

## 空间碎片半解析法轨道预报精度性能分析

李 彬<sup>1</sup>, 桑吉章<sup>1,2</sup>, 宁津生<sup>1</sup>

(1. 武汉大学 测绘学院, 湖北 武汉 430079; 2. 地球空间信息技术协同创新中心, 湖北 武汉 430079)

**摘 要:** 针对数以万计的空间碎片, 进行快速、精确的轨道确定与预报, 以提供可靠的空间碰撞预警是当前空间态势感知的一个重要研究方向。半解析卫星/空间碎片轨道积分, 可以克服轨道积分中数值法耗时、解析法低精度的不足。讨论了已初步研发成功的利用多尺度摄动原理的半解析轨道积分器及其在空间碎片轨道预报中的精度性能, 并以精密数值积分结果作为“真轨道”评估半解析轨道积分器的精度。大量数据处理结果表明: 面质比 0.01、轨道高度 300 km 的碎片, 预报 1 天, 耗时不足 60 ms, 精度 2 km 左右, 且随高度增加, 预报精度更高, 当高度超过 1 000 km 时, 1 天的预报精度仅为 50 m 左右, 满足许多精密空间应用的要求。

**关键词:** 空间碎片; 半解析轨道积分器; 轨道预报; 大气阻力

**中图分类号:** P228 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2015)11-3310-07

## Analysis of accuracy in orbit predictions for space debris using semianalytic theory

Li Bin<sup>1</sup>, Sang Jizhang<sup>1,2</sup>, Ning Jinsheng<sup>1</sup>

(1. School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China;

2. Collaborative Innovation Center for Geospatial Technology, Wuhan 430079, China)

**Abstract:** For tens of thousands of Earth orbiting space debris, fast and accurate orbit determination and prediction information is essential for providing reliable collision warnings, and thus becomes an important subject in the space situational awareness (SSA). To overcome the problems of low computing efficiency using numerical integration methods and large orbit prediction errors with analytical theories, semianalytic satellite theory (SST) that could achieve the accuracy of numerical methods with the computing efficiency of analytic methods was developed. The semianalytic orbit integrator being developed using the multi-scale perturbation method at Wuhan University was discussed, together with its prediction performance. Orbits generated from the precise numerical integrator was used as the "true orbit" to compute the prediction error of the developed semianalytic integrator. Preliminary results show that, for space objects with Area-to-mass ratio 0.01 and orbit altitude 300 km, 2 km prediction accuracy for 1-day orbit prediction is achieved using the semianalytic orbit integrator, and the computation time was only 60 ms.

收稿日期: 2015-03-05; 修订日期: 2015-04-10

基金项目: 国家自然科学基金(41474024); 国家测绘地理信息局测绘基础研究基金(14-02-06)

作者简介: 李彬(1988-), 男, 博士生, 主要从事空间碎片精密轨道确定与预报研究。Email: libin@whu.edu.cn

导师简介: 桑吉章(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事空间监测和空间态势感知等方面的研究。Email: jzhsang@sgg.whu.edu.cn

For orbits higher than 1 000 km in altitude, the prediction errors were mostly less than 50 m, meeting the requirements for many space applications.

**Key words:** space debris; semianalytic orbit integrators; orbit prediction; atmospheric drag

## 0 引 言

据美国航天局估计,太空中存在多达 50 万个直径大于 1 cm 的空间碎片<sup>[1]</sup>。由于在轨航天器通常只能防护小于 1 cm 碎片的撞击,一旦遭受大于 1 cm 碎片的撞击,可能造成严重的空间事故。提供快速可靠的空间碰撞预警,避免在轨航天器与碎片的碰撞,是空间态势感知领域的重要研究方向之一。

