

## 基于加速度信号的 TMT 三镜镜面 jitter 测量

安其昌<sup>1,2</sup>, 张景旭<sup>1</sup>, 杨飞<sup>1</sup>

- (1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;
2. 中国科学院大学, 北京 100049)

**摘要:** 为了更好地对于 TMT 三镜镜面 jitter 进行评价, 基于镜面方向的加速度信号, 通过传递函数以及功率谱的方法, 获得了镜面 jitter 的频域分布与数值特征。首先, 对于梯形积分、辛普森积分以及 3/8 辛普森积分的基本性质进行推导, 之后基于功率谱的思想, 提出利用白噪声填满数据全部频域以及结合数值方法得到传递函数; 最后对于实际测量得到的加速度信号, 得到了米级口径望远镜镜面 jitter 的数值以及频域分布, 同时证明了利用文中方法对 TMT 三镜镜面 jitter 进行评价的可行性。文中的方法对于同类的大口径望远镜的 jitter 测量也有一定的借鉴意义。

**关键词:** TMT 三镜; 数值积分; jitter; 传递函数; 功率谱

**中图分类号:** TH751 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2015)10-2970-05

## TMT tertiary mirror jitter measurement with acceleration signal

An Qichang<sup>1,2</sup>, Zhang Jingxu<sup>1</sup>, Yang Fei<sup>1</sup>

- (1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** To evaluate the jitter of the Thirty Meter Telescope tertiary mirror, the acceleration signal collected from the tertiary mirror should be integrated into displacement signal and to be analyzed. The first and foremost, the acceleration of the mirror along the normal line was achieved. Then, the trapezoidal, Simpson, 3/8 Simpson numerical integration method were analyzed to show the basic property of the integration method; after that, using the transfer function and spectrum method, the jitter property of a large telescope at one meter scale was analyzed in both value and frequency domain and the jitter after adaptive optical adjustment was 6  $\mu\text{m}$  RMS. At the same time, this verifies the testing process plan for the jitter of the TMT M3. In this paper, the basic procedure for mirror jitter analysis was presented, and the conclusion can be draw that the method is adequate to fit the requirement proposed by TMT project. This work will give guidance to the jitter testing in the similar large aperture system.

**Key words:** TMT M3; numerical integration; jitter; transfer function; power spectral density

收稿日期: 2015-02-07; 修订日期: 2015-03-18

基金项目: 国家自然科学基金(11403022)

作者简介: 安其昌(1988-), 男, 研究实习员, 博士生, 主要从事空间机构学方面的研究。Email: anjj@mail.ustc.edu.cn

导师简介: 张景旭(1964-), 男, 研究员, 博士生导师, 主要从事大型光电望远镜结构总体技术方面的研究。

Email: zhangjx@ciomp.ac.cn

## 0 引言

随着光机系统的尺寸越来越大,曝光时间越来越长,对于系统的 jitter 要求越来越高。所谓 jitter,指的是系统输出光束参数的不稳定性,大多数情况下由于波前中的具有倾斜分量为主导像差,一般情况下都是以光束倾斜或者光学元件法线变化作为 jitter 的表征量。

30 m 望远镜 (TMT) 计划由美国加州理工学院 (Caltech)、加州大学系统 (UC) 和加拿大大学天文研究联盟联合发起,其中中国科学院长春光学精密机械与物理研究所承担三镜系统。由于 TMT 三镜系统在系统中承担的是转折镜的功能,将主光学系统收集到的光线转折到位于望远镜主镜两侧的奈氏平台上,受到长传输距离 (15 m 以上) 的影响,由于系统的力矩波动 (对于未配平的系统而言更甚)、外界振动、风载以及热载荷所引起的沿镜面法向的 jitter 如果不能很好地检测与抑制将会对系统成像造成巨大的影响<sup>[1-6]</sup>。

无陀螺仪惯性制导系统的优点是成本低、测角精度高,尤其是对于大型光机系统,其优点更加突出:首先,由于光路的限制,布置传感器的位置较为局促,利用加速度计可以通过一系列方法获得系统六维运动信息,而且测角精度随着传感器的分散程度而增加,这一点陀螺仪并不具备;其次,由于成本限制,如果系统的尺寸增加,成本较为低廉的加速度计的应用也更加广泛<sup>[7-9]</sup>。

