

部分相干双曲正弦-高斯光束的传输和聚焦特性

李长伟,康小平,何 仲

(琼州学院 理工学院,海南 三亚 572022)

摘 要: 为了研究部分相干双曲正弦-高斯(SHG)光束通过像散透镜的传输和聚焦特性,利用部分相干光的传输公式,推导了光束通过像散透镜后光强分布解析的表达式,并据此得到了光束束腰宽度、远场发散角和 M^2 因子的解析表达式,并对光束强度分布和束腰宽度进行了数值计算和分析。结果表明:部分相干 ShG 光束聚焦的光强分布与像散系数 C_6 ,空间相干参数 β ,离心参数 a ,菲涅耳数 N_w 和位置 (x, y, z) 有关。像散导致 x 和 y 方向束宽不同。但 M^2 因子与像散无关,并随相干性的增加和离心参数的减小而减小。适当改变像散和空间相干性,在几何焦面和其它位置可实现部分相干 ShG 光束的空间整形。

关键词: 传输和聚焦特性; 像散透镜; 部分相干双曲正弦-高斯(ShG)光束

中图分类号: O435 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2015)02-0486-05

Propagation and focusing properties of partially coherent sinh-Gaussian beams

Li Changwei, Kang Xiaoping, He Zhong

(College of Science and Engineering, Qiongzhou University, Sanya 572022, China)

Abstract: In order to study the propagation and focusing properties of partially coherent sinh-Gaussian (SHG) beams through an astigmatic lens, the analytical expression of the intensity was derived based on the transmission formula of partially coherent beams, and the analytical expression of the beam width, the far-field divergence angle and the M^2 factor were deduced, the intensity and the beam width were calculated and analyzed. It is found that the intensity distributions of focused partially coherent ShG beams depend on the astigmatic coefficient C_6 , spatial coherence parameter β , decentered parameter a , Fresnel number N_w and position (x, y, z) in general. The astigmatism results in a difference between the beam widths in the x and y directions, but the M^2 factor is independent of the astigmatism and decreases as the coherence increases and the decentered parameter decreases. The spatial beam shaping is achievable at the geometrical focal plane and other positions by properly varying the astigmatism and spatial coherence.

Key words: propagation and focusing properties; astigmatic lens; partially coherent sinh-Gaussian (ShG) beam

收稿日期:2014-06-05; 修订日期:2014-07-10

基金项目:琼州学院 2013 年度科研项目(QYQN201329)

作者简介:李长伟(1981-),男,讲师,硕士,主要从事激光传输与变换方面的研究。Email:changwei666@126.com

0 引言

部分相干光的传输和聚焦特性是一个有重要理论和实际应用意义的研究课题^[1-2]。参考文献中常用高斯-谢尔模型光束作为部分相干光的典型例,对此已进行了许多研究^[3]。实际工作中常需要不同光强分布、不同相干特性的部分相干光。在国内外对除高斯-谢尔模型以外的多类部分相干光的研究工作很多,其原因不仅是理论上的意义,也有实际应用价值(例如准分子激光材料加工和激光核聚变中部分相干光的空间整形等)。其中,常用的一种方法是引入高斯项的空间相干度,从完全相干光的电场构造部分空间相干光的交叉谱密度函数。实验上,可将高斯光束通过一个双曲正弦光阑后出射,光束成为双曲正弦-高斯光束(ShG),再使 ShG 光束通过一个旋转毛玻璃片或液晶(随机位相板)就得到部分相干 ShG 光束^[4-5]。另外,在光束传输和聚焦特性的研究中,透镜像差的影响也是实际工作中需考虑的问题^[6]。文中以部分相干 ShG 光束为例,对部分相干 ShG 光束通过像散透镜后的传输和聚焦特性做了研究,重点分析了像散和空间相干参数对光强分布和光束参数的影响。

