

## 无动力学滞后的广义最优制导律解析研究

王 辉<sup>1</sup>, 武 涛<sup>2</sup>, 杜运理<sup>2</sup>, 林德福<sup>1</sup>

(1. 北京理工大学 宇航学院, 北京 100081; 2. 中国兵器科学研究院, 北京 100089)

**摘 要:** 通过建立相对于终端弹目连线的导弹运动方程, 将 time-to-go 的负  $n$  次幂函数引入到目标函数中, 推导得到不考虑制导动力学的扩展比例导引和扩展的带落角约束的最优制导律。提出了广义最优制导律的概念, 阐述了其在两种不同坐标系下的表现形式和意义。针对终端弹目连线坐标系下的广义最优制导律, 利用幂级数解法对闭环弹道微分方程进行了解析求解, 得到了导弹相对终端弹目连线的位置、速度和加速度指令的解析表达式, 并利用仿真的方法对解析结果进行了验证。

**关键词:** 制导动力学; 最优制导律; 幂级数解法; 解析解; 终端落角约束

**中图分类号:** TJ765.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2015)01-0341-07

## Analytical study of generalized optimal guidance law for lag-free system

Wang Hui<sup>1</sup>, Wu Tao<sup>2</sup>, Du Yunli<sup>2</sup>, Lin Defu<sup>1</sup>

(1. School of Aerospace, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. Ordnance Science Institute of China, Beijing 100089, China)

**Abstract:** Based on the equations of missile motion with respect to the desired terminal line of sight (DTLOS), the extended proportional navigation and extended optimal guidance law with impact angle constraint was deduced for lag-free system when  $-n$  power of time-to-go was introduced into the object function. The concept of the generalized optimal guidance law (GOPL) was proposed and the expressions and meaning of which in two different frames of reference were demonstrated. For the GOPL in the DTLOS frame, the analytical solutions of the closed-form trajectory were derived according to the method of power series and the analytical position, velocity and acceleration command were obtained. Finally, the analytical solutions were validated by the simulation results.

**Key words:** guidance dynamics; optimal guidance law; method of power series; analytical result; terminal impact angle constraint

收稿日期: 2014-05-10; 修订日期: 2014-06-16

基金项目: 国家自然科学基金(61172182)

作者简介: 王辉(1985-), 男, 讲师, 博士后, 主要从事飞行器制导与控制方面的研究。Email: wh20031131@126.com

## 0 引言

在线性最优制导领域,二次型最优控制理论起着主导作用,并衍生出了多种线性最优制导律,其典型代表为比例导引和带角度约束的最优制导律<sup>[1-7]</sup>。比例导引的衍生种类较多,如真比例导引、纯比例导引、增强型比例导引、带角速率约束的偏置比例导引等<sup>[1-2,7-9]</sup>,在制导弹药中均有着不同程度的应用。而随着精确制导技术的发展,很多攻击任务不仅要求精确命中,还对弹道末段的攻击角度提出了附加要求,如反坦克导弹、侵彻炸弹等,由此,带角度约束的最优制导律也吸引了越来越多的关注。

带角度约束的最优制导律的概念提出较早,美国学者 Zarchan 将其称为弹道成型制导律,并被广大学者所熟知<sup>[2]</sup>。在 Zarchan 工作的基础上,以色列学者 Ben-Asher、Yaesh 以及韩国学者 Ryoo 等对制导律的制导特性、剩余飞行时间(time-to-go)估算方法等进行了深入研究<sup>[6,10-11]</sup>。2006 年,韩国人 Ryoo 和美国人 Ohlmeyer 等在研究角度控制问题时,以导弹剩余飞行时间的幂函数为权函数,扩展了带角度约束的最优制导律,极大地带动了此类制导律的研究<sup>[3-4,12-13]</sup>。

文中通过建立相对于终端弹目连线的导弹运动方程,将 time-to-go 的负  $n$  次幂函数引入到目标函数

中,推导得到两类扩展的最优制导律。以此为基础,提出了广义最优制导律的概念,阐述了其在不同坐标系下的表现形式、内涵,重点研究了闭环弹道的解析解,并进行了仿真验证。

## 1 不考虑动力学滞后的最优制导律

### 1.1 制导律推导的数学模型

对地面固定目标,导弹和目标的几何关系如图 1 所示。 $OXY$  表示地面坐标系, $M_0$  表示导弹初始位置,LOS 表示当前弹目视线(Line of Sight), $LOS_0$  表示初始弹目视线, $LOS_f$  表示终端攻击时刻的弹目连线, $(x_t, y_t)$  表示固定目标的位置,图中其他主要符号定义如表 1 所示,所有的角度定义逆时针为正,顺时针为负。

