

硬边衍射光束的计算模拟*

吕百达^{1,3}, 季小玲^{1,2}, 陶向阳^{1,3}, 赵光普^{1,4}, 肖希^{1,4}

(1. 四川大学 激光物理与化学研究所, 四川 成都 610064; 2. 四川师范大学 电子工程学院, 四川 成都 610066; 3. 江西师范大学 物理与通信电子学院, 江西 南昌 330027; 4. 宜宾学院 光电信息研究所, 四川 宜宾 644007)

摘要:在激光的产生和传输过程中或多或少地要受到光阑的限制。因此, 光束通过有硬边光阑限制光学系统传输问题的研究有重要实际意义。为此, 已发展了多种模拟方法。一般情况下, 对 Collins 公式直接数值积分是一种精确的模拟方法。但当光阑数增加时, 计算变得非常繁琐和费时。使用四种简明方法, 即解析公式法、递推算法、复高斯函数展开法和矩阵表示法来模拟硬边衍射光束, 对这些方法的优点和使用范围作了分析, 讨论了方法的改进。

关键词:硬边衍射光束; 传输公式; 递推算法; 复高斯函数展开; 矩阵表示法

中图分类号: TN24 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-2276(2005)03-0301-05

Numerical simulation of hard-edged diffracted beams*

Lü Bai-da^{1,3}, Ji Xiao-ling^{1,2}, TAO Xiang-yang^{1,3}, ZHAO Guang-pu^{1,4}, XIAO Xi^{1,4}

(1. Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China; 2. College of Electronic Engineering, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China; 3. College of Physics & Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China; 4. Institute of Optoelectronic Information, Yibin University, Yibin 644007, China)

Abstract: In the production and propagation of lasers there are more or less limiting apertures. Therefore, the beam propagation through hard-edged apertured optical systems is of practical importance, and a variety of simulation methods have been developed. As usual, the direct numerical integration of the Collins formula provides an exact simulation method, but it becomes very cumbersome and time consuming as the number of apertures increases. In this paper four concise methods, i.e., the analytical propagation equation, recurrence algorithm, complex Gaussian function expansion and matrix representation have been used to simulate hard-edged diffracted beams. Their advantages and applicable range are analyzed and some improvements are discussed.

Key words: Hard-edged diffracted beams; Propagation equation; Recurrence algorithm; Complex Gaussian function expansion; Matrix representation

收稿日期: 2004-07-10; 修订日期: 2004-08-20

* 基金项目: 国家高技术资助项目 (A823072); 四川省教育厅自然科学基金资助项目 (2002A089)

作者简介: 吕百达 (1943-), 男, 四川成都人, 教授, 博士生导师, 所长, 主要从事高功率和新型固体激光器方面的研究, 曾在国内外刊物上发表论文 300 余篇。

0 引言

实际的激光在产生和传输过程中,在某种程度上都要受到光阑的限制。为满足某些应用,需抑制激光振荡模式、空间切趾或整形等,也要使用不同形状的光阑。在大型复杂光学系统中,常配置有多个光阑。对软边光阑,例如高斯光阑的计算模拟问题比较简单。对硬边光阑,除极少情况有解析解(或形式解析解)存在外,通常是直接从菲涅耳衍射积分或 Collins 公式出发作数值积分。然而,积分核中存在的高频振荡因子使计算耗时很多,当硬边光阑数较多时,在微机计算已不能进行。因此,对受硬边光阑衍射光束的计算模拟成为激光光学中一个重要的研究问题,并已发展了多种模拟方法。对其中一些典型方法,包括解析公式法、递推算法、复高斯函数展开法和矩阵表示法进行分析,并以计算例说明其应用。

1 解析公式法

当有硬边光阑存在时,若 Collins 公式可直接积分得到便于进行物理分析的解析公式,数值计算变得简单。现以双曲余弦-高斯光束为例加以说明^[1]。

设在 $z=0$ 面上有场分布为:

$$E(x,0)=\exp\left(-\frac{x^2}{w_0}\right)\cosh(\Omega_0 x) \quad (1)$$

的 ChG 光束,式中 w_0 和 Ω_0 分别为高斯振幅分布的束腰宽度和与双曲余弦有关的参数。若在 $z=0$ 面上有全宽度 $2b$ 的硬边光阑,将公式(1)代入 Collins 公式直接积分,得到双曲余弦-高斯光束通过有光阑限制的近轴 ABCD 光学系统的解析传输公式为^[2]:

$$E(x',z)=\frac{\eta}{4}\exp\left[\left(-\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2\right]\exp\left(-\frac{q_0}{q}x'^2\right)\left\{\exp(\eta^2\alpha x')\times\left[\operatorname{erf}\left(\frac{b\beta}{w_0}-\frac{\alpha}{2\beta}-\gamma x'\right)-\operatorname{erf}\left(-\frac{b\beta}{w_0}-\frac{\alpha}{2\beta}-\gamma x'\right)\right]+\exp(-\eta^2\alpha x')\left[\operatorname{erf}\left(\frac{b\beta}{w_0}+\frac{\alpha}{2\beta}-\gamma x'\right)-\operatorname{erf}\left(-\frac{b\beta}{w_0}+\frac{\alpha}{2\beta}-\gamma x'\right)\right]\right\} \quad (2)$$

式中

$$\left\{\begin{aligned} \eta &= \sqrt{\frac{q_0}{Aq_0+B}}, \beta = \sqrt{\frac{A}{B}q_0+1}, \gamma = \frac{q_0}{\sqrt{B(Aq_0+B)}} \\ \frac{1}{q} &= \frac{C+D/q_0}{A+B/q_0}, x' = x/w_0, \alpha = w_0 \Omega_0 \end{aligned}\right. \quad (3)$$

erf 为误差函数。容易证明,在有光阑限制情况下,除双曲余弦-高斯光束外,对基模高斯光束、厄米-双曲余弦-高斯光束等也都可推导出解析传输公式。

2 递推算法

对某些光束,虽然直接积分得不到解析结果,但可以推导出计算通过硬边光阑衍射后场分布的递推公式,作递推计算就得到解析结果。一个典型厄米-高斯光束^[2]为:

设在 $z=0$ 处有场分布

$$E(x,0)=H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}x\right)\exp\left(-\frac{x^2}{w_0}\right) \quad (4)$$

的二维厄米-高斯光束通过硬边光阑限制 ABCD 光学系统,式中 w_0 为对应基模高斯光束束腰宽度; H_m 为 m 阶厄米函数。令 $m=0,1$ 代入 Collins 公式,直接积分得到:

$$E_0(x,z)=\frac{\sqrt{\pi}FS}{2P} \quad (5)$$

$$E_1(x,z)=\frac{\sqrt{2}S}{P^2w_0}\left\{\exp[-(bP+Qx)^2]-\exp[-(bP-Qx)^2+\sqrt{\pi}QFx]\right\} \quad (6)$$

式中

$$\left\{\begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{1}{w_0^2} + \frac{i\pi A}{\lambda B}} \\ S &= \sqrt{\frac{i}{\lambda B}} \exp\left[\left(Q^2 - \frac{i\pi D}{\lambda B}\right)x^2\right] \\ Q &= \frac{i\pi}{\lambda BP} \\ F &= \operatorname{erf}(bP-Qx) + \operatorname{erf}(bP+Qx) \end{aligned}\right. \quad (7)$$

式中 λ 为波长,与波数的关系为 $k=2\pi/\lambda$ 。

若 m 阶厄米-高斯光束的场 $E_m(x, z)$ ($m=0, 1, 2, \dots$) 已知, 可以证明 $m+1$ 阶厄米-高斯光束的场 $E_{m+1}(x, z)$ 可由递推公式:

$$E_{m+1}(x, z) = \frac{2\sqrt{2} Qx E_m(x, z)}{Pw_0} + 2m \left(\frac{2}{P^2 w_0^2} - 1 \right) \times E_{m-1}(x, z) - \frac{\sqrt{2} S}{P^2 w_0} H_m \left(\frac{\sqrt{2} b}{w_0} \right) \times \{ \exp[(-bP - Qx)^2] - (-1)^m \exp[-(bP + Qx)^2] \} \quad (8)$$

计算出来。例如, 由公式(5),(6),(8)得二阶厄米-高斯光束的传输公式为:

$$E_2(x, z) = \frac{S}{P^3 w_0^2} \{ -4(bP - Qx) \exp[-(bP + Qx)^2] - 4(bP + Qx) \exp[-(bP - Qx)^2] + \sqrt{\pi} F(2 - P^2 w_0^2 + 4Q^2 x^2) \} \quad (9)$$