1 理论推导

设焦距为 f 的像散透镜位于 $z=0$ 处,入射到像散透镜的部分相干 ShG 光束可用交叉谱密度函数表示为^[7-8]:

$$W(x_1', y_1', x_2', y_2', 0) = I_0 \exp \left[- \left(\frac{x_1'^2 + x_2'^2}{w_0} + \frac{y_1'^2 + y_2'^2}{w_0} \right) \right] \times \exp \left[- \left(\frac{(x_1' - x_2')^2}{2\sigma^2} - \frac{(y_1' - y_2')^2}{2\sigma^2} \right) \right] \times \sinh(\Omega_0 x_1') \sinh(\Omega_0 x_2') \sinh(\Omega_0 y_1') \sinh(\Omega_0 y_2') \quad (1)$$

式中: w_0 和 σ 分别为入射光束高斯部分束腰宽度和空间相关长度; (x_1', y_1') 和 (x_2', y_2') 分别为 $z=0$ 面上两点的坐标; I_0 为一常数; Ω_0 为与双曲正弦项有关的参量。

光学元件的像散引入的相位因子可表示为^[6]:

$$\exp[-ikC_6(x'^2 - y'^2)] \quad (2)$$

式中: k 为波数,与波长 λ 的关系为 $k=2\pi/\lambda$; C_6 为像散系数。由部分相干光的传输公式(1)并考虑像散的影响可得部分相干 ShG 光束通过像散透镜后在 z 平面处的光强为:

$$I(x, y, z) = \left(\frac{k}{2\pi B} \right)^2 \iint \iint W(x_1', y_1', x_2', y_2') \times \exp\{-ikC_6[(x_1'^2 - x_2'^2) - (y_1'^2 - y_2'^2)]\} \times \exp\left\{-\frac{ik}{2\pi B} [A(x_1'^2 - x_2'^2 + y_1'^2 - y_2'^2) - 2x(x_1' - x_2') - 2y(y_1' - y_2')]\right\} dx_1' dx_2' dy_1' dy_2' \quad (3)$$

式中: (x, y) 为 z 平面处场点的坐标, A, B, C, D 为光学系统的变换矩阵元,可表示为:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta z & f(1+\Delta z) \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中: $\Delta z = (z-f)/f$ 。

在近轴近似下, x, y 变量可分离。将公式(1)、(2)和(4)代入公式(3),对 x 积分得 x 方向光强为:

$$I(x, \Delta z) = \frac{\sqrt{I_0}}{2N_x} \exp \left[-2 \left(\frac{x}{w_0 N_x} \right)^2 \right] \cdot \left[\exp \left(\frac{v_x^2 N_x^2}{2\beta^2} \right) \times \cosh \left(2u_x \frac{x}{w_0} \right) - \exp \left(\frac{v_x^2 N_x^2}{2} \right) \cos \left(2v_x \frac{x}{w_0} \right) \right] \quad (5)$$

式中: $u_x = \frac{a}{N_x^2} \left[\Delta z - \frac{kC_6 w_0^2 (1+\Delta z)}{\pi N_w} \right]$, $v_x = \frac{(1+\Delta z)a}{\pi N_w N_x^2}$, $N_x =$

$$\left\{ \left[\Delta z - \frac{kC_6 w_0^2 (1+\Delta z)}{\pi N_w} \right]^2 + \left(\frac{1+\Delta z}{\pi N_w \beta} \right)^2 \right\}^{1/2}, N_w = w_0^2 / (lf)$$

为与光束相关的菲涅耳数, $a = w_0 \Omega_0$, $\beta = [1 + (w_0/\sigma)^2]^{-1/2}$ 分别为离心参数和空间相干参数。

类似地, y 方向光强为:

$$I(y, \Delta z) = \frac{\sqrt{I_0}}{2N_y} \exp \left[-2 \left(\frac{y}{w_0 N_y} \right)^2 \right] \cdot \left[\exp \left(\frac{v_y^2 N_y^2}{2\beta^2} \right) \times \cosh \left(2u_y \frac{y}{w_0} \right) - \exp \left(\frac{v_y^2 N_y^2}{2} \right) \cos \left(2v_y \frac{y}{w_0} \right) \right] \quad (6)$$

式中: $u_y = \frac{a}{N_y^2} \left[\Delta z + \frac{kC_6 w_0^2 (1+\Delta z)}{\pi N_w} \right]$, $v_y = \frac{(1+\Delta z)a}{\pi N_w N_y^2}$, $N_y =$

$$\left\{ \left[\Delta z - \frac{kC_6 w_0^2 (1+\Delta z)}{\pi N_w} \right]^2 + \left(\frac{1+\Delta z}{\pi N_w \beta} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