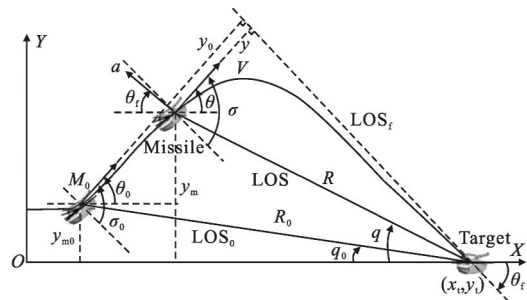


图 1 弹目几何关系

Fig.1 Geometry of missile and target

表 1 主要符号定义

Tab.1 Definition of main symbols

$y_m/m$	$y_{m0}/m$	$R/m$	$R_0/m$	$V/m \cdot s^{-1}$	$a/m \cdot s^{-2}$	$\theta/(^\circ)$	$\theta_0/(^\circ)$	$\theta_f/(^\circ)$	$q/(^\circ)$	$q_0/(^\circ)$
Missile position in earth fixed axis system	Initial value of $y$	Distance between missile and target	Initial value of $R$	Missile velocity	Missile acceleration perpendicular to $V$	Flight path angle	Initial value of $\theta$	Terminal impact angle	Angle of LOS	Initial value of $q$

为便于后续的表达和推导,定义相对于终端弹目连线的纵向位置  $y$  和速度矢量角  $\sigma$ ,初值分别为  $y_0, \sigma_0$ 。由定义可知, $\sigma, \theta, \theta_f$  三个角度的关系为:

$$\sigma = \theta - \theta_f, \sigma_0 = \theta_0 - \theta_f \quad (1)$$

纵向位置  $y_m, y$  与  $\theta_f, q$  的关系为

$$\begin{aligned} y_t - y_m &= R \sin q, y_{m0} = y_t - R_0 \sin q_0 \\ y &= R \sin(\theta_f - q), y_0 = R_0 \sin(\theta_f - q_0) \end{aligned} \quad (2)$$

根据图 1 所示的弹目几何关系,建立如下的运动方程:

$$\dot{y} = V \sin \sigma, y(t_0) = y_0$$

$$V \dot{\sigma} = a, \sigma(t_0) = \sigma_0 \quad (3)$$

为了对公式(2)~(3)进行线性化,假设公式(3)中的  $V$  为常值,  $\sigma$  为小角,公式(2)中的角度也假设为小角,这也是研究线性最优制导律的两个常用假设<sup>[1-2]</sup>。这样,经线性化后,公式(2)~(3)可分别表示为:

$$\begin{aligned} y_m &= y_t - Rq, y_{m0} = y_t - R_0q_0 \\ y &= R(\theta_f - q), y_0 = R_0(\theta_f - q_0) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \quad (5)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}, \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_f = \begin{bmatrix} y_f \\ v_f \end{bmatrix}, v_f = V\sigma_f \quad (6)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u = a \quad (7)$$

式中:  $v = V\sigma$  表示垂直于终端弹目连线的速度分量,  $\sigma_f$  表示终端时刻的  $\sigma$ ; 在不考虑制导动力学时,  $u = a$ ,  $u$  表示控制量;  $t_f$  表示导弹制导时间;  $x_0$  表示状态初值;  $x_f$  表示状态终值。

### 1.2 基于最优控制理论的制导律

将目标函数定义为如下形式:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} R a^2(t) dt, R = t_{go}^{-n}, n \geq 0 \quad (8)$$

式中:  $t_{go} = t_f - t$ , 表示剩余飞行时间。公式(8)为传统目标函数的扩展, 通过引入  $t_{go}$  和  $n$  可实现对传统最优制导律的扩展<sup>[3-4]</sup>。