3 复高斯函数展开法

Wen 和 Breazeal^[3]将半径 b 圆孔光阑的窗口函数 $cir(r)$ 用有限个复高斯函数之和来逼近, 即:

$$cir(r) = \sum_{n=1}^M F_n \exp \left(-\frac{G_n r^2}{b} \right) \quad (10)$$

式中系数 F_n, G_n 和项数见参考文献[3]。显然, 这一方法也能推广用于矩形光阑, 对应窗口函数为 $rect(x)$ 。公式(10)的主要优点是:(1) 已作最佳化处理, 即用较少的系数拟合 $cir(r)$, 误差最小, 耗时也少;(2) 用公式(10)代替硬边光阑窗口函数代入 Collins 后, 对常见光束, 例如平顶高斯光束、贝塞耳光束、贝塞耳-高斯光束和部分相干光等通过含有一个或多个硬边光阑 $ABCD$ 光学系统的传输公式都能写为解析的形式^[4-8], 使计算机时大为减少, 并保证足够的计算精度, 仅在靠近光阑的近场处有较大误差。

公式(10)与 $cir(r)$ 的拟合见图 1(a)。由图知, 复高斯函数展开式的振幅和位相都不能完全与 $cir(r)$ 拟合,

特别是在光阑边界($r > b$)处相差较大。这是产生计算误差的物理原因。可以针对这一问题做一些改进, 例如将 $cir(r)$ 展开为傅里叶级数和有限个复高斯函数之和的乘积形式^[9], 其拟合示于图 1(b)。显然, 拟合误差进一步减小, 因此, 计算精度得以提高。但因拟合公式的复杂化会造成计算时间的增加。

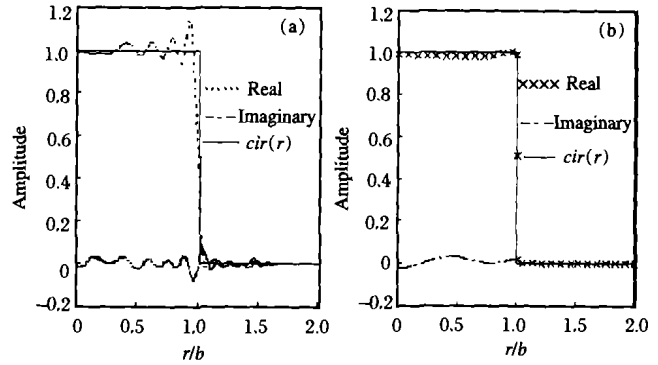


图1 $cir(r)$ 与拟合函数的实部和虚部

Fig.1 $cir(r)$, real and imaginary parts of the fitting functions

作为这一方法的应用例, 现考虑二维平顶高斯光束通过图 2 所示含有多个光阑 $ABCD$ 近轴光学系统的传输, 图中 H_i 面上光阑全宽为 $2b_i$ ($i=1, 2, \dots, m$)。在 $z=0$ 面入射平顶高斯光束场分布为:

$$E_0(x, z) = \exp \left(-\frac{(N+1)x^2}{w_0^2} \right) \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left[\frac{(N+1)x^2}{w_0^2} \right]^n \quad (11)$$

式中 $N(N=0, 1, 2, \dots)$ 和 w_0 分别为平顶高斯光束的阶数和束腰宽度。

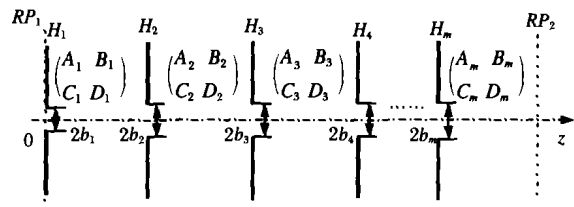


图2 多光阑 $ABCD$ 光学系统

Fig.2 Multi-apertured $ABCD$ optical system

从 Collins 公式出发, 经过繁琐的推导, 得到平顶高斯光束通过 m 个含硬边光阑 $ABCD$ 光学系统后场分布的近似解析公式为:

$$E_m(x, z) = \exp\left(-\frac{ikD_m x^2}{2B_m}\right) \sum_{n=0}^N \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M \cdots \sum_{j_n=1}^M S_1 S_2 \cdots$$

$$S_m \exp\left(-\left(\frac{k}{2B_m Q_m}\right)^2 x^2\right) H_{2n}(R_m x) \quad (m=3,4,5\cdots) \quad (12)$$

