

## 红外预警双星弹道导弹主动段跟踪性能

钟宇, 吴晓燕, 黄树彩, 吴建峰, 李成景, 唐意东

(空军工程大学 防空反导学院, 陕西 西安 710051)

**摘要:** 为研究反导作战中红外预警卫星系统对弹道导弹主动段弹道的跟踪性能, 提出以后验克拉美-罗下界(Posterior Cramer-Rao Lower Bound, PCRLB)为衡量指标, 结合 8 态重力转弯主动段运动模型和双星纯方位无源定位获取的测量量, 系统分析了运动建模精度、量测精度、采样周期、测源不确定性下检测概率和虚警数目等因素对跟踪时效性和准确性的影响。仿真算例给出了上述因素对位置和速度跟踪性能的影响程度和规律, 可为预警卫星反导作战、战技指标关联建模以及星载探测器优化设计等提供有意义的参考。

**关键词:** 红外预警卫星; 双星; 弹道导弹主动段; 跟踪性能; 后验克拉美-罗下界; 测源不确定

中图分类号: TN721.2 文献标志码: A 文章编号: 1007-2276(2015)12-3587-10

## Ballistic missile tracking performance in boost phase based on dual infrared early warning satellites

Zhong Yu, Wu Xiaoyan, Huang Shucui, Wu Jianfeng, Li Chengjing, Tang Yidong

(Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

**Abstract:** To study the ballistic missile tracking performance in boost phase based on infrared early warning satellites system, Posterior Cramer-Rao Lower Bound (PCRLB) was proposed as a measurement index. After modeling ballistic target motion by 8-state gravity turn model and locating target position by dual satellites' bearing-only passive localization, PCRLB was used to evaluate the effects of factors, including target motion model accuracy, measurement accuracy, sampling period, detection probability and false alarm number conditioned by measurement origin uncertainty, on tracking timeliness and accuracy. One simulation example showed the extent and rules of said factors on position and tracking performance of velocity. It can contribute to the anti-ballistic missile operation by early warning satellite, the relationship modeling between tactical and technical indices and the optimal design of satellite-based infrared detector.

收稿日期: 2015-04-13; 修订日期: 2015-05-15

基金项目: 陕西省自然科学基金(2012JM8020); 航空科学基金(20130196004)

作者简介: 钟宇(1987-), 男, 博士生, 主要从事系统建模与仿真、红外预警卫星目标探测与跟踪等方面的研究。

Email: zhongyu257678@163.com

导师简介: 吴晓燕(1957-), 女, 教授, 博士生导师, 博士, 主要从事系统建模与仿真方面的研究。Email: x\_ywu@126.com

**Key words:** infrared warning satellite; dual satellites; ballistic missile in boost phase; tracking performance; Posterior Cramer–Rao Lower Bound (PCRLB); measurement origin uncertainty

## 0 引言

红外预警卫星<sup>[1]</sup>是弹道导弹防御系统的重要组成部分,其通过利用星载红外探测器探测导弹主动段尾焰的红外辐射以纯方位无源定位的方式进行目标定位与跟踪,其跟踪性能主要体现在时效性和准确性两方面。分析预警卫星系统对弹道导弹主动段的跟踪性能及其影响因素对于提示并引导反导武器拦截作战、预警卫星战技指标关联建模以及探测器优化设计等有重要意义。研究人员开展了较多弹道导弹主动段跟踪的工作,主要包括主动段运动建模<sup>[2-4]</sup>、弹道参数估计和滤波方法<sup>[5-7]</sup>等方面的研究,然而,系统研究红外预警卫星系统对弹道导弹主动段跟踪性能的文献还未见报道。

为评估跟踪性能,需提出合理的衡量指标。克拉美-罗下界(Cramer–Rao Lower Bound, CRLB)为描述未知参数向量的无偏估计性能提供了一种均方误差意义上的下界<sup>[8]</sup>,而当参数向量受随机扰动影响时,可用后验克拉美-罗下界(Posterior Cramer Rao Lower Bound, PCRLB)来描述这种误差下限。CRLB 在滤波算法性能评价<sup>[9-11]</sup>、预置性能界的系统设计<sup>[12]</sup>以及传感器资源部署与调度<sup>[13-14]</sup>等领域有广泛的应用,已有研究将其用于雷达目标跟踪性能分析<sup>[15]</sup>。另外,近些年,研究人员对由虚警和杂波造成测源不确定时的 PCRLB 也进行了深入研究<sup>[16-18]</sup>。鉴于 CRLB 的意义和广泛应用并考虑预警卫星跟踪目标时会受随机扰动的影响,文中以 PCRLB 为衡量指标评价预警卫星的目标跟踪性能。

由于单星纯方位无源定位只能获取目标方位信息,而双星可通过视线的交叉定位获取目标位置,因而文中以双星为预警平台。基于双星预警系统和 PCRLB,文中对各因素特别是测源不确定对 PCRLB 的影响作全面分析,以期对未来反导作战指挥决策和星载探测器优化设计等提供参考。

## 1 目标运动建模与量测模型

主动段运动建模的方法有很多种,为较为精确

描述目标运动又不过于复杂,文中采用 8 态重力转弯模型<sup>[2-4]</sup>。设在地心固定(Earth–Centered Fixed, ECF)坐标系下,目标状态为  $X=(x, y, z, v_x, v_y, v_z, \alpha, \beta)^T$ ,其中,前 3 项为位置分量,中间 3 项为速度分量, $\alpha$  为轴向加速度, $\beta$  为相对质量损耗率。在导弹攻角为零,轴向受力为常值,不受侧向力影响以及质量损耗率为常值的假设下,目标运动可描述为:

$$\begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = \alpha \frac{v}{\|v\|} - \mu \frac{r}{\|r\|^3} \\ \dot{\alpha} = \alpha\beta \\ \dot{\beta} = \beta^2 \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ ;  $\|r\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ;  $\mu$  为地球引力常数。

