

应用 Collins 公式和像差的 Zernike 展开分析激光光束在实际光学系统传输特性

李远洋^{1,2}, 刘立生^{1,2}, 王挺峰¹, 邵俊峰^{1,2}, 郭 劲¹

(1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所 激光与物质相互作用国家重点实验室, 吉林 长春 130033; 2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 在 Collins 公式基础上, 将像差项用 Zernike 多项式展开后加入衍射积分, 获取实际激光光束通过光学系统后的光强分布。对相关理论进行仿真, 验证了理论的正确性。同时针对实际激光聚焦光学系统, 从统计规律角度分析了系统公差引入对 Gaussian 光束聚焦光斑带来的影响。计算结果表明聚焦光斑总体随波像差 RMS 值增大而增大, 不同像差分布形式对聚焦光斑特性影响较大。未分配系统公差时, 激光聚焦光斑半径为 1.520 mm; 引入系统公差后, 聚焦光斑半径有 90% 概率小于 2.085 mm, 平均值为 1.700 mm, 标准偏差为 0.238 mm。

关键词: 公差像差; Collins 公式; Zernike 多项式; Gaussian 光束

中图分类号: O436.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2015)03-0857-06

Analysis of laser beam propagation through optical system using Collins formula and Zernike polynomials

Li Yuanyang^{1,2}, Liu Lisheng^{1,2}, Wang Tingfeng¹, Shao Junfeng^{1,2}, Guo Jin¹

(1. State Key Laboratory of Laser Interaction with Matter, Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: The method to obtain the intensity distribution of laser beam after propagation through practical optical systems was proposed by combining the Collins formula and the Zernike polynomials for aberrations. The simulations were given to prove the correctness of the theory. Using this theory, the statistical change of the focus spots of Gaussian beams affected by the tolerance aberrations was presented. As a result, it shows that the spot radii increase with the RMS wave front aberrations and the detail forms of tolerance aberrations are important for the issue of laser beam focusing. Detail analysis of a practical system demonstrates that the spot radius is 1.520 mm without the tolerance aberrations. After the tolerance is introduced, the spot radius has an average of 1.700 mm, a standard deviation of 0.238 mm and it is smaller than 2.085 mm with a probability of 90%.

Key words: tolerance aberration; Collins formula; Zernike polynomial; Gaussian beam

收稿日期: 2014-07-03; 修订日期: 2014-08-10

基金项目: 吉林省科技发展计划(20126015)

作者简介: 李远洋(1988-), 男, 博士生, 主要从事激光传输与光学设计方面的研究。Email: liyuanyang1108@sina.cn

导师简介: 郭劲(1964-), 男, 研究员, 博士生导师, 博士, 主要从事激光应用方面的研究。Email: Guojin_1964@126.com

0 引言

在激光光学系统设计和公差分析过程中,研究激光光束经过像差光学系统的传输问题十分重要。Collins 衍射积分作为研究激光经过光学系统传输的有力工具,在计算 Gaussian 光束的光强分布和焦移等方面取得巨大成功^[1-4]。但 Collins 公式对光束传输的研究限于近轴情况,当光学系统引入像差后,需要对 Collins 公式进行改进。一些文献将像差作为光场的调制加在入瞳处,得到球差对光束传输的影响^[4]。但是由于影响光学系统因素的复杂性,仅仅讨论球差对激光传输影响是不够的。一般光学系统在设计 and 装调时会产生多种像差^[5],为了对光学系统进行准确分析,需要综合考虑所有像差对激光光束的作用。在对复杂像差光学系统的研究中,Zernike 多项式得到广泛应用^[6-7],因此借助于 Zernike 多项式,可将光学系统所引入的像差带入衍射积分中,给出任意像差对激光光束传输的影响。文中详细分析了激光光束经过像差光学系统传输的计算模型,并结合具体的光学系统给出数值分析结果。