对于获得的加速度信号,并不能作为 jitter 评价的指标,TMT 招标方要求镜面 jitter 小于 120  $\mu\text{m}$  RMS,针对该指标,需要对加速度信号进行积分处理。数值积分的基本方法分为时域积分以及频域积分,他们二者各有各的优缺点,时域积分算法成熟,同时有不同代数精度的算法,但是其积分结果不可避免地会产生二次的趋势项,如果使用拟合的方法去除,同时也可能去除了系统本身的信息;另一方面,对于数值精度越高的高阶算法,其受初值的影响也越大;频域积分由于是对于数据进行整体的变换,故可以很好地避免趋势项,但是对于信号中的低频分量往往不能很好地体现<sup>[10]</sup>。

文中拟利用刚体运动学理论使用单向加速度计测量 TMT 三镜镜面法向加速度信号;同时,利用功率谱的数学方法,将时域积分与频域积分结合起来,从传递函数的角度,直接得到 TMT 三镜镜面 jitter 的功率谱,进而通过功率谱的基本数学特征即可得到 TMT 招标方所要求的指标。

## 1 基本推导

由于单方向加速度传感器只可以得到随动坐标系上的某一固定矢量上的加速度信号,故需要根据多个加速度信号进行联合求解。根据刚体运动学原理,对于随动坐标系中任何一点的线加速度可以表示为:

$$a_p = a_o + \dot{\omega} \times \vec{r}_{op} + \omega \times (\omega \times \vec{r}_{op}) \quad (1)$$

式中: $a_o$ 为牵连加速度; $\vec{r}_{op}$ 为  $p$  点在随动坐标系中的位矢; $\omega$ 、 $\dot{\omega}$ 分别为角加速度与角速度。位于  $p$  点的单轴加速度计, $\theta$ 为敏感轴方向,假设各测点获得的光轴方向输出值为:

$$A = [a_o + \dot{\omega} \times \vec{r}_{op} + \omega \times (\omega \times \vec{r}_{op})] \cdot \theta \quad (2)$$

利用矩阵论中的叉乘等效表达式(3)可以对于模型进行线性化,如公式(4)所示:

$$\omega \times r = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$A = \theta \cdot a_o + \vec{r}_{op} \times \theta \cdot \dot{\omega} + \theta \cdot \Lambda^2 \vec{r}_{op} \quad (4)$$

由公式(4)可以得到在三个加速度计输出的情况下的信号:

$$\begin{aligned} A_1 &= [a_o + \dot{\omega} \times \vec{r}_{op1} + \Lambda^2 \vec{r}_{op1}] \cdot \theta_1 \\ A_2 &= [a_o + \dot{\omega} \times \vec{r}_{op2} + \Lambda^2 \vec{r}_{op2}] \cdot \theta_2 \\ A_3 &= [a_o + \dot{\omega} \times \vec{r}_{op3} + \Lambda^2 \vec{r}_{op3}] \cdot \theta_3 \end{aligned} \quad (5)$$

假设几个加速度计敏感轴的方向相互平行,同时三个测点计几何中心与镜面质心重合,故:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta = [0, 0, 1] \quad (6)$$

将三个加速度计得到的信号相加可得:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 3a_o \cdot \theta + \dot{\omega} \times (\vec{r}_{op1} + \vec{r}_{op2} + \vec{r}_{op3}) +$$

$$\theta \cdot \Lambda^2(\vec{r}_{op1} + \vec{r}_{op2} + \vec{r}_{op3}) \quad (7)$$