总光强为:

$$I(x, y, \Delta z) = I(x, \Delta z) I(y, \Delta z) \quad (7)$$

由公式(5)~(7),部分相干 ShG 光束通过像散透镜后的光强分布与像散系数 C_6 ,空间相干参数 β ,离心参数 a ,菲涅耳数 N_w 以及位置坐标 (x, y, z) 有关,像散使 x 和 y 方向的光强分布不再对称。在公式(5)~

(7)中,若令 $a=0$,即为高斯-谢尔模型光束通过像散透镜的光强表达式,与参考文献[9]所得结果一致。

束宽的二阶矩定义为^[10]:

$$w_x^2 = \frac{4}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 I(x, y, z) dx dy \quad (8a)$$

$$w_y^2 = \frac{4}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 I(x, y, z) dx dy \quad (8b)$$

式中: $P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y, z) dx dy$; w_x, w_y 分别为 x 和 y 方向束宽。将公式(5)~(7)代入公式(8), x 和 y 方向束宽可分别表示为:

$$w_x = w_0 \left\{ \left[\Delta z + \frac{kC_0 w_0^2 (1 + \Delta z)}{\pi N_w} \right]^2 \left[\exp\left(\frac{a^2}{2}\right) - 1 + a^2 \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) \right] + \left(\frac{1 + \Delta z}{\pi N_w \beta} \right)^2 \left[a^2 \beta^2 - 1 + \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) \right] \right\}^{1/2} \times \left[\exp\left(\frac{a^2}{2}\right) - 1 \right]^{-1/2} \quad (9a)$$

$$w_y = w_0 \left\{ \left[\Delta z + \frac{kC_0 w_0^2 (1 + \Delta z)}{\pi N_w} \right]^2 \left[\exp\left(\frac{a^2}{2}\right) - 1 + a^2 \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) \right] + \left(\frac{1 + \Delta z}{\pi N_w \beta} \right)^2 \left[a^2 \beta^2 - 1 + \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) \right] \right\}^{1/2} \times \left[\exp\left(\frac{a^2}{2}\right) - 1 \right]^{-1/2} \quad (9b)$$

由公式(9)知,束宽与传输距离 z ,像散系数 C_0 ,离心参数 a ,菲涅耳数 N_w 和空间相干参数 β 有关,像散使得 x 方向和 y 方向束宽不再相等。

由 $\partial w_x / \partial z = 0$,求得 x, y 方向束腰位置,代入公式(9)得 x, y 方向束腰宽度为:

$$w_{0x} = w_0 \left\{ \left[(1 + a^2) - \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) - 1 \right] \left[a^2 \beta^2 - 1 + \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) \right] \right\}^{-1/2} \times \left\{ a^2 \beta^2 - 1 - (N_w \pi - C_0 k w_0^2)^2 \beta^2 + \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) [1 + (1 + a^2) \times (N_w \pi - C_0 k w_0^2)^2 \beta^2] \right\}^{-1/2} \times \left[\exp\left(\frac{a^2}{2}\right) - 1 \right]^{-1/2} \quad (10a)$$

$$w_{0y} = w_0 \left\{ \left[(1 + a^2) - \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) - 1 \right] \left[a^2 \beta^2 - 1 + \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) \right] \right\}^{-1/2} \times \left\{ a^2 \beta^2 - 1 - (N_w \pi - C_0 k w_0^2)^2 \beta^2 + \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) [1 + (1 + a^2) \times (N_w \pi - C_0 k w_0^2)^2 \beta^2] \right\}^{-1/2} \times \left[\exp\left(\frac{a^2}{2}\right) - 1 \right]^{-1/2} \quad (10b)$$

x, y 方向的远场发散角可分别求得为:

$$\theta_x = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w_x(z)}{z} = \frac{w_0}{f \pi \beta N_w} \left[\exp\left(\frac{a^2}{2}\right) - 1 \right]^{-1/2} \times \left\{ a^2 \beta^2 - 1 - (N_w \pi - C_0 k w_0^2)^2 \beta^2 + \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) [1 + (1 + a^2) \times (N_w \pi - C_0 k w_0^2)^2 \beta^2] \right\}^{1/2} \quad (11a)$$