1 理论分析

1.1 Collins 衍射积分

Collins 运用程函概念将光束的衍射效应与光线矩阵联系起来,推导出积分核中含有光线矩阵元的广义惠更斯-菲涅耳衍射积分公式。该公式适用于衍射面和观察面之间存在复杂光学系统的情况,Collins 公式如下^[3]:

$$E_o(r_o, \varphi_o, z) = \left(-\frac{i}{\lambda B}\right) \exp(ikz) \iint E_i(r_i, \varphi_i, 0) \cdot P(r_i, \varphi_i) \cdot \exp\left\{\frac{ik}{2B} [Ar_i^2 + Dr_o^2 - r_i r_o \cos(\varphi_i - \varphi_o)]\right\} r_i dr_i d\varphi_i \quad (1)$$

式中: A, B, D 为光学系统 ABCD 光线矩阵的矩阵元; r_i 和 φ_i 为入射面极坐标; r_o 和 φ_o 为观察面极坐标, $k=2\pi/\lambda$,其中 λ 是波长; $E_i(r_i, \varphi_i, 0)$ 为入射到光学系统中的光场; $E_o(r_o, \varphi_o, z)$ 为观察面上的光场; $P(r_i, \varphi_i)$ 为孔径函数。Collins 公式是对惠更斯-菲涅耳衍射积分的推广,适用于复杂光学系统,但该公式受到近轴近似的限制,公式中只包含光学系统的一阶参数。用 Collins 公式讨论有像差光学系统 Gaussian 光束传

输,需要对其进行改进。

1.2 光学系统像差引入

参考文献[8]所述在光学系统中引入像差的方法如图 1 所示。激光光束从入瞳入射,经过光线矩阵表示的光学系统后,可以通过公式(1)得到出瞳光场。 A_1, B_1, C_1 和 D_1 是从入瞳到出瞳光学系统的矩阵元。但由于入瞳和出瞳互为共轭面,光线传输矩阵中 $B_1=0$,不能直接应用公式(1)。令公式(1)中 $B_1 \rightarrow 0$,积分号内的指数项整理成 δ 函数的形式 $\delta(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \cdot \exp(-N^2 \pi r^2)$ 得到

$$E_2(r_2, \varphi_2, z_2) = \frac{1}{A_1} \exp(ik(z_2 - z_1)) \times \exp\left(\frac{ikC_1}{2A_1} r_2^2\right) E_1\left(\frac{r_2}{A_1}, \varphi_1, z_1\right) \quad (2)$$

式中: $E_1(r_1, \varphi_1, z_1)$ 为入瞳上光场分布; $E_2(r_2, \varphi_2, z_2)$ 为出瞳上光场。

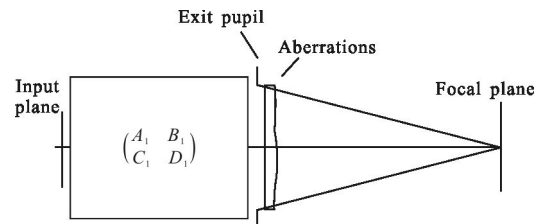


图 1 光学系统引入像差后的模型

Fig.1 Model of aberrated system

令像差作为出瞳光场的调制,然后继续传播距离 L 后到达焦面,公式描述为:

$$E_3(r_3, \varphi_3, z_3) = -\frac{i \exp(ikL)}{\lambda L} \iint_{S_2} E_2(r_2, \varphi_2, z_2) \exp(2i\pi W) \cdot \left(\frac{r_2}{p_2}, \varphi_2\right) \cdot \exp\left\{\frac{ik}{2L} [r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)]\right\} r_2 dr_2 d\varphi_2 \quad (3)$$

式中: $E_3(r_3, \varphi_3, z_3)$ 为焦面上的光场; S_2 代表出瞳面; $W(r_2/p_2, \varphi_2)$ 为系统波像差,其中 p_2 为出瞳半径。

一些参考文献在讨论像差对激光光学系统影响时,像差作为光场的调制加在入瞳光场上^[3],但是没有给出证明,下文将给出像差调制项加在入瞳处的可行性分析。注意到公式(2)中 E_2 和 E_1 光强分布形式相同,但是相位中出现二次项因子。二次项因子不影响光强的分布。虽然公式(2)中 E_2 和 E_1 的径向变量相差 A_1 倍,但是当径向坐标相对于各自孔径归一