在单星量测基础上,融合双星的量测信息可实现目标定位。双星预警系统对目标定位示意图见图 1。

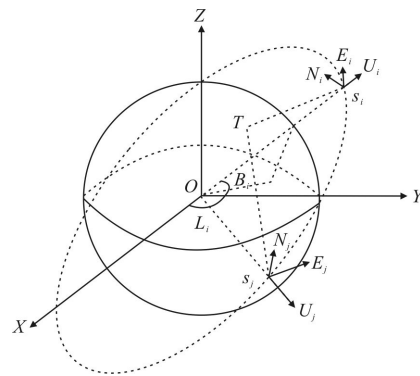


图 1 双星定位

Fig.1 Target localization by dual satellites

结合图 1,星载红外传感器只能获取主动段目标的纯方位信息,设某时刻 ECF 坐标系下卫星  $i$  的位置向量为  $s_i$ ,ECF 坐标系到卫星  $i$  上 UEN (Up–East–North)坐标系的转换矩阵为  $T_{ECF}^{UEN_i}$ ,若此时星下点大地经纬度分别为  $B_i$  和  $L_i$ ,则

$$T_{ECF}^{UEN_i} = \begin{bmatrix} \cos B_i \cos L_i & \cos B_i \sin L_i & \sin B_i \\ -\sin L_i & \cos L_i & 0 \\ -\sin B_i \cos L_i & -\sin B_i \sin L_i & \cos B_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

在 UEN 坐标系下卫星  $i$  可获取目标的高低角  $e_i$  和方位角  $\alpha_i$ , 目标视线向量为  $T_{ECF}^{UEN_i}(r-s_i)$ , 另设  $T_{ECF}^{UEN_i}(r-s_i)=[U_i, E_i, N_i]^T$ , 量测方程为:

$$e_i = \arctan\left(-\frac{\sqrt{E_i^2 + N_i^2}}{U_i}\right) \quad (3)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{3}{2}\pi - \arctan\frac{N_i}{E_i}, & E_i > 0 \\ \frac{1}{2}\pi - \arctan\frac{N_i}{E_i}, & E_i < 0 \\ 0, & E_i = 0, N_i < 0 \\ \pi, & E_i = 0, N_i > 0 \end{cases} \quad (4)$$

设卫星视线误差为  $\sigma_{LOS}$ , 量测噪声  $v_k$  服从均值为 0, 协方差为  $R_k = \text{diag}(\sigma_{LOS}^2, \sigma_{LOS}^2 / \cos^2 e_i)$  的高斯分布。

## 2 PCRLB 简述

### 2.1 标准 PCRLB

考虑受随机扰动影响的非线性滤波问题

$$X_{k+1} = f_k(X_k, \omega_k) \quad (5)$$

$$z_{k+1} = h(X_{k+1}, v_{k+1}) \quad (6)$$

式中:  $X_k$  和  $z_k$  分别表示  $k$  时刻的目标状态向量和量测向量;  $\{\omega_k\}$  和  $\{v_k\}$  分别为相互独立的白噪声序列。

$\hat{X}_k(Z_k)$  表示基于量测向量集的目标状态无偏估计量, 其中  $Z_k = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ , 则估计量的误差协方差阵为:

$$C_k = E\left[\left(X_k - \hat{X}_k(Z_k)\right)\left(X_k - \hat{X}_k(Z_k)\right)^T\right] \geq J_k^{-1} \quad (7)$$

式中: “ $\geq$ ” 表示  $C_k - J_k^{-1}$  为半正定矩阵,  $J_k$  为费舍尔信息阵;  $J_k^{-1}$  即为 PCRLB。设  $p(Z_k, X_k)$  为  $(Z_k, X_k)$  的联合概率密度函数, 设  $\nabla_a = \partial \left[ \frac{\partial}{\partial a_1}, \frac{\partial}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial a_n} \right]^T$ ,  $\Delta_b^a = \nabla_b$

$\nabla_a^T$  分别为一阶和二阶偏微分算子, 有:

$$J_k = E\left[-\Delta_{x_k}^{x_k} \ln p(Z_k, X_k)\right] \quad (8)$$

不存在测源不确定时 Riccati 形式的  $J_k$  递归式<sup>[18]</sup> 为:

$$J_{k+1} = D_k^{22} - D_k^{21} (J_k + D_k^{11})^{-1} D_k^{12} \quad (9)$$

其中

$$D_k^{11} = E\{-\Delta_{x_k}^{x_k} \ln p(X_{k+1}|X_k)\} \quad (10)$$

$$D_k^{12} = E\{-\Delta_{x_k}^{x_{k+1}} \ln p(X_{k+1}|X_k)\} \quad (11)$$

$$D_k^{21} = (D_k^{12})^T \quad (12)$$

$$D_k^{22} = E\{-\Delta_{x_{k+1}}^{x_{k+1}} \ln p(X_{k+1}|X_k)\} + E\{-\Delta_{x_{k+1}}^{z_{k+1}} \ln p(z_{k+1}|X_{k+1})\} \quad (13)$$

式中:  $p(X_{k+1}|X_k)$  和  $p(z_k|X_k)$  分别为基于公式(5)、(6)的条件概率密度函数。

### 2.2 测源不确定条件下的 PCRLB

实际情况中, 目标跟踪不可避免地会受到背景杂波的影响, 导致在卫星传感器形成的一帧图像中, 可能会出现很多量测量, 而且不能确切知晓这些量测哪一个源于目标, 这就是测源不确定性问题。

据相关研究<sup>[16-18]</sup>, 量测噪声为高斯白噪声时, 测源不确定条件下的 PCRLB 等于不存在测源不确定时的 PCRLB 乘以某一信息削减因子 (Information Reduction Factor, IRF), IRF 是小于 1 的标量, 其体现了杂波对目标跟踪的影响。具体地讲, 计算测源不确定条件下的 PCRLB, 需将公式(13)所示  $D_k^{22}$  的后半部分乘以某一 IRF, 下面总结 IRF 的表达式。

