanche photodiodes: theory [J]. *IEEE Trans on Electron Devices*, 1972, 19(6): 703–713.
- [10] Conradi J. The distribution of gains in uniformly multiplying avalanche photodiodes: experimental [J]. *IEEE Trans on Electron Devices*, 1972, 19(6): 713–718.