化后,光强分布完全相同。而公式(3)中系统波像差 $W(r_2/p_2, \varphi_2)$ 只与归一化坐标有关,坐标的倍率因子对波像差不起作用,所以入瞳和出瞳对于系统波像差来讲完全等价。将公式(2)代入公式(3)中,并且考虑到上述的关系,可以得到:

$$E_3(r_3, \varphi_3, z_3) = \left(-\frac{i}{\lambda B_2} \right) \exp(ikL + z_2 - z_1) \times \int_{S_1} E_1(r_1, \varphi_1, z_1) \cdot \exp\left(i \cdot 2\pi W\left(\frac{r_1}{p_1}, \varphi_1 \right) \right) \cdot \exp\left\{ \frac{ik}{2B_2} [A_2 r_1^2 + D_2 r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)] \right\} r_1 dr_1 d\varphi_1 \quad (4)$$

式中: S_1 代表入瞳面; A_2, B_2 和 D_2 是从系统从入瞳到观察面的等效光线矩阵; p_1 为入瞳半径。利用调制光场的像差对入瞳和出瞳的等价性,将像差移入入瞳后系统简化模型如图 2 所示。由公式(4)可知,已知激光聚焦系统的 $ABCD$ 矩阵及其波像差函数 $W(r, \varphi)$, 通过数值计算就可得到焦面上光强分布,模拟光束经过实际光学系统的传输特性。

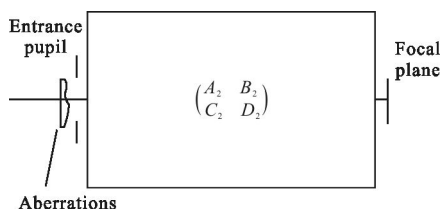


图 2 将像差调制项移至入瞳光场之后的简化模型

Fig.2 Model moving the aberration terms to the entrance pupil

1.3 Zernike 多项式

激光聚焦系统波像差函数 $W(r, \varphi)$ 可展开为 Zernike 多项式形式。光强均匀分布圆形孔径波像差可以通过圆域标准 Zernike 多项式拟合^[7]。但对于激光聚焦系统,孔径上的光强分布为高斯分布,如果应用圆域标准 Zernike 多项式进行高斯孔径的像差拟合,圆域标准 Zernike 多项式会失去正交性。但是 Zernike 多项式正交性的有无对像差拟合精度没有影响,圆域标准 Zernike 多项式的完备性保证了多项式项数足够多,就可以达到所要求的拟合精度^[9]。所以将波像差函数 $W(r, \varphi)$ 展开为圆域标准 Zernike 多项式的形式为:

$$W(r, \varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j Z_j(r, \varphi) \quad (5)$$

式中: $Z_j(r, \varphi)$ 代表圆形标准 Zernike 多项式; r 和 φ 为

归一化极坐标; a_j 表示拟合系数。一般情况下,取标准 Zernike 多项式的前 45 项就可以满足拟合精度。

Zernike 的具体形式表示方法有很多种,这里采用 Noll 排序法。Zernike 多项式定义为^[9]:

$$\begin{aligned} Z_{\text{even}}(r, \varphi) &= \sqrt{2(n+1)} R_n^m(r) \cos(m\varphi), m \neq 0 \\ Z_{\text{odd}}(r, \varphi) &= \sqrt{2(n+1)} R_n^m(r) \sin(m\varphi), m \neq 0 \\ Z_j(r, \varphi) &= \sqrt{n+1} R_n^0(r), m=0 \end{aligned} \quad (6)$$