以公式(8)的目标函数为基础, 在不同的终端约束下可以得到不同的最优制导律。根据公式(6), 将终端约束表示成如下的矩阵形式:

$$Dx(t_f) = E \quad (9)$$

若仅约束  $y_f$  为 0, 则矩阵  $D$ 、 $E$  分别为:

$$D = [1 \ 0], E = [y_f] = [0] \quad (10)$$

若同时约束  $y_f$  和  $\sigma_f$  都为 0, 则  $D$ 、 $E$  分别为:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} y_f \\ V\sigma_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

根据最优控制理论, 上述最优问题的解可表示为<sup>[4]</sup>:

$$a(t) = -R^{-1}B^T F G^{-1} [F^T x(t) - E] \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{F} &= -A^T F, F(t_f) = D^T \\ \dot{G} &= F^T B R^{-1} B^T F, G(t_f) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

若以公式(10)为终端约束, 将矩阵  $A$ 、 $B$  代入公式(12)~(13)中, 则最优制导律的表达式为:

$$a = - \left[ \frac{(n+3)}{t_{go}^2} \frac{(n+3)}{t_{go}} \right] \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \quad (14)$$

若以公式(11)为终端约束, 最优制导律为:

$$a = - \left[ \frac{(n+2)(n+3)}{t_{go}^2} \frac{2(n+2)}{t_{go}} \right] \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \quad (15)$$

公式(14)是传统比例导引的扩展; 公式(15)是传统的带落角约束的最优制导律的扩展, 由于文中定义  $\sigma = \theta - \theta_r$ , 终端角度约束  $\theta_r$  隐式包含于制导律中。当  $n=0$  时, 公式(14)~(15)中的导航系数均退化为传统的形式<sup>[2]</sup>。

## 2 广义最优制导律

在最优制导律中, 广义最优的概念较宽泛, 参考文献[14]将比例导引的非线性扩展, 参考文献[3]将类似于公式(15)的带落角约束的最优制导律均称为广义最优制导律。文中将公式(14)~(15)所示的两种最优制导律的综合形式定义为广义最优制导律。

观察公式(14)~(15)可知, 广义最优制导律可表示成如下的统一形式:

$$a = - \frac{N_1}{t_{go}^2} y - \frac{N_2}{t_{go}} v \quad (16)$$

式中:  $[N_1, N_2]$  的取值为  $[n+3, n+3]$  或  $[(n+2)(n+3), 2(n+2)]$ 。当公式(16)的导航系数取为前者时, 制导律只约束  $y_f$  为 0, 当导航系数取为后者时, 制导律同时约束  $y_f$  和  $\sigma_f$  为 0, 即导航系数的不同取值也决定了制导律是仅含有位置约束还是同时含有终端角度约束。

由于公式(16)是建立在  $LOS_f$  坐标系下的, 难以直接看出其终端约束情况, 将其转换到地面坐标系下则很容易看出意义所在。

在地面坐标系下, 线性化的系统状态方程可表述如下:

$$\begin{aligned} y_i - y_m &= Rq, y_i - y_{m0} = R_0 q_0 \\ \dot{y}_m &= V\theta, \dot{y}_{m0} = V\theta_0, \dot{y}_{mf} = V\theta_f \\ \ddot{y}_m &= a_m = V\dot{\theta} \end{aligned} \quad (17)$$

由于  $\dot{\sigma} = \dot{\theta}$ , 因此  $a_m = a$ 。将  $y = R(\theta_i - q)$ ,  $v = V(\theta - \theta_i)$  以及  $R = Vt_{go}$  代入公式(16)中, 再联合公式(17), 得到:

$$a_m = \frac{N_1}{t_{go}^2} (y_i - y_m) - \frac{N_2}{t_{go}} \dot{y}_m + \frac{N_2 - N_1}{t_{go}} \dot{y}_{mf} \quad (18)$$

由于  $\ddot{y}_m = a_m$ , 将公式(18)表示成标准的微分方程形式, 有

$$\frac{d^2 y_m}{dt^2} + \frac{N_2}{t_{go}} \frac{dy_m}{dt} + \frac{N_1}{t_{go}^2} y_m = \frac{N_1}{t_{go}^2} y_i + \frac{N_2 - N_1}{t_{go}} \dot{y}_{mf} \quad (19)$$

由公式(18)~(19)可以直接看出, 广义最优制导律是否含有终端角度约束取决于  $N_1, N_2$  的取值, 当  $N_1 = N_2$  时(如扩展的比例导引), 则制导律自然地不包含终端角度约束。