针对当前已知的 2 万多个及今后将被跟踪监测的数十万个碎片,空间目标监视与维护需要快速、精确的轨道预报,有必要研发一个高效率、高精度的轨道积分器。传统的数值积分器,因高精度、顾及任何摄动力等优势,可用于精密定轨中,但由于运算速度较慢,用于大规模空间规划、碰撞预警等领域时效率不佳。以单个碎片为例,传统的 11 阶 Gauss-Jackson 积分器积分 7 天,耗时约 8 s,10 万个碎片耗时则高达 10 天,因此,数值积分器不适用于大规模空间碎片的长期预报。计算效率优越的解析法,因其简化摄动力模型,精度较低,一般针对卫星运动的物理特征作定性分析(轨道参数的长周期/短周期变化等),还无法满足高精度空间应用的要求,例如,利用 SGP4 算法和 TLE 数据预报 7 天 800 km 以下轨道高度的碎片时,误差高达 10 km。半解析法则兼顾二者优势,能进行快速、精确的轨道积分,适用于大规模、长期的轨道预报<sup>[2-5]</sup>。

半解析卫星轨道理论主要利用平均法和多尺度法摄动方法,比较而言,多尺度法更能有效处理较为复杂的摄动影响,例如大气阻力、太阳光压等非保守力<sup>[6]</sup>。为此,文中研究了多尺度法在半解析轨道理论中的应用,并以精密数值积分结果评定其精度。

## 1 参数化的摄动方程

惯性系下,空间目标在轨运动方程为:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \mathbf{q} + \nabla R \quad (1)$$

式中: $\mathbf{r}$ 和 $\ddot{\mathbf{r}}$ 分别为目标的位置矢量和加速度矢量; $\mu$

为地心引力常数; $R=R(\mathbf{r},t)$ 为非球形引力和日月三体引力引起的加速度; $\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)$ 为由大气阻力、太阳光压等非保守力引起的加速度。上式可通过参数变化方法转化成 6 个关于开普勒轨道根数的一阶微分方程,如只考虑保守力的拉格朗日运动方程和同时考虑保守力和非保守力的高斯运动方程<sup>[4]</sup>。

为避免倾角  $i$  或离心率  $e$  趋近于 0 时而引起的运动方程奇异,采用分点根数 (Equinoctial Element)  $(a, h, k, p, q, \lambda)$  取代开普勒轨道根数  $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$ , 其中,  $a$  为半长轴;  $h, k$  离心率矢量分量;  $p$  和  $q$  为升交点赤经矢量分量;  $\lambda$  为平经度<sup>[7]</sup>。

引入向量  $\mathbf{a}(t)$  表示密切轨道根数,即:  $a_1(t)=a(t)$ ,  $a_2(t)=h(t)$ ,  $a_3(t)=k(t)$ ,  $a_4(t)=p(t)$ ,  $a_5(t)=q(t)$ ,  $a_6(t)=\lambda(t)$ 。

则摄动方程(1)可转化为:

$$\frac{\partial a_i(t)}{\partial t} = n(a) \delta_{i6} + \frac{\partial a_i(t)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} - \sum_{j=1}^6 (a_i, a_j) \frac{\partial R}{\partial a_j} \quad (2)$$

式中:  $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ,  $n(a)$  为平均运动;  $\delta_{i6}$  为 Kronecker 参数,取值 1 或 -1,  $(a_i, a_j)$  为泊松括号<sup>[4]</sup>。上式包含三种摄动力对轨道根数的影响,即:(1) 地球中心引力  $\dot{a}_i = n(a) \delta_{i6}$ ; (2) 非保守力  $\dot{a}_i = \frac{\partial a_i(t)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q}$ ; (3) 保守力

$$\dot{a}_i = - \sum_{j=1}^6 (a_i, a_j) \frac{\partial R}{\partial a_j}。$$

## 2 基于多尺度法的半解析轨道理论

### 2.1 半解析轨道理论的基本思想

半解析轨道理论的基本思想是将密切轨道根数  $\hat{a}_i$  分解成平均轨道根数和  $a_i$  以  $2\pi$  为周期快速变化的短周期项  $\eta_i$ , 即

$$\hat{a}_i = a_i + \eta_i(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, t) \quad (3)$$

利用平均法的半解析轨道理论的思想简述如下:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \xrightarrow{\text{VOP}} \dot{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{a}, t) \xrightarrow{\text{平均法}} \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\eta}$$