设传感器量测向量维度为  $n$ ,  $k$  时刻单个传感器的量测量数目为  $m_k (m_k \geq 1)$ , 源于目标的量测量可表示为:

$$z_k^D = h_k(X_k) + \varepsilon_k \quad (14)$$

式中:  $\varepsilon_k \sim N(0, R_k)$ ,  $R_k$  为量测误差协方差阵。

源于杂波的量测量可表示为:

$$z_k^{FA} = u_k \quad (15)$$

式中:  $u_k$  在量测空间中服从均匀分布, 即  $p(u_k) = 1/V$ 。

每次采样时, 最多有一个量测量源于目标, 该事件发生的概率即为检测概率  $P_D$ , 同时也可能存在很多虚警, 其服从均值为  $\lambda V$  的 Poisson 分布, 其中,  $\lambda$  为量测空间的虚警密度。对于单目标跟踪问题, 获得的  $m_k$  个量测量, 可能全部源于虚警, 也可能有一个源于目标而  $m_k - 1$  个源于虚警, 则先验概率  $P(m_k)$  为:

$$P(m_k) = (1 - P_D) \frac{(\lambda V)^{m_k} e^{-\lambda V}}{m_k!} +$$

$$P_D \frac{(\lambda V)^{(m_k-1)} e^{-\lambda V}}{(m_k-1)!} \quad (16)$$

因此,量测量由目标产生的概率为:

$$\varepsilon(m_k) = \frac{P_D}{P m_k} \frac{(\lambda V)^{(m_k-1)} e^{-\lambda V}}{(m_k-1)!} \quad (17)$$

设  $z_k(i)$  为  $k$  时刻的第  $i$  个量测,向量,并记  $z_k \triangleq \{z_k(i), i=1,2,\dots,m_k\}$  给定  $X_k$  和  $m_k$ ,则  $z_k$  的概率密度函数为:

$$P(z_k | X_k, m_k) = \frac{1-\varepsilon(m_k)}{V^{m_k}} + \frac{\varepsilon(m_k)}{m_k V^{m_k-1} \sqrt{(2\pi)^n |R_k|}} \times \sum_{i=1}^{m_k} \exp\left\{-\frac{1}{2} [z_k(i)-h_k(X_k)]^T R_k^{-1} [z_k(i)-h_k(X_k)]\right\} \quad (18)$$

且有

$$\nabla_{X_k} \left\{ -\frac{1}{2} [z_k(i)-h_k(X_k)]^T R_k^{-1} [z_k(i)-h_k(X_k)] \right\} = H_k^T R_k^{-1} [z_k(i)-h_k(X_k)] \quad (19)$$

式中:  $H_k$  为非线性函数  $h_k(\cdot)$  的 Jacobian 矩阵,  $H_k \in R^{n \times d}, X_k \in R^d$ , 有

$$q_k(m_k) = \frac{(2g)^{nm_k} \varepsilon_g(m_k)^2 |R_k|^{(m_k-2)/2}}{m_k V_g^{2m_k-2} (2\pi)^n} \frac{1}{N_S} \times \sum_{l=1}^{N_S} \frac{U_{1,1}[l]^2 \exp\left\{-\sum_{j=1}^n U_{1,j}[l]^2\right\}}{1-\varepsilon_g(m_k) + \frac{\varepsilon_g(m_k)}{m_k V_g^{m_k-1} \sqrt{(2\pi)^n |R_k|}} \sum_{r=1}^{m_k} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n U_{r,j}[l]^2\right\}} \quad (24)$$

式中:  $U_{i,j}[l]$  是  $[-g, g]$  上独立同分布的随机变量;  $U_{i,j}[l] \sim U[-g, g]$ 。

如果有  $N(N \geq 2)$  个能独立获取目标量测量的传感器,则

$$J_Z(k; M_k) = \sum_{i=1}^N q_k^i(m_k^i) E_{X_k} \left[ (H_k^i)^T (R_k^i)^{-1} H_k^i \right] \quad (25)$$

式中:上标  $i$  表示第  $i$  个传感器;  $M_k \triangleq \{m_k^i, i=1,2,\dots, N\}$ ;  $m_k^i$  表示第  $i$  个传感器在  $k$  时刻获取的量测量数目。计算这  $N$  个传感器量测量对 FIM 的贡献,有

$$J_Z(k) = E_{M_k} [J_Z(k; M_k)] = \sum_{i=1}^N \delta_k^i E_{X_k} \left[ (H_k^i)^T (R_k^i)^{-1} H_k^i \right] \quad (26)$$

其中,  $\delta_k^i = E_{m_k^i} [q_k^i(m_k^i)] = \sum_{m_k^i=1}^{\infty} p(m_k^i) q_k^i(m_k^i)$  表示不同  $m_k^i$

条件下 IRF 的加权和。对于同类传感器,有  $\delta_k^i = \delta_k^j$ ,

$$H_k \triangleq \left[ \nabla_{X_k} [h_k(X_k)]^T \right]^T \quad (20)$$

为简化计算时刻量测对 FIM 的贡献  $J_Z(k, m_k)$ , 作如下假设:

① 对量测空间进行  $g-\sigma$  门限化,形成矩形跟踪门

$$\left| z_k(i)^j - h_k(X_k)^j \right| < g\sigma_j \quad (21)$$

式中:  $z_k(i)^j$  为  $z_k(i)$  的第  $j$  个分量;  $h_k(X_k)^j$  为  $h_k(X_k)$  的第  $j$  个分量;  $\sigma_j$  为量测向量第  $j$  个分量的误差标准差。门限化处理后,记此时的  $P_D$  和  $P(m_k)$  分别为  $P_D^g$  和  $P_g(m_k)$ 。

②  $n$  维量测空间是正交的,  $R_k$  为对角阵。此时,矩形跟踪门形成的超立方体体积为:

$$V_g = (2g)^n \prod_{i=1}^n \sigma_i = (2g)^n \sqrt{|R_k|} \quad (22)$$

基于上述假设有:

$$J_Z(k; m_k) = q_k(m_k) \cdot E_{X_k} \left[ H_k^T R_k^{-1} H_k \right] \quad (23)$$