为便于后续的研究, 对公式(16)进行进一步处理。将  $a = \ddot{y}$ 、 $v = \dot{y}$  代入公式(16)中, 得到

$$\ddot{y} + \frac{N_2}{t_{go}} \dot{y} + \frac{N_1}{t_{go}^2} y = 0 \quad (20)$$

由于  $\ddot{y}$ 、 $\dot{y}$  均是对  $t$  的导数, 则公式(20)又可表示为:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{N_2}{t_{go}} \frac{dy}{dt} + \frac{N_1}{t_{go}^2} y(t) = 0 \quad (21)$$

令  $\zeta = \ln(t_r - t) = \ln(t_{go})$ , 则有

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{-1}{(t_r - t)} = \frac{-1}{t_{go}}, \quad \frac{dt}{d\zeta} = -e^\zeta \quad (22)$$

$$\frac{dy}{d\zeta} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\zeta} = \dot{y}(-e^\zeta) \Rightarrow \dot{y} = \frac{-1}{e^\zeta} \frac{dy}{d\zeta} \quad (23)$$

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d\dot{y}}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{1}{e^\zeta} \frac{1}{t_{go}} \left( \frac{d^2y}{d\zeta^2} - \frac{dy}{d\zeta} \right) \quad (24)$$

将公式(22)~(24)代入公式(21)中, 得到

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} - (N_2 + 1) \frac{dy}{d\zeta} + N_1 y = 0 \quad (25)$$

再令  $y = e^{\lambda\zeta}$ , 则  $\frac{dy}{d\zeta} = \lambda e^{\lambda\zeta}$ ,  $\frac{d^2y}{d\zeta^2} = \lambda^2 e^{\lambda\zeta}$ , 带入公式(25)中得到

$$\lambda^2 - (N_2 + 1)\lambda + N_1 = 0 \quad (26)$$

若令公式(26)的两根分别为  $\lambda_1, \lambda_2$ , 则  $N_1 = \lambda_1 \lambda_2$ ,  $N_2 = \lambda_1 + \lambda_2 - 1$ , 此时, 公式(16)又可表示为:

$$a = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{t_{go}^2} y - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 1}{t_{go}} \dot{y} \quad (27)$$

或

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 1}{t_{go}} \frac{dy}{dt} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{t_{go}^2} y = 0 \quad (28)$$

不妨设  $\lambda_1 > \lambda_2$ , 则在  $[N_1, N_2] = [n+3, n+3]$  时,  $\lambda_1 = n+3, \lambda_2 = 1$ ; 在  $[N_1, N_2] = [(n+2)(n+3), 2(n+2)]$  时,  $\lambda_1 = n+3, \lambda_2 = n+2$ , 由此可见,  $\lambda_1, \lambda_2$  均为大于 0 的不等实根。

### 3 广义最优制导律闭环弹道的幂级数法求解

对比公式(19)和(28)可知, 相比于地面坐标系下的非齐次微分方程, LOS<sub>t</sub> 坐标系下的齐次微分方程更容易求解。由于公式(28)是线性时变的, 采用幂级数法求解较为方便。

将  $\ddot{y}, \dot{y}$  由对  $t$  的微分转成相对于  $t_{go}$  的微分, 得到

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dy}{dt_{go}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt_{go}^2}, \quad \text{则公式(28)可重写为:}$$

$$\frac{d^2y}{dt_{go}^2} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)}{t_{go}} \frac{dy}{dt_{go}} + \frac{(\lambda_1 \lambda_2)}{t_{go}^2} y(t_{go}) = 0 \quad (29)$$

根据线性时变微分方程的幂级数解法, 令

$$y(t_{go}) = t_{go}^s \sum_{k=0}^{\infty} b_k t_{go}^k = t_{go}^s (b_0 + b_1 t_{go} + b_2 t_{go}^2 + \dots) \quad (30)$$

式中:  $s$  为待确定的值;  $b_0 \neq 0$ 。

以  $t_{go}$  为自变量, 对  $y(t_{go})$  分别求一阶导数和二阶导数, 得到

$$\frac{dy}{dt_{go}} = \sum_{k=0}^{\infty} (s+k) b_k t_{go}^{s+k-1}$$

$$\frac{d^2y}{dt_{go}^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (s+k)(s+k-1) b_k t_{go}^{s+k-2} \quad (31)$$