式中:  $\dot{\mathbf{a}} = \langle \dot{\mathbf{f}} \rangle$  ( $\langle \rangle$  为平均算子),  $\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{n(a)} \int (\dot{\mathbf{f}} - \langle \dot{\mathbf{f}} \rangle) d\lambda$ ,

VOP 为变量转换。将平均算子作用于摄动函数  $\hat{\mathbf{f}}$  得



$$a^0 = \hat{a}_i, a^{j+1} = \hat{a}_i - \eta(a^j), j=0, 1, \dots$$

## 2.4 平均轨道根数与短周期项系数获取

平均轨道根数,因其随时间缓慢变化,可通过 Lagrange 内插公式进行内插,获得积分时间内任意时刻的积分值。以 1 天为间隔,预报 7 天,则每个轨道根数需要存储 8 个系数,因此共有系数  $8 \times 6 = 48$  个。

短周期项  $\eta_i(a, h, k, p, q, \lambda)$  中 Fourier 系数  $C_i^j, S_i^j$  与  $\lambda$  无关(各摄动力 Fourier 系数  $C_i^j$  和  $S_i^j$  推导见参考文献[4]),通过 Lagrange 内插获得每天的短周期项,若  $N=10$ ,则共存储 120 个短周期项系数 ( $C_i^j$  和  $S_i^j$ ),积分 7 天,共 960 个,加上平均轨道根数 Fourier 系数,共 1 008 个。大多数情况下,内插精度在 1 km 以内;而在数值法中,内插三维坐标  $(x, y, z)$ ,每小时至少存储系数 60 个,积分 7 天,共 10 080 个,其内插精度明显差于半解析法。

## 3 半解析卫星轨道积分器精度分析

基于半解析轨道理论的积分器已基本实现,文中利用数值模拟方法对其精度性能进行测试。首先,利用数值积分器产生一组“真轨道”;然后,利用半解析轨道积分器进行轨道预报,预报时间分别设为 5 小时、1 天、10 天,轨道计算每分钟进行。将半解析轨道积分器预报结果与“真轨道”之差作为半解析轨道预报误差。

为较全面地测试半解析轨道积分器的精度性能,分别选取不同轨道高度、面质比、倾角和升交点赤经 RAAN 的空间目标。半解析轨道积分器所采用的力学模型与产生“真轨道”时采用的数值积分器相同,其中,重力场模型为 JGM-3,大气密度模型为 NRLMSISE-00 模型,大气阻力系数  $C_D$  为 2.2,光压系数  $C_R$  为 1.1,平均轨道根数采取四阶 Runge-Kutta 积分器进行积分,步长 1 天。

### 3.1 重力场阶数的选取

重力场阶数的选取对于积分器运行效率有一定的影响,为此,需先确定较为合适的重力场阶数。对于近地点高度 300 km、离心率 0.064、倾角  $5^\circ$  的目标,分别选取三组不同升交点赤经 RAAN 的轨道,在不同重力场阶数下各预报 1 天,精度见图 1。

将不同重力场阶数下的半解析法结果与数值法提供的“真轨道”比较(重力场阶数  $70 \times 70$ )。可以看

出,重力场阶数  $N$  从  $2 \times 2$  增加到  $30 \times 30$  时,预报 1 天的精度明显提高;当阶数超过  $30 \times 30$  时,精度提高却不甚显著。考虑到积分运行的效率,重力场阶数超过  $30 \times 30$  时已无太大意义,故取重力场阶数  $30 \times 30$ ,即可满足精度要求,同时又不影响积分运算速度。

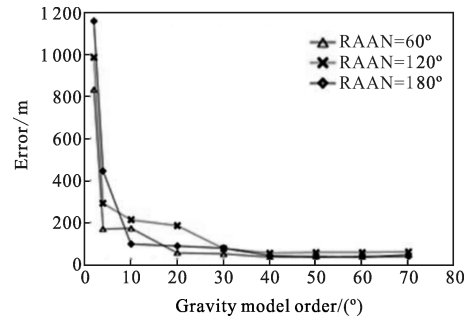


图 1 不同重力场阶数下预报 1 天的误差

Fig.1 RMS for 1-day prediction with different gravity model sizes

### 3.2 不同面质比下的半解析轨道积分器精度分析

面质比大小与大气阻力和光压摄动加速度有简单的线性关系,能否较好处理大气阻力和光压摄动是半解析轨道积分精度高低的关键之一。为此,选取近地点高度为 300~4 000 km 的 7 个空间目标,倾角  $5^\circ$ ,升交点赤经  $60^\circ$ ,每个目标分别设定 0.001、0.01、0.1 和 0.5 的面质比,利用该积分器分别进行 5 小时、1 天、10 天的预报,精度见表 1。▲表示目标在 10 天之内坠落,积分终止。