$$\theta_y = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w_y(z)}{z} = \frac{w_0}{f \pi \beta N_w} \left[\exp\left(\frac{a^2}{2}\right) - 1 \right]^{-1/2} \times \left\{ a^2 \beta^2 - 1 - (N_w \pi + C_0 k w_0^2)^2 \beta^2 + \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) [1 + (1 + a^2) \times (N_w \pi + C_0 k w_0^2)^2 \beta^2] \right\}^{1/2} \quad (11b)$$

由公式(10)和(11),部分相干 ShG 光束通过像散透镜的 M^2 因子为:

$$M^2 = \frac{\pi}{\lambda} w_{0i} \theta_i = \left[\exp\left(\frac{a^2}{2}\right) - 1 \right]^{-1} \times \frac{1}{\beta} \left\{ (1 + a^2) \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) - 1 \right\} \left[a^2 \beta^2 - 1 + \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) \right]^{1/2} \quad (i=x, y) \quad (12)$$

公式(12)表明,部分相干 ShG 光束通过像散透镜的 M^2 因子与离心参数 a 和空间相干参数 β 有关,但与像散系数无关。且由 $\partial M^2 / \partial a > 0$ 和 $\partial M^2 / \partial \beta < 0$ 知, M^2 因子随离心参数 a 的增加和空间相关参数 β 的减小而增大,光束质量变差,该结论与参考文献[11]有相同结果。

2 数值计算与分析

数值计算中取 $\lambda = 632.8 \times 10^{-6} \text{ mm}$, $f = 200 \text{ mm}$, $w_0 = 1 \text{ mm}$, C_0 的单位均为 mm^{-1} 。图 1 为不同像散系数 C_0 和空间相干参数 β 的部分相干 ShG 光束在几何焦

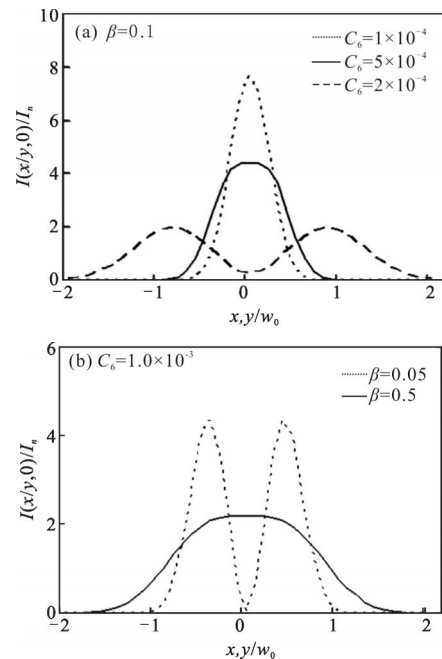


图 1 像散系数 C_0 和空间相干参数 β 分别取不同值时几何焦面处相对光强分布

Fig.1 Relative intensity distributions at the geometrical focal plane for different values of the astigmatic coefficient C_0 and the spatial coherent parameter β

面处的相对光强分布 $I(x/y, 0)/I_n, I_n=I_0^{1/2}$ 为光强常数。图中参数为： $a=2$ 。由图可知，选择适当的像散系数 C_0 和空间相干参数 β ，分别可得到钟形，平顶和中心凹陷的双峰结构等不同的光强分布，且在几何焦面处 x 和 y 方向光强分布是相同的，此结论也可直接由公式(5)、(6)中令 $\Delta z=0$ 得出。

图 2 为部分相干 ShG 光束在 1 离焦面 $\Delta z=0.2$ 处 x 和 y 方向的相对光强分布。图中参数为： $a=2, \beta=0.1$ 。由图可见，在固定 z 面处(例如 $\Delta z=0.2$)，选择合适的离心参数 a 、空间相干参数 β ，改变像散系数 C_0 ，在 x 方向和 y 方向也可得到钟形、平顶和可调的中心凹陷等不同的光强分布。