将公式(30)~(31)代入公式(29), 得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} (s+k)(s+k-1) \\ -(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)(s+k) + \lambda_1 \lambda_2 \end{array} \right\} b_k t_{go}^{s+k} = 0 \quad (32)$$

为了使公式(32)对任意的  $s$  都成立, 则各幂级数的系数均应为 0。在  $k=0$  时,  $t_{go}^s$  的系数为:

$$\{s(s-1) - (\lambda_1 + \lambda_2 - 1)s + \lambda_1 \lambda_2\} b_0 = 0$$

由于  $b_0 \neq 0$ , 故其对应的系数为 0, 即

$$s(s-1) - (\lambda_1 + \lambda_2 - 1)s + \lambda_1 \lambda_2 = 0 \quad (33)$$

求解得到

$$s = s_1 = \lambda_1, \quad s = s_2 = \lambda_2 \quad (34)$$

下面分别根据  $s = s_1 = \lambda_1, s = s_2 = \lambda_2$  进行求解。分别将  $s = s_1 = \lambda_1, s = s_2 = \lambda_2$  代入公式(32), 得到

$$s = s_1 = \lambda_1: \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} (s_1+k)(s_1+k-1) + \lambda_1 \lambda_2 \\ -(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)(s_1+k) \end{array} \right\} b_k t_{go}^{s_1+k} = 0$$

$$s = s_2 = \lambda_2: \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} (s_2+k)(s_2+k-1) + \lambda_1 \lambda_2 \\ -(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)(s_2+k) \end{array} \right\} b_k t_{go}^{s_2+k} = 0$$

化简后得到

$$s = s_1 = \lambda_1: \sum_{k=0}^{\infty} \{(\lambda_1 - \lambda_2)k + k^2\} b_k t_{go}^{\lambda_1+k} = 0$$

$$s = s_2 = \lambda_2: \sum_{k=0}^{\infty} \{(\lambda_2 - \lambda_1)k + k^2\} b_k t_{go}^{\lambda_2+k} = 0 \quad (35)$$

求解在  $s = s_1 = \lambda_1$  时的  $b_k$  值。令公式(35)中  $t_{go}^{\lambda_1+k}$  的系数为 0, 即

$$[(\lambda_1 - \lambda_2)k + k^2] b_k = 0 \quad (36)$$

已经假设  $b_0 \neq 0$ , 则在  $k=0$  时上式成立; 在  $k \geq 0$  时,  $b_k$  均为 0, 因此,  $b_k$  的值为:

$$b_k = \begin{cases} b_0, & k=0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases} \quad (37)$$

将公式(37)代入公式(30)中, 得到  $s = s_1 = \lambda_1$  时的第一个解, 即

$$y_1(t_{go}) = b_0 t_{go}^{\lambda_1} \quad (38)$$

同理可得  $s = s_2 = \lambda_2$  时的  $b_k$ , 所得  $b_k$  表达式与公

式(37)一致。这样,第二个解  $y_2(t_{go})$ 可表示为:

$$y_2(t_{go})=b_0 t_{go}^{\lambda_2} \quad (39)$$

综合公式(38)~(39)可得公式(29)的通解,即

$$y(t_{go})=c_{11} b_0 t_{go}^{\lambda_1} + c_{12} b_0 t_{go}^{\lambda_2} \quad (40)$$

式中; $c_{11}, c_{12}$  为由初始制导条件确定的常值。为简化表达,令  $C_{11}=c_{11} b_0, C_{12}=c_{12} b_0$ ,则公式(40)可简化为:

$$y(t_{go})=C_{11} t_{go}^{\lambda_1} + C_{12} t_{go}^{\lambda_2} \quad (41)$$

由于  $y(t)=y(t_{go})$ ,则以  $t$  为自变量,对公式(41)分别求两次导数,得到

$$\begin{cases} y(t)=C_{11} t_{go}^{\lambda_1} + C_{12} t_{go}^{\lambda_2} \\ \dot{y}(t)=-C_{11} \lambda_1 t_{go}^{\lambda_1-1} - C_{12} \lambda_2 t_{go}^{\lambda_2-1} \\ \ddot{y}(t)=C_{11} \lambda_1(\lambda_1-1) t_{go}^{\lambda_1-2} + C_{12} \lambda_2(\lambda_2-1) t_{go}^{\lambda_2-2} \end{cases} \quad (42)$$