由于牵连坐标系的原点设为零点

$$\vec{r}_{op1} + \vec{r}_{op2} + \vec{r}_{op3} = 3\vec{r}_{oo} = 0 \quad (8)$$

而可以得到镜面方向的加速度信号:

$$a_m = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} \quad (9)$$

由之前的推导可以看出,加速度计可以较为容易的将几何中心布置与系统上的某点,这一点对于陀螺仪来说也是比较困难的。

获得加速度信号之后,需要进行积分获得位移信号,按照离散积分的理论,可以先对于数据进行插值,之后再对于基底函数进行符号积分,但是这种方法随着数据量的增加,其难度也大幅增加;另一种方法为数值积分,大体思路就是求曲线下方围成的面积。其对于数值积分,主要的方法有梯形积分,辛普森积分以及 3/8 辛普森积分,主要区别在于不同数据点之间保持方式不同,其表达式分别如下所示:

$$f_k = f_{k-1} + \frac{\Delta x}{2} (f'_k + f'_{k-1})$$

$$f_k = f_{k-2} + \frac{\Delta x}{3} (f'_{k-2} + 4f'_k + f'_{k-1}) \quad (10)$$

$$f_k = f_{k-3} + \frac{3\Delta x}{8} (f'_{k-3} + 3f'_{k-2} + 3f'_k + f'_{k-1})$$

以辛普森积分为例,计算所需前几点的数据变化不大,否则在数据的末段,会发生跳动,如图 1 所示,同时不论利用何种时域积分,趋势项的影响也是不能避免的。

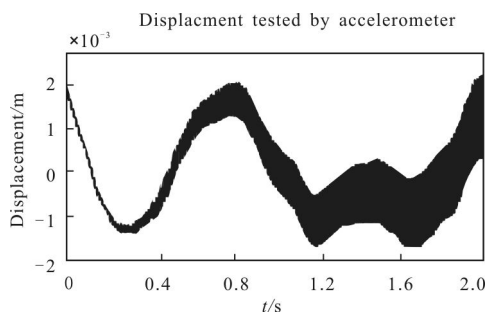


图 1 辛普森积分的跳动效应

Fig.1 Ripple effort of Simpson integration

对于以上数值积分公式,结合数字滤波器的思路,如果通过某种方法获得其传递函数,对于实际的积分问题,就可以直接得到结果,而不需要复杂的中

间过程。为了得到系统的传递函数,在此引入功率谱的方法。

随机过程 $[x_1, x_2, \dots, x_N]$ 的功率谱由下式给出:

$$S(e^{j\omega})_s = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{n=1}^N x_n e^{-j\omega n} \right|^2 \quad (11)$$

式中: $\omega$ 的单位是 rad/s。

该信号也可以通过一个窗函数加权。加权后的功率谱为:

$$S(e^{j\omega})_s = \frac{\frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{n=1}^N x_n w_n e^{-j\omega n} \right|^2}{\frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N w_n \right|^2} \quad (12)$$

考虑积分系统为线性时不变系统,其输出的自相关序列为:

$$\begin{aligned} R_{yy}(n, m+n) &= E[y(n)y(n+m)] = \\ &= E \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(r)x(n+m-r) \right] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(r)R_{xx}(m-r+k) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_{hh}(l)R_{xx}(m-l) \end{aligned} \quad (13)$$

进而可以到输入功率谱、输出功率谱以及传递函数之间的关系:

$$S(e^{j\omega})_{yy} = S(e^{j\omega})_{xx} |H(e^{j\omega})|^2 \quad (14)$$

利用上式,不仅可以从已知谱的信号获得输出谱,同时也可以从实际获得的数据来估计输出的 jitter。针对公式(14),使用蒙特卡洛的建模方法,可以通过训练集得到传递函数的模 $|H(e^{j\omega})|^2$ 。

值得注意的是,一般的训练集并不能将频域的全部区域覆盖,而会在结果中产生一些虚假的峰谷,造成误差;同时,其功率谱的理论值表达式也比较复杂且均值不为零,去除趋势项时可能引入误差,不利于定性判断。对于白噪声序列,具有零均值、频带分布广、理想功率谱为直线的优点,故将白噪声序列作为计算传递函数的训练集。通过 10 000 次的计算得到三种积分方法的传递函数如图 2 所示,可以看出数值积分的本质是一个低通滤波器,对于需要分析的高频信号,最好首先将他们分离出来,单独分析。