利用重要性采样原理,可得 IRF  $q_k(m_k)$  的 Monte Carlo 近似式

其中  $i \neq j, i, j=1, 2, \dots, N$ 。

综上,设定  $P_D^g$  和  $\lambda V_g$  并且依据公式(16)(17)(24) 可得  $\varepsilon_g(m_k)$  和  $q_k(m_k)$ 。作为示例,取  $g=4, \lambda V_g=0.1, N_S=5 \times 10^5$ , 分别取  $P_D=0.2, 0.4, 0.6$  和  $0.8$ , 可仿真得  $\varepsilon_g(m_k)$  和  $q_k(m_k)$  随量测量数目  $m_k$  变化的曲线,见图 2 和图 3。

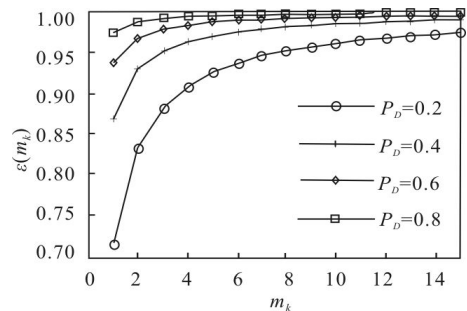


图 2  $\varepsilon_g(m_k)$  随  $m_k$  变化曲线

Fig.2  $\varepsilon_g(m_k)$  vs  $m_k$

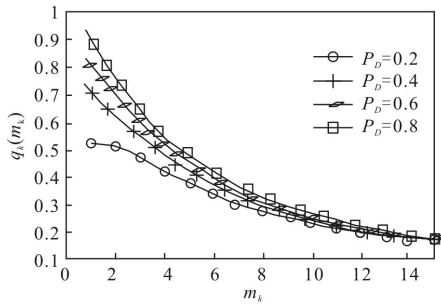


图 3  $q_k(m_k)$  随  $m_k$  变化曲线

Fig.3  $q_k(m_k)$  vs  $m_k$

### 3 PCRLB 递归式各元素推导

该节基于前述的目标运动模型、双星预警量测模型以及测源不确定条件下的 PCRLB 递归式, 具体推导递归式各元素。

$k$  时刻公式(1)所示运动方程可表示为:

$$\dot{X}_k = f(X_k) + w_k \tag{27}$$

其中, 过程噪声  $w_k$  的协方差阵为  $Q$ 。

对运动方程作离散化处理, 有

$$X_{k+1} - X_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(X(t)) dt \tag{28}$$

将公式(28)在  $t_k$  时刻展开为泰勒级数, 并略去二阶以上高次项, 有

$$f(X(t)) = f(X_k) + \left. \frac{\partial f(X(t))}{\partial t} \right|_{t=t_k} \cdot (t - t_k) = f(X_k) + \left( \nabla_X f(X) \right)^T \Big|_{X=X_k} \cdot \frac{\partial X(t)}{\partial t} \Big|_{t=t_k} \cdot (t - t_k) \tag{29}$$

令  $M(X_k) = \left( \nabla_X f(X) \right)^T \Big|_{X=X_k}$ , 其为 Jacobian 矩阵。

又由  $\frac{\partial X(t)}{\partial t} \Big|_{t=t_k} = f(X_k)$ , 公式(29)可化为:

$$f(X(t)) = f(X_k) + M(X_k) \cdot f(X_k) \cdot (t - t_k) \tag{30}$$

设采样周期为  $T$ , 结合公式(28)、(30), 有

$$X_{k+1} = X_k + f(X_k) \cdot T + M(X_k) \cdot f(X_k) \cdot \frac{T^2}{2} + \omega_k = f_k(X_k) + \omega_k \tag{31}$$

也可表示为:

$$X_{k+1} = \Phi(t_{k+1} - t_k) X_k + \omega_k \tag{32}$$

式中,  $\Phi(t_{k+1} - t_k)$  为状态转移矩阵:

$$\Phi(t_{k+1} - t_k) = I + M(X_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) = I + M(X_k) \cdot T \tag{33}$$

下面推导 PCRLB 递归式中的  $D_k^{11}$ 、 $D_k^{12}$ 、 $D_k^{21}$  和  $D_k^{22}$ 。

由公式(6)

$$D_k^{11} = E \left[ \left( \nabla_{X_k} \ln p(X_{k+1} | X_k) \right) \left( \nabla_{X_k} \ln p(X_{k+1} | X_k) \right)^T \right] \tag{34}$$

上式中

$$p(X_{k+1} | X_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{8}{2}} \left| |Q_k| \right|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X_{k+1} - f_k(X_k))^T Q_k^{-1} (X_{k+1} - f_k(X_k)) \right\} \tag{35}$$

$$\nabla_{X_k} \ln p(X_{k+1} | X_k) = \nabla_{X_k} f_k^T(X_k) Q_k^{-1} (X_{k+1} - f_k(X_k)) \tag{36}$$

因此

$$D_k^{11} = E \left\{ \left[ \nabla_{X_k} f_k^T(X_k) \right] Q_k^{-1} \left[ \nabla_{X_k} f_k^T(X_k) \right]^T \right\} \tag{37}$$

结合公式(32)、(33)可得

$$\nabla_{X_k} f_k^T(X_k) = I_{8 \times 8} + M(X_k)^T \cdot T \tag{38}$$

式中  $M(X_k)$  可表示为:

$$M(X_k) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 3} \\ D_1 & D_2 & C_1 & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & \beta & \alpha \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0 & 2\beta \end{bmatrix} \Big|_{X=\hat{X}_{k+1}} \tag{39}$$

其中

$$D_1 = \begin{bmatrix} \mu \frac{3x^2 - ||r||^2}{||r||^5} & \mu \frac{3xy}{||r||^5} & \mu \frac{3xz}{||r||^5} \\ \mu \frac{3xy}{||r||^5} & \mu \frac{3y^2 - ||r||^2}{||r||^5} & \mu \frac{3yz}{||r||^5} \\ \mu \frac{3xz}{||r||^5} & \mu \frac{3yz}{||r||^5} & \mu \frac{3z^2 - ||r||^2}{||r||^5} \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} \alpha \frac{v_x^2 + v_z^2}{||v||^3} & -\alpha \frac{v_x v_y}{||v||^3} & -\alpha \frac{v_x v_z}{||v||^3} \\ -\alpha \frac{v_x v_y}{||v||^3} & \alpha \frac{v_x^2 + v_z^2}{||v||^3} & -\alpha \frac{v_y v_z}{||v||^3} \\ -\alpha \frac{v_x v_z}{||v||^3} & -\alpha \frac{v_y v_z}{||v||^3} & \alpha \frac{v_y^2 + v_z^2}{||v||^3} \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{v_x}{||v||} & \frac{v_y}{||v||} & \frac{v_z}{||v||} \end{bmatrix}^T \tag{42}$$