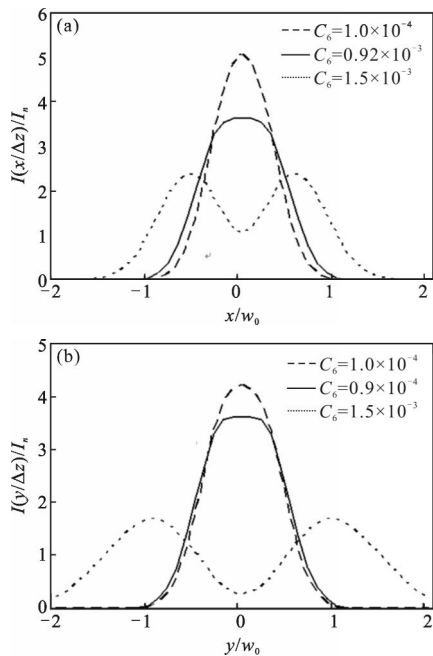


图 2 (a)和(b)为像散系数取不同值时 $\Delta z=0.2$ 处 x 和 y 方向相对光强分布

Fig.2 (a) and (b) are relative intensity distributions in the x and y directions at the plane $\Delta z=0.2$ for different values of the astigmatic coefficient C_0

图 3 为空间相干参数 β 取不同值时部分相干 ShG 光束在离焦面($\Delta z=0.2$)处 x 和 y 方向的相对光强分布。图中参数为： $a=2, C_0=1 \times 10^{-4}$ 。图 3 表明，空间相干参数变化时，在 x 方向和 y 方向也可得到钟形、平顶和中心凹陷双峰结构等不同的光强分布。综合图 1、2、3 说明，在几何焦面和固定 z 面处，选择合适的离心参数 a ，并适当改变像散系数 C_0 和空间相干参数 β ，均可改变光强的空间分布，从而实现部分

相干 ShG 光束的空间整形，具有实际应用意义^[12]。

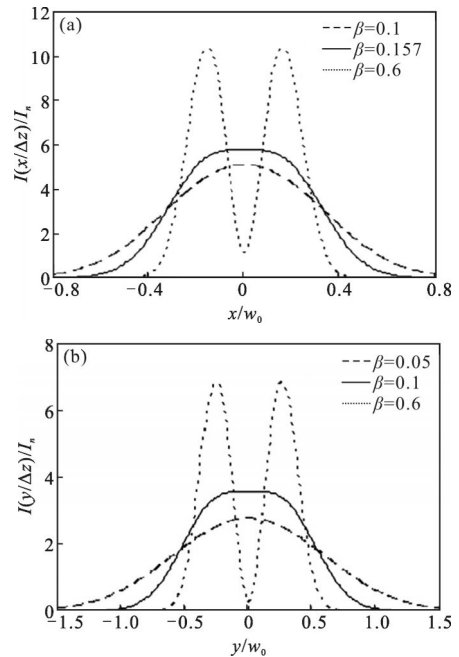


图 3 (a)和(b)为空间相干参数取不同值时 $\Delta z=0.2$ 处 x 和 y 方向相对光强分布

Fig.3 (a) and (b) are relative intensity distributions in the x and y directions at the plane $\Delta z=0.2$ for different values of the spatial coherent parameter

图 4 为不同像散系数时 x 和 y 方向束宽随传输

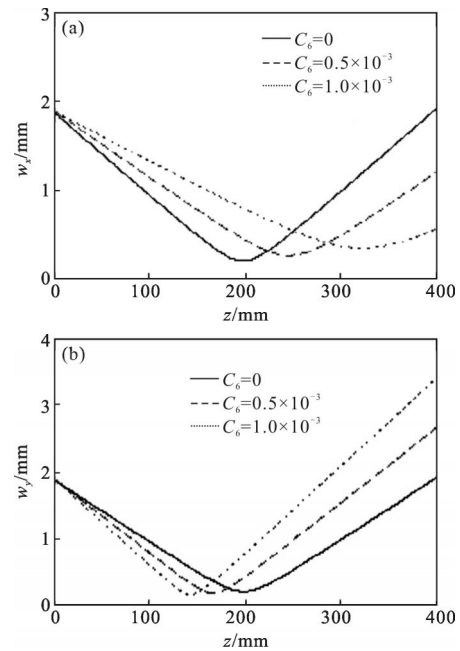


图 4 像散系数不同时, x 和 y 方向束宽随传输距离的变化 Fig.4 Beam widths versus propagation distance z (a) in the x direction and (b) in the y direction for different values of the astigmatic coefficient C_0

