

湍流大气中部分相干光二阶统计特性的三参数模型及其应用

王利国¹, 吴振森¹, 王明军², 王万君¹, 张耿¹

(1. 西安电子科技大学理学院, 陕西 西安 710071;
2. 咸阳师范学院物理与电子工程学院, 陕西 咸阳 712000)

摘要: 激光在强湍流中的传输以及斜程传输问题是随机介质波传播研究中的热点,也是难点。文中尝试建立一个可以在任意湍流环境下通用的激光传输二阶矩演化模型。首先利用广义惠更斯-菲涅尔原理及球面波结构函数的二次近似推导了高斯-谢尔波束在大气湍流中传输时的互相干函数表达式。建立了波束互相干函数的三参数模型,得到了三参数的递进公式。利用三参数迭代法计算了部分相干波束在强湍流中及斜程传输时的等效波束半径及相干长度。计算结果证明了在强湍流中,相比于直接利用广义惠更斯-菲涅尔原理的计算结果,迭代法得到的等效半径较小,而相干长度较大。在斜程路径上,上行与下行传输激光的统计特性是不同的。

关键词: 大气光学; 广义惠更斯-菲涅尔原理; 二阶矩; 强湍流; 斜程传输

中图分类号: P427.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2015)01-0317-04

Model with three parameters for the second-order moment of a partially coherent beam in atmospheric turbulence and its application

Wang Ligu¹, Wu Zhensen¹, Wang Mingjun², Wang Wanjun¹, Zhang Geng¹

(1. Science School, Xidian University, Xi'an 710071, China;
2. Institute of E.M. Wave Propagation & Scattering, Xianyang Normal College, Xianyang 712000, China)

Abstract: The problems of laser beam propagation in strong turbulence and the propagation along a slant path are hot and hard points in the subject of light propagation in random media. A model of the second-order moment of laser beam in any turbulence condition was elected. First the expression of the mutual coherent function was derived by using the extended Huygens-Fresnel principle. The model with three parameters for the second-order moment was created and the recursion formulas for the parameters were derived. The iteration formula of the parameters were used to calculated the effective beam radius and the length of coherence in the strong turbulence and in turbulence along a slant path. Compared with the results obtained by directly using the extended Huygens-Fresnel principle in strong turbulence, the effective beam radius obtained by the iteration formula is smaller and the corresponding coherence length is larger. The iteration method also shows that the characteristics of the uplink and downlink laser beam along a slant path are different.

收稿日期:2014-05-08; 修订日期:2014-06-10

基金项目:国家自然科学基金(61172031,61271110);中央高校基本科研业务费专项资金(K5051207001)

作者简介:王利国(1983-),男,博士生,主要从事光波在大气湍流中的传输特性的研究。Email:kinglywang3773@163.com

导师简介:吴振森(1946-),男,教授,主要研究方向为目标与环境电磁及光学特性、随机介质与复杂结构的电磁传播与散射等。

Email:wuzhs@mail.xidian.edu.cn

Key words: atmospheric optics; extended Huygens-Fresnel principle; second-order moment; strong turbulence; slant path

0 引言

激光通过大气湍流时受折射率随机起伏的影响会发生波束展宽、漂移、闪烁等现象,这些现象会对激光通信、激光雷达等应用造成负面影响,而使用部分相干光会减弱湍流对光束的影响,所以近 10 年来部分相干光在大气湍流中的传输一直是该领域的理论热点之一。

部分相干光在湍流大气中传输的研究工作是从 20 世纪 70 年代后期开始发展,Leader 首先提出了激光束空间部分相干性的概念,并利用广义的惠更斯-菲涅尔原理研究了部分相干光在湍流中的二阶及四阶特性^[1-3]。之后多种相关理论及数值方法相继出现,如光束有效参数法^[4-5]、交叉谱密度函数法^[6-7]等,但这些方法大多数是在 Rytov 理论的基础上发展起来的,在面对强起伏湍流时,或者不适用,或者缺乏坚实的理论支持。分步傅里叶算法虽然可以用于任意湍流环境中^[8],但是要得到光斑的统计量需要模拟大量的样本,很耗费时间,且由于相位屏尺寸的限制,分步算法无法模拟太大的光斑。