因此, 结合式(37)~(39), (40)~(42)可得  $D_k^{11}$ 。同

理有

$$D_k^{12} = -E \left[ \nabla_{X_k} f_k^T (X_k) Q_k^{-1} \right] \quad (43)$$

$$D_k^{21} = (D_k^{12})^T \quad (44)$$

对于  $D_k^{22}$ , 由公式(13)易得其前半部分为:

$$E \left\{ -\Delta_{X_{k+1}}^{X_{k+1}} \ln p(X_{k+1} | X_k) \right\} = Q_k^{-1} \quad (45)$$

而  $D_k^{22}$  的后半部分

$$E \left\{ -\Delta_{X_{k+1}}^{X_{k+1}} \ln p(z_{k+1} | X_k) \right\} = E \left\{ \left[ \nabla_{X_{k+1}} \ln p(z_{k+1} | X_{k+1}) \right] \left[ \nabla_{X_{k+1}} \ln p(z_{k+1} | X_{k+1}) \right]^T \right\} \quad (46)$$

上式中

$$p(z_{k+1} | X_{k+1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \left| |R_k| \right|^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (z_{k+1} - h_k(X_{k+1}))^T R_{k+1}^{-1} (z_{k+1} - h_k(X_{k+1})) \right\} \quad (47)$$

则

$$\nabla_{X_{k+1}} \ln p(z_{k+1} | X_{k+1}) = \nabla_{X_{k+1}} h_{k+1}^T (X_{k+1}) R_{k+1}^{-1} (z_{k+1} - h_{k+1}(X_{k+1})) \quad (48)$$

结合公式(46), 有

$$E \left\{ -\Delta_{X_{k+1}}^{X_{k+1}} \ln p(z_{k+1} | X_{k+1}) \right\} = E \left\{ \left[ \nabla_{X_{k+1}} h_{k+1}^T (X_{k+1}) \right] R_{k+1}^{-1} \left[ \nabla_{X_{k+1}} h_{k+1}^T (X_{k+1}) \right]^T \right\} \quad (49)$$

上式中  $\left[ \nabla_{X_{k+1}} h_{k+1}^T (X_{k+1}) \right]^T$  为  $h(x)$  的 Jacobian 阵。

当  $N (N \geq 2)$  颗卫星对目标进行三角定位时, 结合公式(3)、(4)有

$$\left[ \nabla_{X_{k+1}} h_{k+1}^T (X_{k+1}) \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial x} & \frac{\partial e_1}{\partial y} & \frac{\partial e_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial e_N}{\partial x} & \frac{\partial e_N}{\partial y} & \frac{\partial e_N}{\partial z} \\ \frac{\partial \alpha_N}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_N}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_N}{\partial z} \end{bmatrix}_{2N \times 8} \quad (50)$$

其中

$$\begin{cases} \frac{\partial e_i}{\partial x} = \frac{(E_i^2 + N_i^2) \frac{\partial U_i}{\partial x} - \left[ E_i \frac{\partial E_i}{\partial x} + N_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] U_i}{(U_i^2 + E_i^2 + N_i^2) \sqrt{E_i^2 + N_i^2}} \\ \frac{\partial e_i}{\partial y} = \frac{(E_i^2 + N_i^2) \frac{\partial U_i}{\partial y} - \left[ E_i \frac{\partial E_i}{\partial y} + N_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] U_i}{(U_i^2 + E_i^2 + N_i^2) \sqrt{E_i^2 + N_i^2}} \\ \frac{\partial e_i}{\partial z} = \frac{(E_i^2 + N_i^2) \frac{\partial U_i}{\partial z} - \left[ E_i \frac{\partial E_i}{\partial z} + N_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \right] U_i}{(U_i^2 + E_i^2 + N_i^2) \sqrt{E_i^2 + N_i^2}} \\ \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial E_i}{\partial x} N_i - \frac{\partial N_i}{\partial x} E_i}{E_i^2 + N_i^2} \\ \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial E_i}{\partial y} N_i - \frac{\partial N_i}{\partial y} E_i}{E_i^2 + N_i^2} \\ \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} = \frac{\frac{\partial E_i}{\partial z} N_i - \frac{\partial N_i}{\partial z} E_i}{E_i^2 + N_i^2} \end{cases} \quad (51)$$

上式中

$$\begin{cases} \frac{\partial E_i}{\partial x} = -\sin L_i, \quad \frac{\partial N_i}{\partial x} = -\sin B_i \cos L_i, \quad \frac{\partial U_i}{\partial x} = \cos B_i \cos L_i \\ \frac{\partial E_i}{\partial y} = \cos L_i, \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = -\sin B_i \sin L_i, \quad \frac{\partial U_i}{\partial y} = \cos B_i \sin L_i \\ \frac{\partial E_i}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial N_i}{\partial z} = \cos B_i, \quad \frac{\partial U_i}{\partial z} = \sin B_i \end{cases} \quad (52)$$

综上, 结合公式(13)、(45)、(49)~(52)即可求得  $D_k^{22}$ 。由上述推导的 PCRLB 递归式中各元素表达式, 再利用 PCRLB 递归式, 可求得主动段目标跟踪的性能界。

由上述 PCRLB 递归式各元素表达式可见, PCRLB 受目标运动建模精度、量测误差、采样周期以及测源不确定等因素的影响, 下面结合具体的仿真实例研究各因素对跟踪性能的影响。