由表 1 得出以下结果:

(1) 面质比为 0.001 时,300 km 高度的目标,预报 5 小时、1 天、10 天的精度分别在 15 m、240 m、25 km 以内;随着高度的增加,预报精度逐渐提高,高度为 1 000 km 时,1 天的预报精度为 39 m,10 天为 177 m;

(2) 轨道高度较低的目标,随面质比的增加,相应时间内的预报误差呈相应面质比倍数增加,如 300 km 高度的目标,面质比分别为 0.001、0.01、0.1、0.5 时,1 天的预报误差相应约为 240 m、2.2 km、22 km、110 km,这是由于大气阻力影响所致;轨道高度大于 1 000 km 时,对于大面质比的碎片(0.1、0.5),相应时间内,预报误差呈相应面质比倍数增加,而小面质比的碎片却无此现象,原因是在 800 km 左右的轨道高度上,大气阻力与太阳光压影响相当,随高度的增加,大气质量密度甚微(约  $10^{-15}$  g/km<sup>3</sup> 量级),在此高度上的空间目标受太阳光压影响较强。

以上表明,低轨目标的轨道预报精度与面质比



密切相关,因此,在轨道力学研究中,准确估计空间目标的弹道系数至关重要。

表 1 不同面质比的目标分别预报 5 小时、1 天、10 天的 RMS (单位: m)

Tab.1 RMS for 5-hour, 1-day and 10-day predictions for the orbits with different Area-to-mass(A/m) ratios (Unit: m)

Perigee altitude/km	A/m	5 h RMS	1 day RMS	10 days RMS
300	0.001	14.26	235.59	24 952.25
300	0.01	88.07	2 206.98	248 846.84
300	0.1	870.10	21 982.04	2 505 833.18
300	0.5	4 355.05	110 902.86	▲
400	0.001	11.49	223.22	23 176.57
400	0.01	73.37	2051.34	211 419.33
400	0.1	714.00	20466.22	2 500 093.20
400	0.5	3584.73	108 974.90	▲
600	0.001	10.41	112.22	1 657.40
600	0.01	28.13	175.85	7 300.69
600	0.1	57.16	831.42	64 222.33
600	0.5	191.58	3771.52	325 875.05
700	0.001	9.02	111.52	1 291.03
700	0.01	29.39	131.96	2 391.71
700	0.1	33.81	242.37	13 541.43
700	0.5	61.40	754.63	63 417.73
1 000	0.001	7.19	39.48	177.22
1 000	0.01	9.82	46.83	203.65
1 000	0.1	21.19	55.85	1 700.08
1 000	0.5	53.76	220.11	10 050.76
2 000	0.001	5.06	37.63	172.73
2 000	0.01	7.50	38.74	197.86
2 000	0.1	17.74	70.51	817.74
2 000	0.5	64.32	279.47	3 127.40
4 000	0.001	2.73	6.30	39.94
4 000	0.01	4.80	9.52	86.83
4 000	0.1	17.81	81.46	827.09
4 000	0.5	90.00	410.46	4 154.25