其中,

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s \right)! \left(\frac{n-m}{2} - s \right)!} r^{n-2s} \quad (7)$$

n 和 m 是非负的整数,且 $n-m$ 是非负的偶数。Zernike 多项式可以拟合任意形式、任意大小的波像差,在光学设计和光学检测中应用十分普遍。光学系统的 Zernike 像差系数 a_j 可以很容易从光学设计软件中获取。把像差系数 a_j 与圆域 Zernike 多项式(6)的乘积带入衍射积分公式(4)中,通过数值计算的方法可以算出任意波像差对焦平面光强分布的影响。

2 像差对激光聚焦光斑影响的数值计算

数值计算基于一个激光聚焦系统。工作波长为 $1.67 \mu\text{m}$,孔径光阑与入瞳重合,入瞳直径为 10 mm ,根据系统各个光学曲面的曲率和相对距离,求出该激光聚焦系统的 $ABCD$ 矩阵,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1858 & 9970.3650 \\ -9.8515\text{e-}05 & 0.0956 \end{pmatrix} \quad (8)$$

将聚焦系统 $ABCD$ 矩阵(8)和 Zernike 像差系数代入公式(4)中,对其做数值积分,可以得到焦平面上的光强分布。取 Zernike 系数为 $a_{11}=0.5$ 时,即有 RMS 值为 0.5λ 的球差,系统聚焦效果如图 3(a)所示。图 3(b)为 $a_7=0.5$,即有 RMS 值为 0.5λ 的彗差时,系统的聚焦效果。如图 3 所示,带有球差系统的聚焦光斑周围出现强度较大的圆环;带有彗差光学系统的聚焦光斑表现出带彗尾的光斑形式,说明该方法可以精确仿真不同像差形式对聚焦光斑的影响。

上述仿真结果充分说明在获得光学系统的 Zernike 系数后,将系统的近轴参数和像差分布代入公式(4)就能模拟实际光束传输。上面只针对两种特定像差分析了像差对聚焦光斑的影响规律。下面以该激光聚焦系统公差为例,分析多种像差综合作用

对激光聚焦光斑半径的影响。

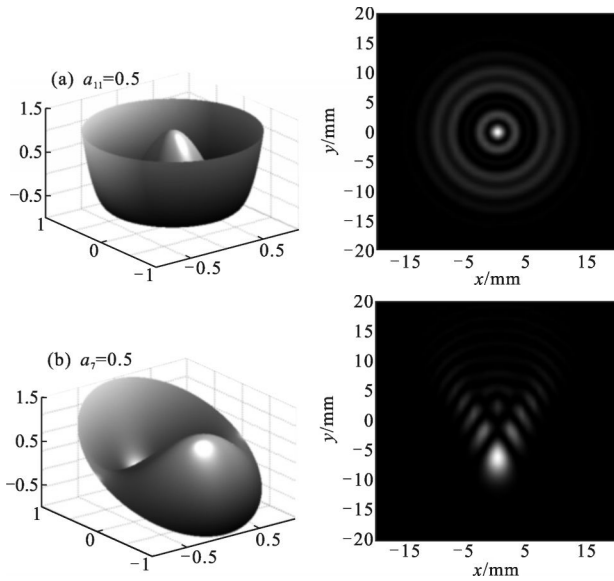


图 3 不同像差下聚焦光斑能量分布

Fig.3 Intensity distribution of focused laser beam under different kinds of aberrations

3 系统公差对聚焦光斑影响

3.1 公差分析

对该激光聚焦系统进行公差分析。公差分配过程中检验光波长为 $0.633 \mu\text{m}$, 曲率公差为 ± 2 个干涉条纹, 厚度公差为 $\pm 0.02 \text{ mm}$, 偏心公差为 $\pm 0.02 \text{ mm}$, 倾斜为 $30''$, 局部面型公差为 ± 0.2 个干涉条纹, 折射率公差为 ± 0.0005 。该系统设计时可通过调节前组和后组透镜间距进行公差补偿。该方式可补偿曲率公差, 厚度公差和折射率公差, 但是无法对偏心、倾斜和面型公差进行补偿。加入补偿后进行公差分析, 得到 90% 的扰动透镜组 RMS 波像差小于 0.0259λ , 残余像差较小, 光学系统设计合理。由于机械制造等原因, 造成间距补偿误差, 取保守值 $\pm 20 \mu\text{m}$ 。从精确补偿的 20 组透镜中随机取出若干组透镜, 加入补偿误差后, 分析结果表明 RMS 波像差的最大值为 0.0876λ , 最小值为 0.0281λ , 平均值为 0.0445λ 。Monte-Carlo 方法分析表明 90% 的系统的波像差小于 0.0654λ 。