### 4 仿真算例及分析

在典型反导作战仿真场景下, 假设射程为 600 km 的某弹道导弹在 (25°N, 130°E) 处发射, 射向为 240°, 用星座构型为: 28/4/0:50°, 1600 km 的低轨星座上同轨道相邻两颗卫星对目标进行跟踪。在保证可观测的前提下, 从导弹飞行在 10 km 以上开始直至关机, 双星对目标进行持续跟踪, 取  $T=1$  s,  $\sigma_{\text{LOS}}=50 \mu\text{rad}$ ,

$Q = \text{diag} (0.5^2, 0.5^2, 0.5^2, 0.05^2, 0.05^2, 0.05^2, 0.0005^2, 0.0005^2)$ ,

定义位置和速度 PCRLB 为  $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sqrt{J_k^{-1}(i,i)}$  和  $\frac{1}{3} \times \sum_{i=4}^6 \sqrt{J_k^{-1}(i,i)}$ , Monte-Carlo 仿真次数为 300 次。

### 4.1 运动建模精度对跟踪性能的影响

设定一个运动建模精度因子  $\Delta$  表征建模误差, 使  $Q = \Delta Q$ , 考察  $\Delta = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05$  和  $0.02$  时的位置及速度误差的 PCRLB 随时间变化的情况, 见图 4 和图 5。

由图 4 和图 5 可知, 运动建模精度主要影响目标跟踪的准确性, 随着时间的增加 PCRLB 逐渐减小并趋于稳定, 建模精度越高, PCRLB 的稳定值越小, 也即跟踪准确性越高。建模精度不高时, 其对速度 PCRLB 的影响较位置 PCRLB 明显。从跟踪时效性方面分析, 运动建模精度越低, 位置 PCRLB 越易趋于稳定, 而速度 PCRLB 几乎不受影响。

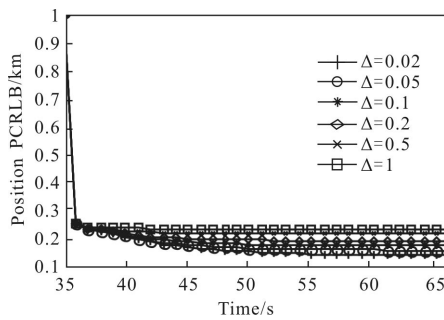


图 4 运动建模精度对位置跟踪性能的影响  
Fig.4 Position tracking performance conditioned by different motion modeling accuracy

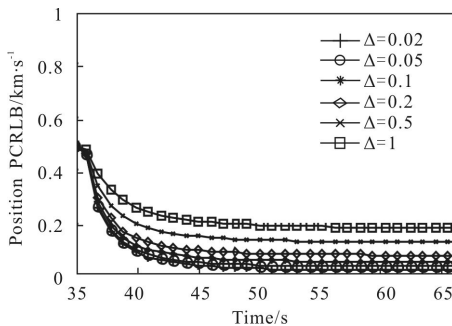


图 5 运动建模精度对速度跟踪性能的影响  
Fig.5 Velocity tracking performance conditioned by different motion modeling accuracy

### 4.2 量测精度对跟踪性能的影响

考察量测精度对跟踪性能的影响, 分别取  $\sigma_{\text{LOS}} = 50, 80, 100, 120 \mu\text{rad}$ , 其他仿真条件不变, 位置和速度误差 PCRLB 的变化情况见图 6 和图 7。

由图 6 和图 7 可见, 量测精度只影响目标跟踪的准确性而不影响跟踪时效性, 量测精度越高, 跟踪精度越高。从图中还可见, 量测误差的变化对位置 PCRLB 的影响比较明显, 而对速度 PCRLB 的影响很微弱。值得指出的是, 探测器的量测精度受实际工艺条件和工作环境等因素的制约, 只能控制在一定范围而不能无限提高, 因此在设计探测器时可根据对目标位置和速度估计精度的战术要求, 结合上述仿真结果设计合理的量测精度指标。

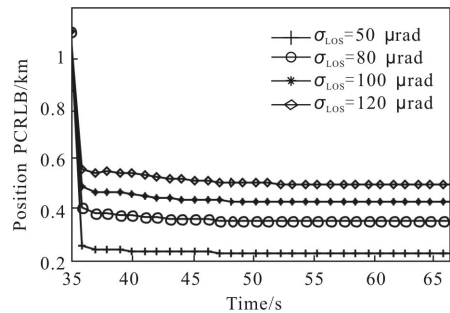


图 6 量测精度对位置跟踪性能的影响  
Fig.6 Position tracking performance conditioned by different measurement accuracy

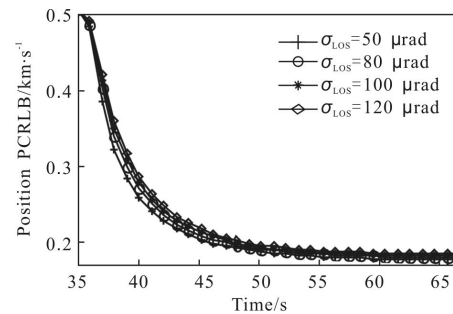


图 7 量测精度对位置跟踪性能的影响  
Fig.7 Velocity tracking performance conditioned by different measurement accuracy

### 4.3 采样周期对跟踪性能的影响

继续研究采样周期变化对跟踪性能的影响, 其他仿真条件不变,  $T$  分别取为 1、2 和 4 s 进行仿真, 结果见图 8 和图 9。

由图 8 和图 9 可见, 采样周期对目标跟踪的准确性和时效性均有影响, 采样周期越小, PCRLB 值

越小且越快趋于稳定,跟踪效果越好,这是因为采样周期越小,在观测时间内卫星获取的目标观测数据就越多,越有利于积累目标运动信息。另外还可见,在战术导弹的整段观测时间内,采样周期对位置 PCRLB 的影响较小,而对速度 PCRLB 有明显影响。