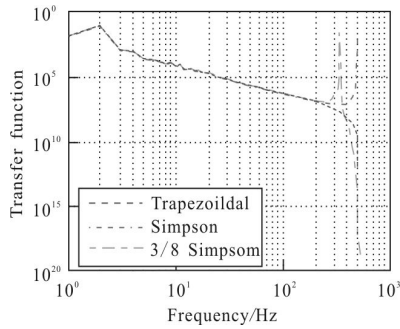


图 2 数值积分的传递函数

Fig.2 Transfer function of numerical integration

### 2 实验验证

基于中等口径的望远镜主镜,进行镜面 jitter 测试实验装置如图 3 所示,采用单向加速度计使用蜂蜡与镜面进行连接。

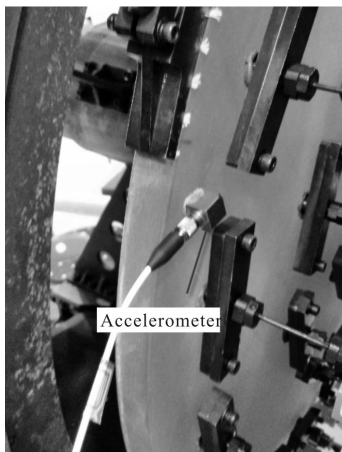


图 3 镜面及加速度计连接

Fig.3 Mirror and the accelerometer

通过实验,通过公式(10)可以获得某一时间段的加速度信号如图 4 所示,其功率谱如图 5 所示,系统在一个采样周期内进行了小幅运动。

由输入信号的功率谱,利用传递函数,可以得到

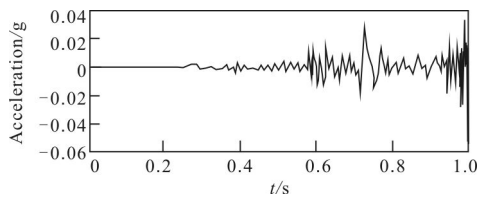


图 4 镜面加速度信号

Fig.4 Mirror acceleration signal

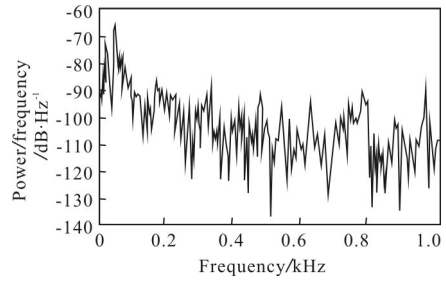
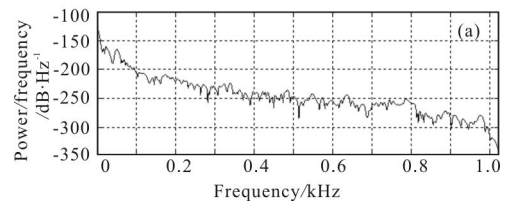


图 5 输入信号功率谱

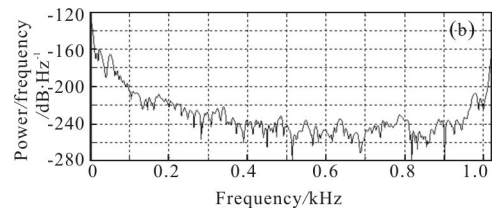
Fig.5 Power spectral density of input signal

不同积分方法下对应的输出功率谱,如图 6 所示。



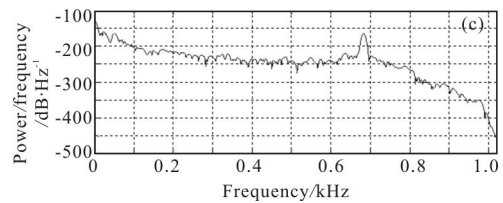
(a) 梯形积分的结果

(a) Trapezoidal integration



(b) 辛普森积分结果

(b) Simpson integration



(c) 3/8 辛普森积分结果

(c) 3/8 Simpson integration

图 6 不同积分方法积分结果

Fig.6 Results of different integration methods

利用输出 jitter 的功率谱,就可以很好地分析其频域分布。另一方面,由于功率谱指的是某频率所对应的能量,求和的结果就可以得到整体的信号的均方根。累计功率谱就是对于此概念所提出来的,其数值是截止当前频率的所有功率谱之和,另外,其转