图 2 为高度 400 km、不同面质比下的目标预报 1 天的沿迹 A、法向 C、径向 R 误差。

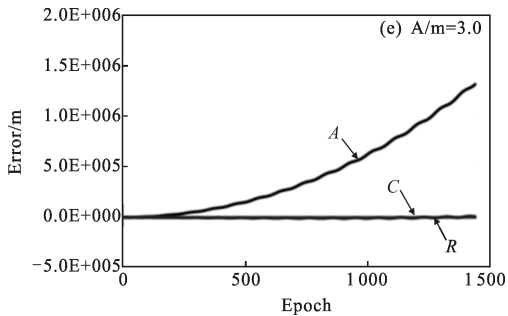
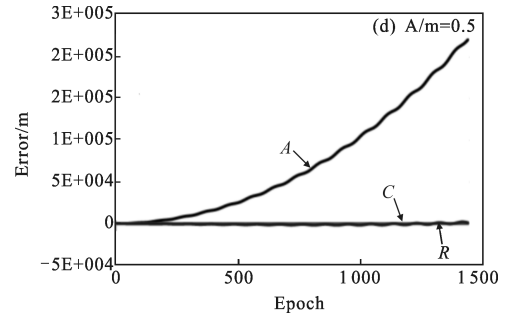
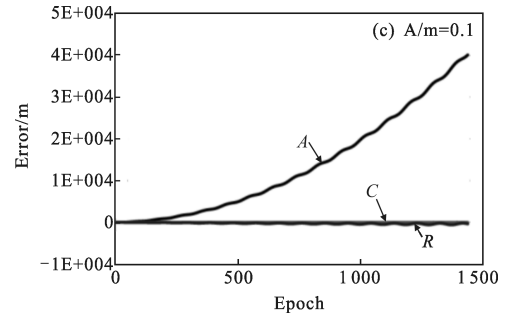
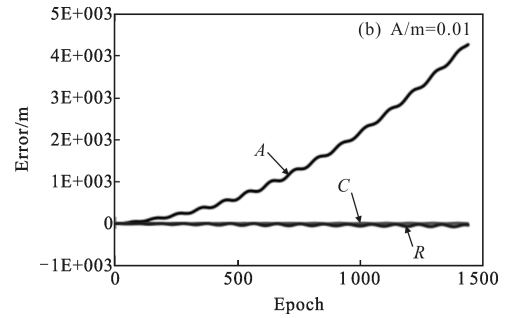
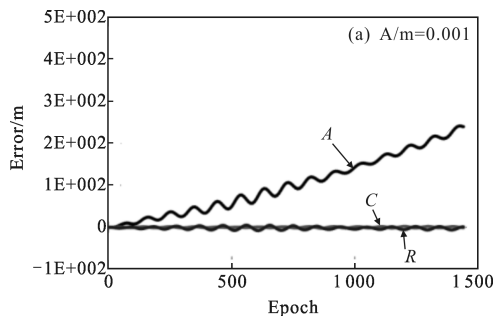


图 2 近地点高度 400 km 的目标轨道,预报 1 天,沿迹、法向、径向上的误差

Fig.2 RMS for 1-day prediction in the along-track, Cross and radial for the orbits with 400 km-perigee-altitudes

图 2 说明低轨目标的轨道误差,主要体现在沿迹方向上,且随面质比的增大,沿迹方向上的预报误差呈相应面质比倍数关系;由于各摄动力的作用,三个方向均伴随一定的周期性变化,其中,沿迹方向的周期性较为明显,法向、径向方向的误差在 0 值附近有周期性变化,其变化幅度因面质比而异。

3.3 不同  $i$ 、RAAN 下的半解析轨道积分器精度分析

为分析不同倾角  $i$ 、升交点赤经 RAAN 对轨道预报精度的影响, 分别选取三组不同轨道高度的目标预报 1 天, 精度见表 2。

由表 2 看出, 不同倾角、升交点赤经下, 1 000 km 高度的目标轨道预报 1 天, 精度差异较小, 而 400 km

和 600 km 高度的目标轨道预报精度表现较为复杂, 如高度 400 km, 倾角  $85^\circ$ , 不同升交点赤经下的预报精度差相差近 20 倍。此外, 高度 400 km, 倾角  $5^\circ$  的轨道, 预报精度明显差于其它倾角下的预报精度, 这与参考文献[2]结果类似, 究其原因是近地轨道区域的大气密度受太阳辐射影响严重, 而倾角低的目标

表 2 面质比 0.01 时, 不同  $i$ 、RAAN 下的轨道预报 1 天的 RMS (单位: m)