文中建立了部分相干光二阶矩的三参数模型,利用广义惠更斯-菲涅尔原理推导出了三个参数的递推公式,迭代利用此递推公式计算了部分相干光在强湍流及斜程湍流中传输时的二阶统计特性。

1 互相干函数模型

部分相干光通常是由完全相干光通过一定粗糙度的相位屏得到,设高斯波束在相位屏前表面上的场为:

$$U_0(\mathbf{r},0)=\exp(-\alpha k r^2/2) \quad (1)$$

式中: $\alpha=2/(kW_0^2)+i/F_0$, W_0 和 F_0 分别为发射激光的波束半径和聚焦长度。

透过相位屏后的场为:

$$U_D(\mathbf{r},0)=U_0(\mathbf{r},0)\exp[i\varphi(\mathbf{r})] \quad (2)$$

其中 $\varphi(\mathbf{r})$ 为屏引起的相位扰动,假设 $\varphi(\mathbf{r})$ 是高斯随机分布且其相关函数也是高斯型函数,即

$$\Gamma_\varphi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\langle\varphi(\mathbf{r}_1)\varphi(\mathbf{r}_2)\rangle=\sigma_\varphi^2\exp(-r_{12}^2/l_\varphi^2) \quad (3)$$

其中 $r_{12}=|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$, σ_φ^2 和 l_φ 分别是屏上相位起伏

方差和相关长度。

部分相干光的互相关函数为:

$$\begin{aligned} \Gamma_D(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) &= \langle U_D(\mathbf{r}_1)U_D(\mathbf{r}_2) \rangle = \\ & \Gamma_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \langle \exp[i\varphi(\mathbf{r}_1)+i\varphi(\mathbf{r}_2)] \rangle = \\ & \Gamma_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \langle \exp\{-\sigma_\varphi^2[1-\exp(-r_{12}^2/l_\varphi^2)]\} \rangle \cong \\ & \Gamma_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \exp(-r_{12}^2/l_0^2) \end{aligned}$$

其中 $l_0=l_\varphi/\sigma_\varphi$ 是初始光束空间相干长度。公式(4)中的近似要求 $\sigma_\varphi^2>1$,这个条件在大多数情况下都可以满足

$$\Gamma_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=U_0(\mathbf{r}_1,0)U_0^*(\mathbf{r}_2,0)=\exp[-k(\alpha r_1^2+\alpha^* r_2^2)/2] \quad (5)$$

利用广义惠更斯-菲涅尔原理,部分相干光在大气湍流中传播距离 L 后互相干函数可以表示为:

$$\begin{aligned} \Gamma(L,\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2) &= \langle U(L,\boldsymbol{\rho}_1)U(L,\boldsymbol{\rho}_2) \rangle = \\ & [k/(2\pi iL)^2] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \Gamma_D(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \times \\ & \exp[\Psi_2] \exp[-D(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2;\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)/2] \quad (6) \end{aligned}$$

其中 Ψ_2 是真空中传输所引起的相位因子,

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= ik(|\boldsymbol{\rho}_1-\mathbf{r}_1|^2-|\boldsymbol{\rho}_2-\mathbf{r}_2|^2)/(2L)= \\ & ik(r_1^2-r_2^2-2\boldsymbol{\rho}_1\cdot\mathbf{r}_1+2\boldsymbol{\rho}_2\cdot\mathbf{r}_2+\rho_1^2-\rho_2^2)/(2L) \quad (7) \end{aligned}$$

$D(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2;\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ 是由湍流所引起的双点球面波结构函数,

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2;\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) &= 2.91Lk^2 \times \\ & \int_0^1 C_n^2(t) |\boldsymbol{\rho}_{12t}+\mathbf{r}_{12}(1-t)|^{5/3} dt \quad (8) \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_{12}=\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2$, $\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$, 利用结构函数二次近似,公式(8)可以化为:

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2;\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) &= 2.91C_n^2Lk^2 \int_0^1 |\boldsymbol{\rho}_{12t}+\mathbf{r}_{12}(1-t)|^2 dt \cong \\ & \rho_0^{-2} [2(r_{12}^2+\rho_{12}^2)-2\mathbf{r}_{12}\cdot\boldsymbol{\rho}_{12}] \quad (9) \end{aligned}$$