表示成矩阵的形式为:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{go}^{\lambda_1} & t_{go}^{\lambda_2} \\ -\lambda_1 t_{go}^{\lambda_1-1} & -\lambda_2 t_{go}^{\lambda_2-1} \\ \lambda_1(\lambda_1-1) t_{go}^{\lambda_1-2} & \lambda_2(\lambda_2-1) t_{go}^{\lambda_2-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix}$$

根据初值条件  $y_0, v_0$ ,得到

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_f^{\lambda_1} & t_f^{\lambda_2} \\ -\lambda_1 t_f^{\lambda_1-1} & -\lambda_2 t_f^{\lambda_2-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix} \quad (43)$$

求解得到

$$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\lambda_2}{t_f^{\lambda_1}(\lambda_1-\lambda_2)} & \frac{-t_f}{t_f^{\lambda_1}(\lambda_1-\lambda_2)} \\ \frac{\lambda_1}{t_f^{\lambda_2}(\lambda_1-\lambda_2)} & \frac{t_f}{t_f^{\lambda_2}(\lambda_1-\lambda_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

即

$$C_{11} = \frac{-\lambda_2 y_0 + v_0 t_f}{t_f^{\lambda_1}(\lambda_1-\lambda_2)}, C_{12} = \frac{\lambda_1 y_0 + v_0 t_f}{t_f^{\lambda_2}(\lambda_1-\lambda_2)} \quad (45)$$

将公式(45)代入公式(42)中,定义无量纲时间  $\tau=1-t/t_f$ ,得到

$$y(t) = \frac{\tau^{\lambda_2}}{(\lambda_1-\lambda_2)} \{ (\lambda_1-\lambda_2 \tau^{\lambda_1-\lambda_2}) y_0 + (1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}) t_f v_0 \} \quad (46)$$

$$v(t) = \frac{\tau^{\lambda_2-1}}{t_f(\lambda_1-\lambda_2)} \{ \lambda_1 \lambda_2 (\tau^{\lambda_1-\lambda_2} - 1) y_0 + (\lambda_1 \tau^{\lambda_1-\lambda_2} - \lambda_2) t_f v_0 \} \quad (47)$$

$$a(t) = \frac{\tau^{\lambda_2-2}}{t_f(\lambda_1-\lambda_2)} \times \{ \lambda_1 \lambda_2 [(\lambda_2-1) - (\lambda_1-1) \tau^{\lambda_1-\lambda_2}] y_0 + [\lambda_2(\lambda_2-1) - \lambda_1(\lambda_1-1) \tau^{\lambda_1-\lambda_2}] t_f v_0 \} \quad (48)$$

公式(46)~(48)即为以特征根  $\lambda_1, \lambda_2$  表示的广义最优制导律的闭环弹道解析解。对扩展的比例导引,  $\lambda_1=n+3, \lambda_2=1$ ,则公式(46)~(48)又可具体表示为:

$$y(t) = \frac{\tau}{n+2} \{ (n+3-\tau^{n+2}) y_0 + (1-\tau^{n+2}) t_f v_0 \} \quad (49)$$

$$v(t) = \frac{1}{n+2} \{ (n+3)(\tau^{n+2}-1) y_0 / t_f + [(n+3)\tau^{n+2}-1] v_0 \} \quad (50)$$

$$a(t) = -(n+3) \tau^{n+1} (y_0 / t_f^2 + v_0 / t_f) \quad (51)$$

对扩展的带落角约束的最优制导律,  $\lambda_1=n+3, \lambda_2=n+2$ ,则公式(46)~(48)又可具体表示为:

$$y(t) = \tau^{n+2} \{ [(n+3)-(n+2)\tau] y_0 + (1-\tau) t_f v_0 \} \quad (52)$$

$$v(t) = \frac{\tau^{n+1}}{t_f} \{ (n+2)(n+3)(\tau-1) y_0 + [(n+3)\tau-(n+2)] t_f v_0 \} \quad (53)$$

$$a(t) = \frac{\tau^n}{t_f} \{ (n+2)(n+3)[(n+1)-(n+2)] y_0 + (n+2)[(n+1)-(n+3)\tau] t_f v_0 \} \quad (54)$$