Tab.2 RMS for 1-day prediction for the orbits with Area-to-mass ratios 0.01 and different inclinations, RAANs (Unit: m)

Perigee altitude /km	$i$	RAAN	1 day RMS	Perigee altitude /km	$i$	RAAN	1 day RMS	Perigee altitude /km	$i$	RAAN	1 day RMS
400	$5^\circ$	$0^\circ$	2305.01	600	$5^\circ$	$0^\circ$	338.72	1 000	$5^\circ$	$0^\circ$	38.86
400	$5^\circ$	$60^\circ$	2051.34	600	$5^\circ$	$60^\circ$	175.85	1 000	$5^\circ$	$60^\circ$	46.83
400	$5^\circ$	$120^\circ$	2239.91	600	$5^\circ$	$120^\circ$	35.61	1 000	$5^\circ$	$120^\circ$	71.62
400	$5^\circ$	$180^\circ$	1916.70	600	$5^\circ$	$180^\circ$	30.49	1 000	$5^\circ$	$180^\circ$	70.31
400	$5^\circ$	$240^\circ$	1772.66	600	$5^\circ$	$240^\circ$	151.31	1 000	$5^\circ$	$240^\circ$	31.30
400	$5^\circ$	$300^\circ$	2206.36	600	$5^\circ$	$300^\circ$	258.72	1 000	$5^\circ$	$300^\circ$	19.63
400	$45^\circ$	$0^\circ$	1483.04	600	$45^\circ$	$0^\circ$	119.33	1 000	$45^\circ$	$0^\circ$	42.35
400	$45^\circ$	$60^\circ$	1291.78	600	$45^\circ$	$60^\circ$	284.80	1 000	$45^\circ$	$60^\circ$	20.54
400	$45^\circ$	$120^\circ$	1204.27	600	$45^\circ$	$120^\circ$	237.64	1 000	$45^\circ$	$120^\circ$	86.44
400	$45^\circ$	$180^\circ$	1249.64	600	$45^\circ$	$180^\circ$	75.04	1 000	$45^\circ$	$180^\circ$	22.65
400	$45^\circ$	$240^\circ$	978.05	600	$45^\circ$	$240^\circ$	45.97	1 000	$45^\circ$	$240^\circ$	29.46
400	$45^\circ$	$300^\circ$	1657.78	600	$45^\circ$	$300^\circ$	125.34	1 000	$45^\circ$	$300^\circ$	52.66
400	$85^\circ$	$0^\circ$	674.71	600	$85^\circ$	$0^\circ$	41.75	1 000	$85^\circ$	$0^\circ$	42.13
400	$85^\circ$	$60^\circ$	199.09	600	$85^\circ$	$60^\circ$	97.38	1 000	$85^\circ$	$60^\circ$	43.60
400	$85^\circ$	$120^\circ$	505.63	600	$85^\circ$	$120^\circ$	33.63	1 000	$85^\circ$	$120^\circ$	13.22
400	$85^\circ$	$180^\circ$	580.88	600	$85^\circ$	$180^\circ$	127.48	1 000	$85^\circ$	$180^\circ$	29.81
400	$85^\circ$	$240^\circ$	49.43	600	$85^\circ$	$240^\circ$	21.92	1 000	$85^\circ$	$240^\circ$	8.98
400	$85^\circ$	$300^\circ$	900.80	600	$85^\circ$	$300^\circ$	29.78	1 000	$85^\circ$	$300^\circ$	55.89
400	$125^\circ$	$0^\circ$	130.41	600	$125^\circ$	$0^\circ$	194.65	1 000	$125^\circ$	$0^\circ$	27.93
400	$125^\circ$	$60^\circ$	400.79	600	$125^\circ$	$60^\circ$	197.50	1 000	$125^\circ$	$60^\circ$	37.99
400	$125^\circ$	$120^\circ$	146.19	600	$125^\circ$	$120^\circ$	207.24	1 000	$125^\circ$	$120^\circ$	23.84
400	$125^\circ$	$180^\circ$	212.84	600	$125^\circ$	$180^\circ$	122.44	1 000	$125^\circ$	$180^\circ$	84.24
400	$125^\circ$	$240^\circ$	170.47	600	$125^\circ$	$240^\circ$	170.81	1 000	$125^\circ$	$240^\circ$	47.75
400	$125^\circ$	$300^\circ$	37.81	600	$125^\circ$	$300^\circ$	105.62	1 000	$125^\circ$	$300^\circ$	11.51
400	$165^\circ$	$0^\circ$	294.37	600	$165^\circ$	$0^\circ$	138.83	1 000	$165^\circ$	$0^\circ$	27.64
400	$165^\circ$	$60^\circ$	331.79	600	$165^\circ$	$60^\circ$	44.39	1 000	$165^\circ$	$60^\circ$	20.42
400	$165^\circ$	$120^\circ$	300.43	600	$165^\circ$	$120^\circ$	14.88	1 000	$165^\circ$	$120^\circ$	76.05
400	$165^\circ$	$180^\circ$	351.78	600	$165^\circ$	$180^\circ$	35.72	1 000	$165^\circ$	$180^\circ$	57.86
400	$165^\circ$	$240^\circ$	257.39	600	$165^\circ$	$240^\circ$	22.76	1 000	$165^\circ$	$240^\circ$	34.79
400	$165^\circ$	$300^\circ$	77.31	600	$165^\circ$	$300^\circ$	145.71	1 000	$165^\circ$	$300^\circ$	54.49