3.2 系统公差对光斑影响

从使用 Monte-Carlo 方法产生的随机系统中取 3 个系统作为特例, 分析公差对聚焦光斑特性的影响。随机生成的透镜组不只受到单一像差的作用, 光束通过该系统后产生的聚焦光斑是多种像差综合作

用的结果。将公差产生的波像差通过 Zernike 多项式的形式给出后代入公式(4)中, 做数值积分可以得到焦平面上光强分布。图 4 为对数坐标下, 3 个系统不

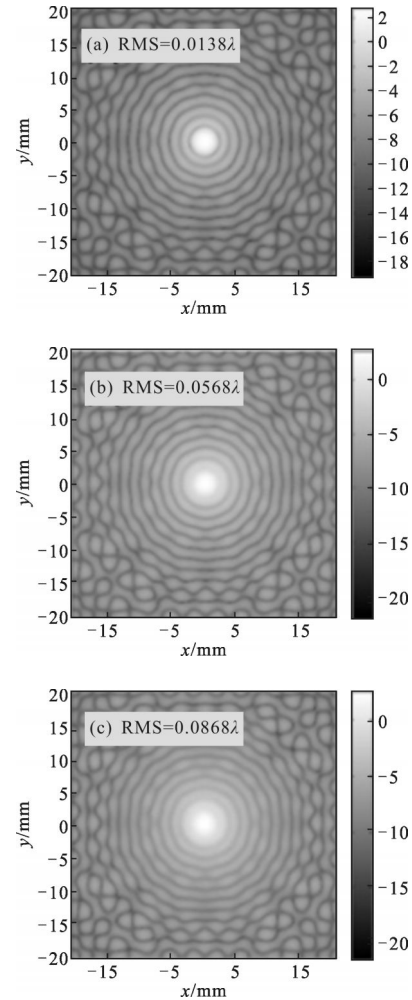


图 4 聚焦光斑在对数坐标下的光强分布图

Fig.4 Logarithm intensity distribution of laser beam focus spot

同 RMS 波像差在焦平面形成聚焦光斑, 从图中可以看出当波像差 RMS 值逐渐变大时, 光斑的中心主极大峰值光强减少, 周围衍射环的能量逐渐变强。图 4(a) 的 RMS 值为 0.0138λ , 此时可以清楚看到中心主极大与一级衍射圆环间的分界线, 衍射条纹清晰, 能量集中度较好; 当 RMS 值逐渐增大到 0.0868λ 时, 由图 4(c) 看出, 中心主极大与一级衍射环的边界变得模糊不清, 能量开始向周围扩散。图 5 为上述 3 个受公差影响系统对应 RMS 波像差量值为 $0.0138, 0.0568$ 和 0.0868 个波长时, 焦平面聚焦光斑的环围能量 (PIB)。计算得光斑 86.5% 环围能量所对应的半径分别为 $1.540 \text{ mm}, 1.851 \text{ mm}$ 和 2.308 mm 。激光光束经

过理想光学系统的聚焦光斑半径为 1.520 mm, 加入随机分配公差后, 聚焦光斑半径均有所变大, 变大幅度与 RMS 波像差有关。

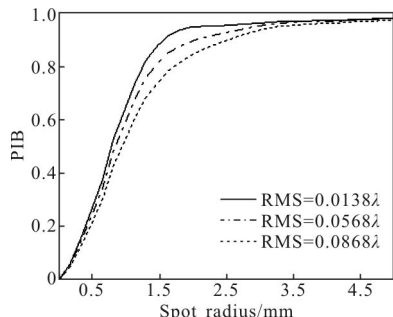


图 5 RMS 波像差分别为 0.0138λ, 0.0568λ 和 0.0868λ 时 PIB 曲线
Fig.5 PIB curves of focus spot whose RMS wavefront aberration are 0.0138λ, 0.0568λ and 0.0868λ