将  $y_0=R_0(\theta_f-q_0), v_0=V(\theta_0-\theta_f)$  以及  $R_0=V t_f$  带入公式(51)和(54)中,分别得到

$$a(t) = -(n+3)V(\theta_0-\theta_f) \tau^{n+1}/t_f \quad (55)$$

$$a(t) = \frac{\tau^n}{t_f} \{ V t_f \theta(n+1)(n+2)[(n+2)-(n+3)] \tau + V t_f(\theta_0-q_0)(n+2)[(n+1)-(n+3)\tau] + R_0 q_0(n+1)(n+2)[- (n+2) + (n+3)\tau] \} \quad (56)$$

公式(55)~(56)的结论与参考文献[1,12]中的结论在本质上是一致的。

### 4 解析结果的仿真实验

不考虑制导动力学,选取不同的  $\lambda_1, \lambda_2$ ,采用仿真的方法对上述广义最优制导律的解析解进行验证。根据公式(27)所示的制导律,构造如图 2 所示的制导系统模型,其中,  $y_0=200 \text{ m}, v_0=50 \text{ m/s}, t_f=10 \text{ s}$ 。

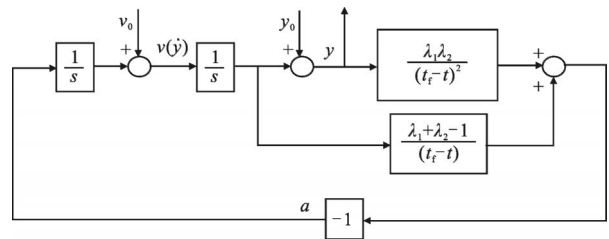


图 2 制导系统结构框图

Fig.2 Block diagram of guidance system

在仿真中选 6 组不同的特征根,3 组为扩展比

例导引的特征根,  $[\lambda_1, \lambda_2]$  分别为  $[3, 1], [4, 1], [5, 1]$ ; 3 组为扩展的带落角约束的最优制导律的特征根,  $[\lambda_1, \lambda_2]$  分别为  $[3, 2], [4, 3], [5, 4]$ 。

图 3~5 分别给出了 6 组不同  $\lambda_1, \lambda_2$  时的  $y(t), v(t), a(t)$  解析结果和仿真结果对比曲线, 其中, 实线表示解析结果, 离散的圆点表示仿真结果。

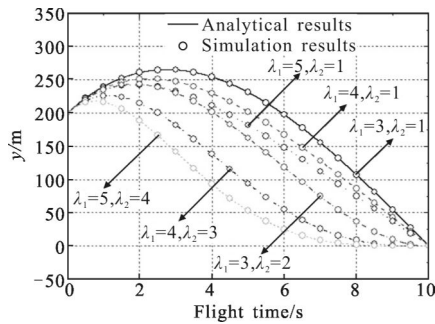


图 3  $y(t)$  的仿真结果和解析结果对比

Fig.3 Comparison of simulation and analytical results for  $y(t)$

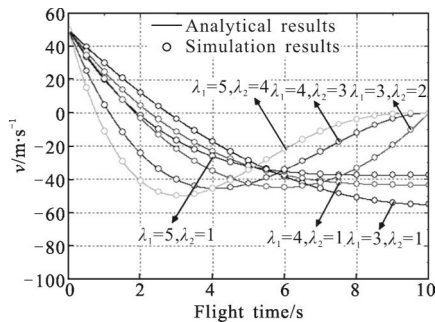


图 4  $v(t)$  的仿真结果和解析结果对比

Fig.4 Comparison of simulation and analytical results for  $v(t)$

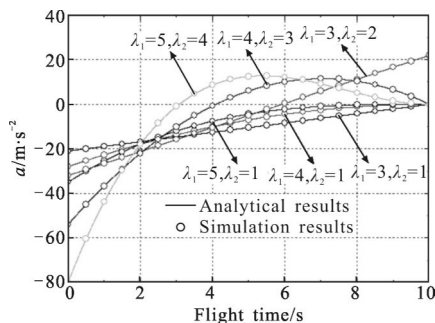


图 5  $a(t)$  的仿真结果和解析结果对比

Fig.5 Comparison of simulation and analytical results for  $a(t)$

由图 3~5 可以看出, 仿真结果与解析结果完全一致, 验证了文中解析结果的正确性。由图 4 还可以看出, 当  $[\lambda_1, \lambda_2]$  取为  $[3, 2], [4, 3]$  或  $[5, 4]$  时, 末段时刻的  $v(t)$  均为 0, 由于  $v=V(\theta-\theta_f)$ , 因此, 末段时刻的  $\theta(t_f)=\theta_f$ , 即实际落角与期望落角一致。