在太阳辐射区域内运行时间相对较长,所受大气阻力累积影响较严重。值得注意的是大气密度模型误差高达10%以上,而积分器自身误差远小于大气密度模型误差,因此,准确处理大气阻力摄动还需从精确模型化近地空间区域的大气密度入手。

## 4 结论

空间碎片数量多、分布广,发展兼具精度和计算速度的半解析轨道积分器对未来空间态势感知快速高效可靠服务具有积极意义。利用多尺度摄动方法的半解析卫星轨道积分器已初步开发完成,目前正在进入数值模拟测试、算法和软件的完善阶段。由初步测试结果得出以下几点基本结论:

(1) 文中获得的轨道预报精度比参考文献[2]给出的精度高约一个量级;(2) 半解析轨道积分时采用 $30\times 30$ 阶次的重力场模型,既有较好的积分计算效率,又基本确保精度需求;(3) 当轨道近地点高度高于1000 km,空间目标面质比小于0.1时,1天的轨道预报精度普遍优于100 m,10天的预报精度优于2000 m,表明在大部分空间应用中,半解析轨道积分器可替代精密数值积分器;(4) 低轨空间目标的轨道预报误差主要体现在沿迹方向上,表明所研发的半解析轨道积分器在处理大气阻力摄动方面还有待改进,这将成为下一阶段的研究重点。

## 参考文献:

- [1] Liu Chunbo, Zhao Shaobo, Han Xiang'e. Detection of space debris of centimeters in size via spaceborne lidar [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41 (5): 1244–1248. (in Chinese)
- [2] O'Brien R, Sang J. Semianalytic satellite theory using the method of multiple scales [C]//AIAA paper 2004–4852, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, 2004, 1: 243–254.
- [3] Liu J J F, Alford R L. Semianalytic theory for a close-Earth artificial satellite [J]. *Journal of Guidance and Control*, 1980, 3(4): 304–311.
- [4] Danielson D A, Sagovac C P, Neta B, et al. Semianalytic Satellite Theory [M]. US: Naval Postgraduate School, Monterey, 1995: 93943.
- [5] Bezděk A, D Vokrouhlický. Semianalytic theory of motion for close-Earth spherical satellites including drag and gravitational perturbations [J]. *Planetary and Space Science*, 2004, 52(14): 1233–1249.
- [6] Nayfeh, A. Perturbation Methods[M]. New York: John Wiley & Sons, 1977.
- [7] Montenbruck O, Gill E. Satellite Orbits-Models, Methods, and Applications [M]. Berlin: Springer-Verlag, Heidelberg, 2000.
- [8] Sang J, Bennett J, Smith C. Estimation of ballistic coefficients of low altitude debris objects from historical two line elements [J]. *Advances in Space Research*, 2013, 52: 117–124.