采样周期也是一项重要的技术指标,参考上述仿真结果,在反导作战中面向作战需求,结合扫描型或凝视型探测器<sup>[1]</sup>的工作特点,设计合适的采样周期。

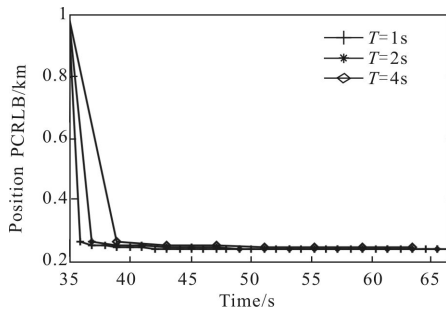


图8 采样周期对位置跟踪性能的影响

Fig.8 Position tracking performance conditioned by different sampling time

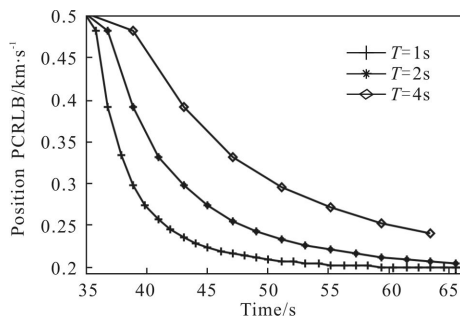


图9 采样周期对速度跟踪性能的影响

Fig.9 Velocity tracking performance conditioned by different sampling time

#### 4.4 测源不确定性对跟踪性能的影响

为描述测源不确定对跟踪性能的影响,需获取 IRF。依据 2.2 节所述,IRF  $\delta_k = \sum_{m_k=1}^{\infty} p(m_k)q_k(m_k)$ 。为求 IRF,定义  $N$ ,使  $N$  为满足  $\delta_k(N) - \delta_k(N-1) < 10^{-12}$  的最小整数,此时有  $\delta_k = \delta_k(N) = \sum_{m_k=1}^N p(m_k)q_k(m_k)$ 。取  $g=4$ ,计算不同  $P_D$  和  $\lambda V_g$  组合下的 IRF  $\delta_k$  值,见图 10。

由图 10 可见,IRF  $\delta_k$  受  $P_D$  和  $\lambda V_g$  组合的影响, $P_D$  越大, $\lambda V_g$  越小, $\delta_k$  越接近 1。

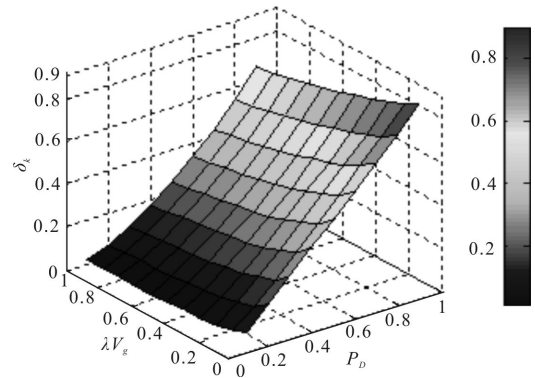


图 10 不同  $P_D$  和  $\lambda V_g$  组合下的  $\delta_k$  值

Fig.10  $\delta_k$  vs combination of  $P_D$  and  $\lambda V_g$

作为示例,取  $\lambda V_g=0.1$ ,取  $P_D$  分别为 0.2, 0.4, 0.6 和 0.8,其他仿真条件不变时,分析位置和速度 PCRLB 随  $P_D$  的变化情况,见图 11 和图 12。作为比较,图中还给出了不存在测源不确定时的 PCRLB。

由图 11 和图 12 可见,测源不确定只影响目标跟踪的准确性,在  $\lambda V_g$  一定的前提下, $P_D$  越大,跟踪精度越高,这是因为在上述条件下,信噪比(Signal to Noise, SNR)越高,因而越有利于星载探测器检测并跟踪目标,获取目标运动信息;测源不确定对位置 PCRLB 的影响较为明显,而对速度 PCRLB 影响很小。

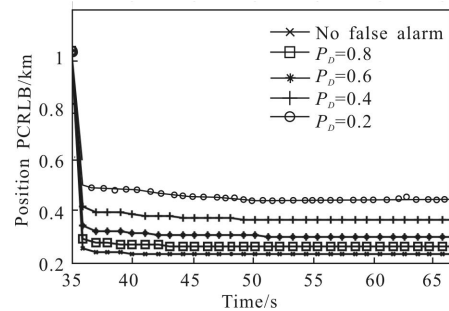


图 11  $P_D$  对位置跟踪性能的影响,  $\lambda V_g=0.1$

Fig.11 Position tracking performance conditioned by different  $P_D$ ,  $\lambda V_g=0.1$

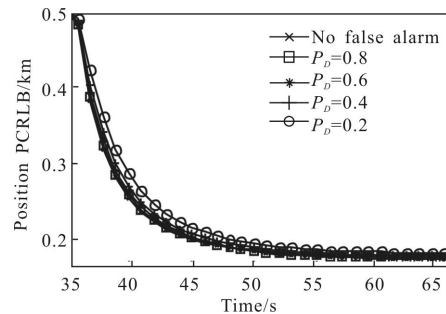


图 12  $P_D$  对速度跟踪性能的影响,  $\lambda V_g=0.1$

Fig.12 Velocity tracking performance conditioned by different  $P_D$ ,  $\lambda V_g=0.1$



由图 11 和图 12, 经过一段观测时间后, PCRLB 值趋于稳定, 为对比分析  $\lambda V_g$  对 PCRLB 的影响, 基于图 10 的  $\delta_k$  值, 文中给出不同  $P_D$  和  $\lambda V_g$  组合时 PCRLB 的稳定值, 分别见图 13 和图 14。

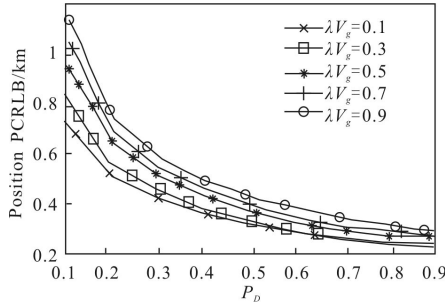


图13 不同  $P_D$  和  $\lambda V_g$  组合下的位置误差 PCRLB 稳定值

Fig.13 Stable values of position error PCRLB vs combination of  $P_D$  and  $\lambda V_g$