传统及扩展形式的比例导引、带落角约束的最优制导律在型号论证、工程实践中已有广泛的应用, 其制导性能也已被广大制导系统工程师所熟知。文中所提出的广义最优制导律是二者的综合形式, 其对应的解析结论公式(49)~(54)可以通过变量代换方便地转成常规形式。因此, 上述广义最优制导律及其解析结论是工程可用的, 其适用范围与传统及扩展的比例导引、带落角约束的最优制导律完全一致。

## 5 结论

在不考虑制导动力学的情况下建立了相对于终端弹目连线的导弹运动方程, 将 time-to-go 的负  $n$  次幂函数引入到目标函数中, 利用最优控制理论, 推导得到了扩展的比例导引和扩展的带落角约束的最优制导律。以上述两类制导律为基础, 提出了广义最优制导律的概念, 并对其在终端弹目连线坐标系和地面坐标系下的表现形式及意义进行了详细阐述。

针对终端弹目连线坐标系下的广义最优制导律, 利用线性时变微分方程的幂级数解法对闭环弹道微分方程进行了解析求解, 得到了导弹相对终端弹目连线的纵向位置、速度和加速度指令的解析表达式。仿真验证表明, 仿真结果与解析结果完全一致, 验证了解析解的正确性。

## 参考文献:

- [1] Garnell P. Guided Weapon Control Systems [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1985: 248-299.
- [2] Zarchan P. Tactical and Strategic Missile Guidance [M]. 6th ed. Virginia: AIAA Inc, 2012: 31-50, 541-569.
- [3] Ohlmeyer E J, Phillips C A. Generalized vector explicit guidance [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2006, 29(2): 261-268.
- [4] Ryoo C K, Cho H, Tahk M J. Time-to-go weighted optimal guidance with impact angle constraints[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(3): 483-492.
- [5] Lee Y I, Kim S H, Tahk M J. Optimality of linear time-varying guidance for impact angle control [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2012, 48(3): 2802-2817.
- [6] Ryoo C K, Cho H, Tahk M J. Optimal guidance laws with terminal impact angle constraint [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2005, 28(4): 724-732.

- [7] Kim B S, Lee J G, Han H S. Biased PNC law for impact with angular constraint[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1998, 34(1): 277-288.
- [8] Wang Hui, Lin Defu, Qi Zaikang, et al. Study of time-varying optimal augmented proportional navigation and miss distance closed-form solutions [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(3): 92-698. (in chinese)  
王辉, 林德福, 祁载康, 等. 时变最优的增强型比例导引及其脱靶量解析研究 [J]. *红外与激光工程*, 2013, 42(3): 692-698.
- [9] Xu Ping, Wang Wei, Lin Defu, et al. Fluence of zero position error of angular rate on the precision of proportional navigation[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2011, 40(11): 2255-2260. (in Chinese)  
徐平, 王伟, 林德福, 等. 角速度零位误差对比例导引制导精度的影响[J]. *红外与激光工程*, 2011, 40(11): 2255-2260.
- [10] Ben-Asher J Z, Yaesh I. *Advances in Missile Guidance Theory*[M]. Virginia: AIAA Inc, 1998.
- [11] Ryoo C K, Cho H, Tahk M J. Closed-form solutions of optimal guidance with terminal impact angle constraint [C]// *IEEE Int Conf Control Application*, 2003: 504-509.
- [12] Wang Hui, Lin Defu, Cheng Zhenxuan. Time-to-go weighted optimal trajectory shaping guidance law [J]. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 2011, 20(3): 317-323.
- [13] Wang Hui, Lv Yingjie, Lin Defu, et al. Miss distance analysis of the extended trajectory shaping guided systems [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(5): 1322-1329. (in chinese)  
王辉, 吕瑛洁, 林德福, 等. 扩展弹道成型制导系统脱靶量特性分析[J]. *红外与激光工程*, 2013, 42(5): 1322-1329.
- [14] Yang C D, Hsiao F B, Yeh F B. Generalized guidance law for homing missiles [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1989, AES-25(2): 197-212.