由于公差的随机性, 无法准确预测公差像差的形式, 所以下面从概率角度分析 RMS 波像差和聚焦光斑半径变化之间的具体关系。由 Monto-Calo 方法进行 3 次随机试验, 每次试验中系统的光斑半径随 RMS 波像差变化的曲线如图 6 所示。从曲线中可以看出, 随着 RMS 波像差值的增大, 聚焦光斑半径有增大趋势, 但是在个别位置处出现跳变。而且 3 条曲线都受到跳变影响, 说明这种现象的普遍性。出现这种现象的原因主要是 RMS 相同时, Zernike 多项式的各种组成成分不同, 不同的像差形式对光斑大小产生影响。图 7(a)为 RMS 值为 0.0778λ 的波像差, (b)为 RMS 值为 0.0781λ 的波像差, 从图中可以看出波像差成分组成不同。虽然图 7(a)的 RMS 值小于 (b), 但是从(c)的 PIB 曲线中可以看出, 大 RMS 光斑的能量聚集程度优于小 RMS 值的聚焦光斑, 说明像差成分对聚焦效果有重要影响。

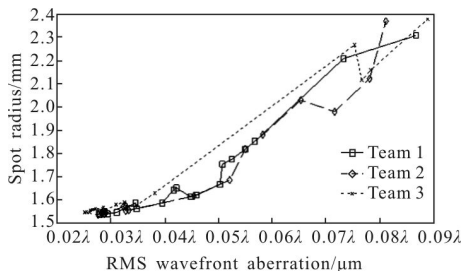


图 6 激光聚焦半径随 RMS 波像差变化曲线
Fig.6 Relation of laser focus spot radius and RMS wavefront aberration

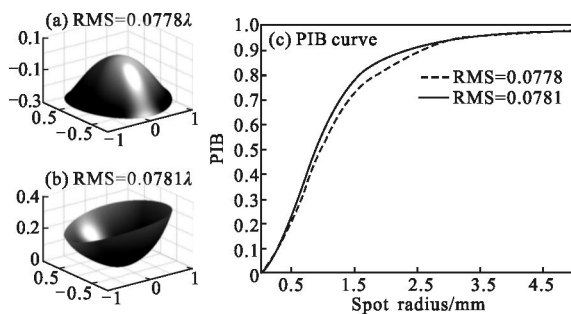


图 7 光瞳上波像差分布及其桶中功率曲线
Fig.7 Wavefront aberrations at pupil and their PIB curves

继续增大随机系统数量, 得到图 8 为 200 个随机分配公差系统的光斑半径随 RMS 值变化。从图中中点的疏密变化可以说明像差变化基本呈现正态分布。用最小二乘法对随机分布的点做多项式拟合, 拟合多项式为:

$$v=183.93 \times t^2 - 6.201 \times t + 1.592 \quad (9)$$

式中: v 为光斑半径; t 为系统 RMS 波像差值。拟合曲线见图 8, 是一条二次曲线。拟合结果反映光斑半径变化趋势是随着 RMS 值的增加而变大, 而且从曲线中可以看出变化率在逐渐变大。当系统 RMS 值较小时, 公式(9)可以对系统光斑半径进行粗略的评估, 确定系统 RMS 值的合理取值范围。经统计, 200 组透镜组产生的光斑半径 90% 小于 2.085 mm, 平均值为 1.700 mm, 标准差为 0.238 mm。未引入系统公差时, 聚焦光斑半径为 1.520 mm。引入系统公差后, 聚焦光斑半径变大。比较理想设计下与加入公差后光斑半径的平均值和标准偏差, 发现光斑半径的变化量不大, 反映出该系统的设计对公差不敏感, 是比较好的设计。