距离的变化。图中参数为： $a=1, \beta=0.2$ 。图 4 表明，束宽随像散系数的变化不是单调的。与无像散时比较，束腰位置发生偏移，且随像散的增大， x 方向束腰位置向远离透镜方向移动， y 方向束腰向靠近透镜方向移动。

3 结 论

文中以部分相干 ShG 光束为例，推导出部分相干 ShG 光束通过像散透镜解析的传输公式，并用以详细研究了部分相干 ShG 通过像散透镜后的传输和聚焦特性。部分相干 ShG 光束通过像散透镜后的光强分布与像散系数 C_6 ，空间相干参数 β ，离心参数 a ，菲涅耳数 N_w 和位置坐标 (x, y, z) 有关。像散使部分相干 ShG 光束在 x 和 y 方向束宽不同。但 M^2 因子仅依赖于离心参数和空间相干参数，而与像散无关。适当改变部分相干 ShG 光束的像散和空间相干性，在几何焦面和空间其它位置可实现部分相干 ShG 光束的空间整形。文中所得结果对设计合适的激光光学系统以实现部分空间相干光的空间整形有理论和应用意义。

参考文献：

- [1] Mandel L, Wolf E. Optical Coherence and Quantum Optics [M]. Cambridge: University Press, 1995.
- [2] Qiu Yunli, Liu Jinglin, Chen Zhaoxi. Propagation properties for partially coherent flattened-Gaussian nonparaxial beams [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2009, 38(4): 625–628. (in Chinese)
仇云利, 刘景琳, 陈昭喜. 非傍轴部分相干平顶高斯光束的传输性质[J]. 红外与激光工程, 2009, 38(4): 625–628.
- [3] Xiang Ningjing, Wu Zhenshen, Wang Mingjun. Spreading and wander of Gaussian-Schell model beam propagation through atmospheric turbulence [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(3): 658–662. (in Chinese)
向宁静, 吴振森, 王明军. 部分相干高斯-谢尔光束在大气湍流中的展宽与漂移 [J]. 红外与激光工程, 2013, 42(3): 658–662.
- [4] Zahid M, Zubairy M S. Directionality of partially coherent Bessel-Gauss beams[J]. *Opt Commun*, 1989, 70(5): 361–364.
- [5] Tovar A A, Casperson L W. Production and propagation of Hermite-sinusoidal-Gaussian laser beams [J]. *J Opt Soc Am A*, 1998, 15(9): 2425–2432.
- [6] Alda J, Alonso J, Bernabeu E, et al. Characterization of aberrated laser beams [J]. *J Opt Soc Am A*, 1997, 14(10): 2737–2747.
- [7] Casperson L W, Hall D G, Tovar A A. Sinusoidal-Gaussian beams in complex optical systems [J]. *J Opt Soc Am A*, 1997, 14(12): 3341–3348.
- [8] Zhang B, Ma H, Lü B D. M^2 -factor and coherent-mode decomposition of Sinh-Gaussian beams [J]. *Acta Phy Sin*, 1999, 48(10): 1869–1874.
- [9] Pan L Z, Lü B D. Focusing properties of partially coherent light passing through an astigmatic lens [J]. *Laser Technology*, 2003, 27(4): 374–379. (in Chinese)
- [10] Siegman A E. New development in laser resonator [J]. *S P I E*, 1990, 1224: 2–14.
- [11] Li C W, Lü B D. Transformation and spatial shaping of partially coherent cosh-Gaussian beams through an astigmatic lens [J]. *Optik*, 2009, 120(8): 374–378.
- [12] Delaubert V, Shaddock D A, Lam P K, et al. Generation of a phase-flipped Gaussian mode for optical measurements [J]. *J Opt A: Pure Appl Opt*, 2002, 4: 393–399.