折点可以认为代表着系输出的截止频率。以上三种方法的累计功率谱如图 7 所示,可见三种方法得到的结果相差很小,jitter 的能量主要集中在 10 Hz 之内,可以利用 AO 系统矫正,其数值为  $6 \mu\text{m RMS}$ 。

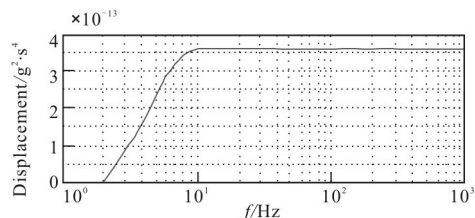


图 7 数据的累计功率谱

Fig.7 Accumulative power spectral density

### 3 结束语

由于加速度计直接获得的数据不能表征需要的结果,故需利用刚体运动学理论,通过数据的处理,将使用单向加速度计测量得到的结果,变为镜面法向加速度信号;同时,从传递函数的角度,结合时域积分与频域积分方法,直接得到镜面 jitter 的功率谱,进而通过功率谱的基本数学特征即可得到 TMT 招标方所要求的指标。

#### 参考文献:

- [1] Ford V, Carter C, Delrez C, et al. Jitter studies for the secondary and tertiary mirror systems on the thirty meter telescope [C]//SPIE Advances in Optical and Mechanical Technologies for Telescopes and Instrumentation, 2014, 9151: 1-15.
- [2] Sheehan M, Carter C. A high speed data acquisition system to measure telescope response to earthquake induced ground motion [C]// SPIE Modeling System Engineering and Project Management for Astronomy IV, 2010, 7738: 77381P-10.
- [3] Zhu Shuo, Zhang Xiaohui. Application of error detaching to Ritchey-Common test for flat mirrors [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2014, 22(1): 7-12. (in Chinese)
- [4] Ross Zhelem. Specification of optical surface accuracy using the structure function [C]//SPIE, 2011, 8083: 808310-1~808310-10.
- [5] Zhou Chao, Yang Hongbo, Wu Xiaoxia, et al. Influence of the wind loading on 1.2 m telescope[J]. *Infrared and Laser Engineer*, 2011, 40(5): 889-893. (in Chinese)  
周超, 杨洪波, 吴晓霞, 等. 1.2 望远镜风载作用分析[J]. *红外与激光工程*, 2011, 40(5): 889-893.
- [6] Shi Tu, Yang Yongying, Zhang Lei, et al. Surface testing methods of aspheric optical elements [J]. *Chinese Optics*, 2014, 7(1): 26-46. (in Chinese)  
师途, 杨甬英, 张磊, 等. 非球面光学元件的面形检测技术[J]. *中国光学*, 2014, 7(1): 26-46.
- [7] Su Yanqin, Zhang Jingxu, Wang Fuguo, et al. Seismic analysis of TMT M3 cell assembly based on spectral response[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2014, 22(4): 996-1003. (in Chinese)  
苏燕芹, 张景旭, 王富国, 等. 基于谱分析的 30 m 望远镜三镜支撑结构地震分析 [J]. *光学 精密工程*, 2014, 22(4): 996-1003.
- [8] Wang Fuguo, Yang Hongbo, Yang Fei, et al. Optimization and analysis for the axis support points position of the large aperture mirrors [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2007, 36(6): 877-880. (in Chinese)  
王富国, 杨洪波, 杨飞, 等. 大口径主镜轴向支撑点位置优化分析[J]. *红外与激光工程*, 2007, 36(6): 877-880.
- [9] Wang Fuguo, Yang Fei, Zhao Hongchao, et al. Progress in TMT M3 System[J]. *Chinese Optics*, 2013, 10(6): 643-651. (in Chinese)  
王富国, 杨飞, 赵宏超, 等. TMT 望远镜三镜系统的研究进展[J]. *中国光学*, 2013, 10(6): 643-651.
- [10] Jonathan R White, Douglas E Adams, Mark A Rumsey. Theoretical analysis of acceleration measurements in a model of an operating wind turbine [C]// Proc SPIE, Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems, 2010, 7643: 76431F.