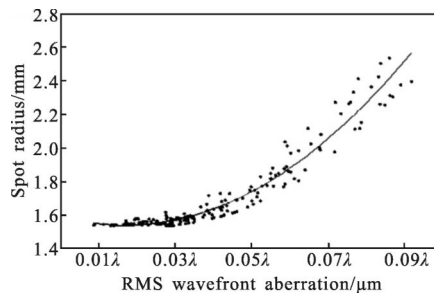


图 8 聚焦半径随 RMS 波像差值的变化和拟合曲线
Fig.8 Relation of spot radius and RMS wavefront aberration

4 结论

文中以 Collins 衍射积分公式为基础, 推导加入

Zernike 像差后光学系统的衍射积分,证明了 Zernike 像差在系统入瞳和出瞳的等价性。用数值计算方法,仿真分析了 Zernike 像差对激光聚焦系统聚焦效果的影响,表明该方法可正确获取各种像差下聚焦光强分布。设计完成的激光聚焦系统,未引入公差时其 RMS 波像差为 0.004λ ,计算得光斑半径为 1.520 mm ;加入公差后,用 Monto Carlo 方法随机生成的 200 个系统,RMS 波像差以 90%概率小于 0.0654λ ,可得光斑半径以 90%概率小于 2.085 mm ,平均值为 1.700 mm ,标准偏差为 0.238 mm 。光斑半径整体随 RMS 波像差增大而增大,经拟合,两者基本满足二次曲线关系;但光斑半径随 RMS 波像差局部存在跳变,表明 RMS 波像差大小不能完全决定聚焦效果,其具体像差成分一定程度上影响聚焦特性。以上研究结果表明,该方法可以准确计算波像差对激光聚焦效果的影响,在工程上有较强实用性,对设计良好的激光聚焦系统和对系统聚焦效果的分析具有指导意义。

参考文献:

- [1] Wang Kuilong. Focal shift in focused anomalous hollow beam [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(4): 869–874. (in Chinese)
王奎龙. 聚焦异常空心光束的焦移 [J]. 红外与激光工程, 2012, 41(4): 869–874.
- [2] Gao Ming, Wang Fei. Depolarization characteristics of polarized and partially coherent laser beam propagated in turbulent atmosphere [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(4): 994–998. (in Chinese)
高明, 王菲. 偏振部分相干激光在大气传输的退偏特性 [J]. 红外与激光工程, 2012, 41(4): 994–998.
- [3] Yura H T, Hanson S G. Optical beam wave propagation through complex optical systems[J]. *J Opt Soc Am A*, 1987, 4(10): 1931–1948
- [4] Siegman A E. Analysis of laser beam quality degradation caused by quartic phase aberrations[J]. *Applied Optics*, 1993, 32(30): 5893–5901.
- [5] Zhao Jianke, Li Xia, Xu Liang, et al. Laser beam wave-front error reduction accuracy analysis [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(1): 79–83. (in Chinese)
赵建科, 李霞, 徐亮, 等. 激光缩束系统波前畸变分析[J]. 红外与激光工程, 2013, 42(1): 79–83.
- [6] Wang Qitao, Tong Shoufeng, Xu Youhui. On simulation and verification of the atmospheric turbulent phase screen with Zernike Polynomials [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(7): 1907–1911. (in Chinese)
王奇涛, 佟首峰, 徐友会. 采用 Zernike 多项式对大气湍流相位屏的仿真和验证[J]. 红外与激光工程, 2013, 42(7): 1907–1911.
- [7] Tang Wei, Guo Jin, Shao Junfeng, et al. Analysis of far field characteristics with repetition frequency of TEA CO₂ laser [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(9): 2380–2385. (in Chinese)
汤伟, 郭劲, 邵俊峰, 等. 激光重频对脉冲非稳腔 TEA CO₂ 激光远场传输特性的影响分析 [J]. 红外与激光工程, 2013, 42(9): 2380–2385.
- [8] Born M, Wolf E. Principles of Optics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999: 517–553.
- [9] Michael Bass. Handbook of Optics Volume II [M]. US: McGraw-Hill Companies, Inc, 2010.