其中 ρ_0 为球面波相干长度

$$\rho_0=(0.5456C_n^2Lk^2)^{-3/5} \quad (10)$$

把公式(4)、(7)、(9)代入到公式得:

$$\begin{aligned} D(L,\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2) &= \left(\frac{k}{2\pi iL}\right)^2 \times \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \exp[-k(\alpha r_1^2+ \\ & \alpha^* r_2^2)/2] \times \exp[-(r_1^2+r_2^2-2\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)/l_0^2] \times \\ & \exp[ik(r_1^2-r_2^2-2\boldsymbol{\rho}_1\cdot\mathbf{r}_1+2\boldsymbol{\rho}_2\cdot\mathbf{r}_2+\rho_1^2-\rho_2^2)/ \end{aligned}$$

$$(2L)]\exp\{-\rho_0^{-2}[r_1^2+r_2^2-2\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2]+2\rho_{12}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)+\rho_{12}^2\} \quad (11)$$

利用参考文献[1],上式最终结果为:

$$\Gamma(L,\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)=D_1^{-1}\exp[-W_e^{-2}(\rho_1^2+\rho_2^2)-l_e^2\rho_{12}^2+ikF_e(\rho_1^2-\rho_2^2)/2] \quad (12)$$

其中 $\rho_{12}=|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2|$ 。 D_1 、 W_e 、 F_e 和 l_e 分别是激光通过湍流后的平均在轴强度、波束等效半径、聚焦半径和相干长度。

$$D_1=Z^2(\rho_0^{-2}+l_0^{-2})+|1+i\alpha L|^2 \quad (13)$$

$$W_e=W_0[Z^2((\rho_0^{-2}+l_0^{-2})+|1+i\alpha L|^2)^2] \quad (14)$$

$$F_e=L[Z^2((\rho_0^{-2}+l_0^{-2})+|1+i\alpha L|^2)\times [L/F_0-|\alpha|^2L^2-Z^2(\rho_0^{-2}/2+l_0^{-2})]^{-1}] \quad (15)$$

$$l_e=Z[Z^2(\rho_0^{-2}+l_0^{-2})+|1+i\alpha L|^2]\times [\rho_0^{-2}Z^2(1-2L/F_0+|\alpha|^2L^2)-\rho_0^{-2}Z^2(L/F_0+3Z^2\rho_0^{-2}/4)+l_0^{-2}Z^2(1+\rho_0^{-2})]^{-1/2} \quad (16)$$

$$Z^2=2[2L/(kF_0)]^2 \quad (17)$$

2 迭代解法在强湍流中的应用

由第 1 节可知,高斯-谢尔波束在湍流大气中任意位置的互相二函数都可以由三个参数 W_i 、 F_i 和 l_i 来描述,而接收面上的三参数可以由发射面上的三参数计算得到,大气湍流的影响由球面波相干长度 ρ_0 来描述。球面波相干长度公式(10)是基于 Rytov 理论得到的。现有的文献一般认为 Rytov 理论计算相位起伏时是适用于强起伏区的,所以公式(10)在强起伏区成立,但是这一论断缺乏理论支持。

为了确保计算结果的准确性,文中参考分步傅里叶算法,当路径很长或者湍流很强时,把路径均匀划分为 N 段,使每一段子路径都满足弱起伏条件。已知第 i 个结点处的三参数 W_i 、 F_i 和 l_i ,利用公式(12),

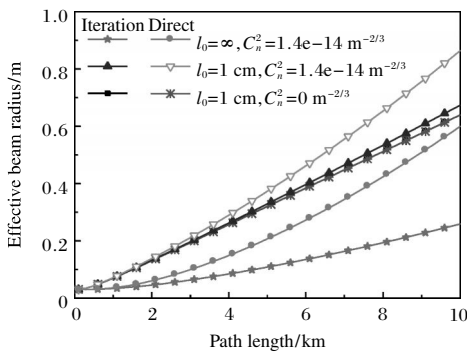


图 1 激光在大气湍流中沿水平路径传播时的等效半径
Fig.1 Effective beam radius of a beam in turbulence propagating along horizontal path