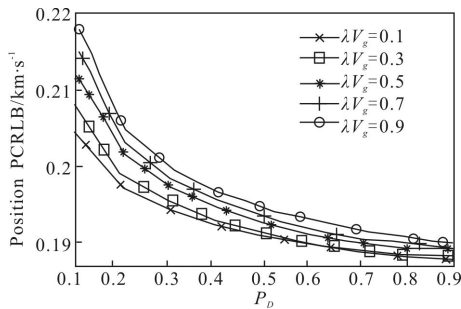


图14 不同  $P_D$  和  $\lambda V_g$  组合下的速度误差 PCRLB 稳定值

Fig.14 Stable values of velocity error PCRLB vs combination of  $P_D$  and  $\lambda V_g$

由图 12 和图 13 可见,  $P_D$  越大,  $\lambda V_g$  越小, IRF  $\delta_k$  值越接近 1, PCRLB 值越小, 也即跟踪精度越高, 这是因为在上述条件下, 能获得更高的 SNR, 杂波对目标跟踪的影响就越小, 从而跟踪性能越好。另外,  $P_D$  和  $\lambda V_g$  组合变化对位置 PCRLB 的影响较速度 PCRLB 明显得多。  $P_D$  较小时, 提高  $P_D$  或减小  $\lambda V_g$  可有效改善位置跟踪性能,  $P_D$  增加到一定程度后, 提高  $P_D$  或减小  $\lambda V_g$  对跟踪性能的改善比较有限。

## 5 结束语

文中以 PCRLB 为衡量指标较为全面和系统地研究了双星预警系统对弹道导弹主动段弹道的跟踪性能, 分析了运动建模精度、量测精度、采样周期和测源不确定等因素对位置和速度跟踪准确性和时效性的影响, 并结合仿真实例得到了定性和定量结论。

文中研究可为反导作战指挥决策提供一定参考依据, 而量测精度、采样周期、检测概率和虚警数目都是与星载探测器性能密切相关的技术指标, 在反导作战背景下, 可依据战术指标需求并结合文中的跟踪性能分析结论, 建立战技指标关联模型, 优化设计探测器。

相对单目标跟踪, 预警卫星的多目标跟踪性能研究将更加复杂, 其难点在于需同时考虑目标状态估计和数据关联, 这是未来进一步研究的重点。

## 参考文献:

- [1] Liu Ren, Liang Weitai, Zhao Min. Integrated Aerospace Defense System [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2011. (in Chinese)  
刘仁, 梁维泰, 赵敏. 一体化空天防御系统. 北京: 国防工业出版社, 2011.
- [2] Zhao Yan. Study on target tracking algorithm of LEO satellite constellation [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2011. (in Chinese)  
赵砚. 低轨星座的目标跟踪算法研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2011.
- [3] Jilkov V P, Li X R, Ru J F. Modeling ballistic target motion during boost for tracking [C]//Proceedings of SPIE Signal and Data Processing of Small Targets, 2007, 6699: 669909-1-669909-12.
- [4] Li X R, Jilkov V P. Survey of maneuvering target tracking part II: motion models of ballistic and space target [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2010, 46(1): 96-119.
- [5] Li X R, Jilkov V P. A survey of maneuvering target tracking—part VI a: density-based exact nonlinear filtering [C]// Proceedings of SPIE Signal and Data Processing of Small Targets, 2010, 7698: 76981D-1-76981D-12.
- [6] Hough M E, Daum F E, Huang J. Nonlinear recursive estimation of boost trajectories, including batch initialization and burnout estimation [C]//Proceedings of AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Providence, Rhode Island, 2004: 1-14.
- [7] Liu Ye, Yu Anxi, Zhu Jubo, et al. Survey of filter algorithms for ballistic target real-time tracking [J]. *Journal of Astronautics*, 2013, 34(11): 1417-1426. (in Chinese)  
刘也, 余安喜, 朱炬波, 等. 弹道目标实时跟踪中的滤波方法综述[J]. 宇航学报, 2013, 34(11): 1417-1426.
- [8] Tichavky P, Muravchik C H, Nehorai A. Posterior Cramér-

- Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(5): 1386–1396.
- [9] Yuan T, Bar-Shalom Y, Willett P, et al. Estimability of thrusting trajectories in 3D from a single passive sensor[C]// Proceedings of SPIE Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition XXII, 2013, 8745: 874503–1–874503–14.
- [10] Lei M, Van Wyk Barend J, Qi Y. Online estimation of the approximate posterior Cramér–Rao lower bound for discrete-time nonlinear filtering[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2011, 47(1): 37–57.
- [11] Li Teng, Guo Fucheng, Jiang Wenli. A novel method for satellite-borne passive localization using interferometer and its error analysis [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2012, 34(3): 164–170. (in Chinese)  
李腾, 郭福成, 姜文利. 星载干涉仪无源定位新方法及其误差分析[J]. 国防科技大学学报, 2012, 34(3): 164–170.
- [12] Nehorai N, Hawkes M. Performance bounds for estimating vector systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, 48(6): 1737–1749.
- [13] Thamarasar R, Kirubarajan T, Hernandez M L, et al. PCRLB-based multisensor array management for multitarget tracking [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, 43(2): 539–555.
- [14] Mohammadi A, Aaif A. Decentralized computation of the conditional posterior Cramér–Rao lower bound: Application to adaptive sensor selection[C]// Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), 2013: 5278–5282.
- [15] Wu Yuebo, Yang Jingshu, Wang Jiang. Target tracking performance analysis for bistatic MIMO radar [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2011, 33(12): 2655–2661. (in Chinese)  
吴跃波, 杨景曙, 王江. 双基地 MIMO 雷达目标跟踪性能分析[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(12): 2655–2661.
- [16] Hernandez M L, Ristic B, Farina A, et al. A comparison of two Cramér–Rao bounds for nonlinear filtering with  $P_d < 1$  [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(9): 2361–2370.
- [17] Zhang X, Willett P, Bar-Shalom Y. Dynamic Cramér–Rao bound for target tracking in clutter [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2005, 41 (4): 1154–1167.
- [18] Hernandez M L, Farina A, Ristic B. PCRLB for tracking in cluttered environments: measurement sequence conditioning approach [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, 42(2): 680–703.