可以计算第 $i+1$ 处的三参数 W_{i+1} 、 F_{i+1} 和 l_{i+1} ,重复这个过程,即可由初始参数 W_0 、 F_0 和 l_0 得到终点处 $z=L$ 上的三参数 W_N 、 F_N 和 l_N 。

图 1 显示了在大气湍流中激光等效半径随着水平传输距离的变化曲线。没有在图中标明的参数如下:准直高斯波束波长 $1.38 \mu\text{m}$,初始半径 3 cm ,后面的图中这些参数相同。在图 1 所示环境中 $C_n^2=1.7\times 10^{14} \text{ m}^{-2/3}$, $L=10 \text{ km}$, $\sigma_I^2=2.64*1$,所以图 1 中大部分路径都处在强起伏条件下。图中给出了两种方法的计算结果,一种是在整个路径上直接利用公式(12),另一种是把整个路径划分为 100 段子路径然后迭代使用公式(12)。在没有湍流的情况下,两条曲线是完全重合的,这也证明了迭代法的正确性。在湍流中,迭代法得到的等效半径小于直接解得到的结果,且相干长度越大,两种方法计算结果差别也越大。

图 2 是大气湍流中激光相干长度随着水平传输距离的变化曲线。和图 1 结果类似,迭代解和直接解在真空中是重合的,在湍流中迭代解得到的相干长度大于直接解。还可以看出,随着传输路径的增大,初始相干长度对接收面上相干长度的影响越来越小,不同初始相干长度的光束的相干长度趋向于相同。

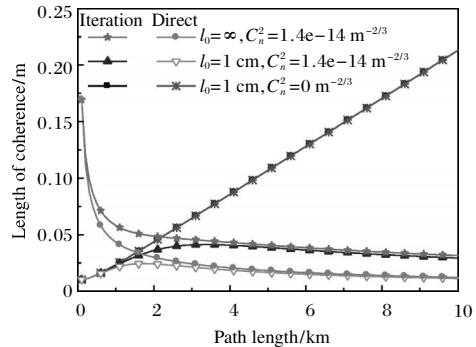


图 2 激光在大气湍流中沿水平路径传播时的相干长度
Fig.2 Length of coherence of a beam in turbulence propagating along horizontal path

3 迭代解在斜程传输中的应用

在斜程传输中湍流沿路径分布不是均匀的,公式(9)变形为^[9]:

$$D(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2;\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=2.91Lk^2 \int_0^1 C_n^2(t) |\boldsymbol{\rho}_{12}t+\mathbf{r}_{12}(1-t)|^2 dt = 2.91Lk^2 \int_0^1 dt C_n^2(t) \times [t^2\rho_{12}^2+(1-t)^2r_{12}^2+2t(1-t)\boldsymbol{\rho}_{12}\cdot\mathbf{r}_{12}] \quad (18)$$

其中 $C_n^2(t)$ 是湍流强度沿高度的分布函数,

$$C_n^2(t) = 8.148 \times 10^{-56} v_{RMS}^2 (Ht)^{10} e^{-Ht/1000} + 2.7 \times 10^{-16} e^{-Ht/1500} + C_0 e^{-Ht/100} \quad (19)$$

式中: H 是接收点距离地面的垂直高度。

公式(18)不能化简为公式(9)的形式, 不均匀湍流对激光传输造成的影响无法用单一参数 ρ_0 来描述, 所以之后的结果也无法利用。为了解决这个问题, 仍然把路径划分为 N 段, 每段子路径上的湍流近似看作是均匀的。在第 i 段子路径上的球面波相干长度为:

$$\rho_{0i} = [1.46k^2 \int_{z_i}^{z_{i+1}} dz C_n^2 \{ [z_i + \xi(z_{i+1} - z_i)] \times \cos(\theta) \} (1 - \xi)^{5/3}]^{-3/5} \quad (20)$$

式中: θ 是路径与地面法线之间的夹角, 满足 $\cos \theta = H/L$ 。

图 3 和图 4 分别显示了激光在湍流大气中沿斜程传输时其等效半径和相干长度随着路径长度的变化曲线。上行路径中, 湍流对波束等效半径有较大影响, 传输路径天顶角越大, 激光的展宽效应也越明显。

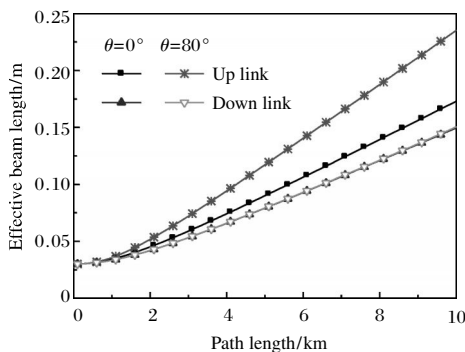


图 3 激光在大气湍流中沿斜程路径传播时的等效半径

Fig.3 Effective beam radius of a beam in turbulence propagating along slant path

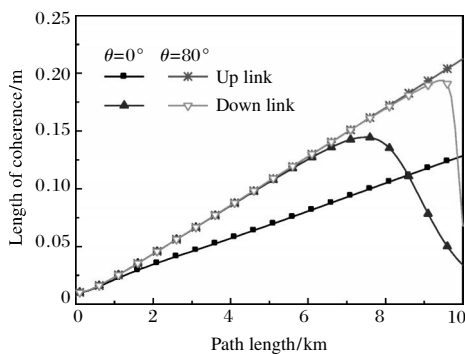


图 4 激光在大气湍流中沿斜程路径传播时的相干长度

Fig.4 Length of coherence of a beam in turbulence propagating along horizontal path

而在下行路径中, 激光的等效半径基本不受湍流的影响。对于相干长度, 在上行路径上, 其随着路径的增长而变大, 在下行路径上, 其随着路径的增长先是增大, 但是在靠近地面时受湍流的影响而迅速减小。

4 结论

在强起伏区, 迭代法所得到的等效半径比直接利用广义惠更斯-菲涅尔原理的结果要小, 所得到的相干长度更大, 总之, 迭代法显示的湍流效应比直接解要小。基于文中的推导过程, 迭代法更具有可靠性, 可很好地解决强起伏区激光传输的二阶矩问题, 而广义惠更斯-菲涅尔原理在强起伏区是不适用的。

迭代法也适用于激光沿斜程传输的情况, 结果表明在斜程路径上, 上行情况下等效半径受激光的影响更大, 下行情况上相干长度受湍流的影响更大。

参考文献:

- [1] J C Leader. Atmospheric propagation of partially coherent radiation[J]. *J Opt Soc Am*, 1978, 68(2): 175-185.
- [2] J C Leader. Intensity fluctuations resulting from partially coherent light propagating through atmospheric turbulence[J]. *J Opt Soc Am*, 1979, 69(1): 73-84.
- [3] J C Leader. Beam-intensity fluctuations in atmospheric turbulence[J]. *J Opt Soc Am*, 1981, 71(5): 542-558.
- [4] O Korotkova, L C Andrews, R L Phillips. A lidar model for a rough-surface target: method of partial coherence [C]// Proceedings of SPIE, 2004, 5237: 49-60.
- [5] O Korotkova, L C Andrews. Speckle propagation through atmospheric turbulence: effects of partial coherence of the target [C]// Laser Radar Technology and Applications, SPIE, 2002, 4723: 98-109.
- [6] Ji Xiaoling, Lv Baida. Effect of Turbulence on the Spectral Shift of Partially Coherent Light [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2005, 32(5): 506-510. (in Chinese)
- [7] T Shirai, A Dogariu, E Wolf. Mode analysis of spreading of partially coherent beams propagating through atmospheric turbulence[J]. *J Opt Soc Am A*, 2003, 20(6): 1094-1192.
- [8] Qian Xianmei, Zhu Wenyue, Rao Ruizhong. Numerical simulation of turbulent effects of laser propagation along a ground-space slant atmospheric path [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2008, 37(5): 777-782. (in Chinese)
- [9] Zhang Yixin, Wang Gaogang. Average intensity and short term beam spread of a laser beam propagating in a slant path atmosphere [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2007, 36(2): 167-171. (in Chinese)