式中

$$\begin{cases} Q_m^2 = \left(\frac{k}{2B_{m-1} Q_{m-1}}\right)^2 + \frac{ik}{2} \left(\frac{D_{m-1}}{B_{m-1}} + \frac{A_m}{B_m}\right) + \frac{G_{j_s}^2}{b_m^2} \\ S_m = \sqrt{\frac{ik}{2B_m Q_m} \frac{F_{j_s}}{Q_m} \left(\frac{Q_m^2 - R_{m-1}^2}{Q_m^2}\right)^n} \\ R_m = \frac{ikR_{m-1}}{2B_m Q_m \sqrt{Q_m^2 - R_{m-1}^2}} \end{cases} \quad (13)$$

对 $m=1, 2$ 有类似的公式, 为节省篇幅从略。

数值计算例见图 3。图中给出了初始场分布为公式(11)的平顶高斯光束通过 3 个硬边光阑-透镜光学系统后(a) $z'=0.1$ m 处(以第三个光阑透镜为参考)的横向光强和(b)轴上光强分布。两图中的实线表示用公式(12)计算的结果, 圆圈表示用 Collins 公式数值积分的结果。设计算参数为 $\lambda=1.06 \mu\text{m}$, $\omega_0=1$ mm, 各透镜焦距均为 1 m, 透镜间的间距均为 1 m, (a) $b_1=b_2=b_3=1$ mm ; (b) $b_1=1$ mm, $b_2=0.8$ mm, $b_3=0.6$ mm。由图可知, 与直接积分 Collins 公式的数值计算结果比较, 二者符合较好, 且所用机时大为减少。例如, 图 3(a)用公式(12)与直接积分 Collins 公式的数值计算的机时比为 1:1950。

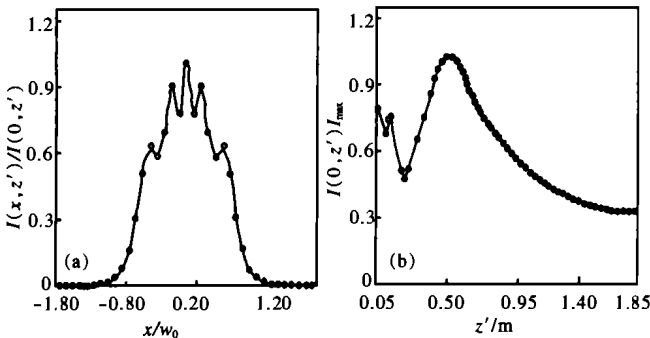


图3 FGB 光束 ($N=4$) 通过三光阑透镜系统后光强分布
Fig.3 Intensity distribution of a FGB with $N=4$ passing through a three aperture-lens system

4 矩阵表示法

圆对称光束通过受硬边光阑限制轴对称光学系统时, 利用 Hankel 变换和贝塞耳函数的性质, 可以将衍射积分公式写成有限个贝塞耳函数之和, 或矩阵乘积的形式。这即矩阵表示法的物理思想^[10,11]。

设圆对称光束在 $z=0$ 处的场为 $E_0(r, 0)$, 且 $z=0$ 处有一半径为 b 的圆孔光阑, 则在 z 处的场可表示为:

$$E(r, z) = (-2iz/kR^2) \exp(ikz) \exp(ikr^2/2z) \times \sum_{s=1}^{\infty} E_0(j_s z/kR, 0) \exp(ikzj_s^2/2kR^2) \frac{J_0(j_s r/R)}{[J_1(j_s)]^2} \quad (14)$$

式中 J_0, J_1 分别为零阶和一阶贝塞耳函数; R 为某一设定值; j_s 是零阶贝塞耳函数的所有正零点, 当 $j_s > kRb/z$ 时, $E_0(j_s z/kR, 0)=0$; j_{m+1} 是第一个满足 $j_{m+1} > kRb/z$ 条件的第一类零阶贝塞耳函数的零点, 因此, 公式(14)中的求和运算截断到 $s=M$ 。

公式(14)可写成矩阵形式:

$$E(r, z) = \sum_{s=1}^M T \times E_0 \quad (15)$$

$$\text{式中 } T = -\frac{i2z}{kR^2} \exp(ikz) \exp\left(\frac{ir^2 k}{2z}\right) \exp\left(\frac{ij_s^2 z}{2kR^2}\right) \times$$

$$J_0(j_s r/R) [J_1(j_s)]^{-2} \quad (16)$$

公式(14)~(16)对 $z=0$ 面后为自由空间的菲涅耳与夫琅和费衍射区都是适用的。对 ABCD 光学系统, 公式(14), (16)为:

$$E(r, z) = (-2iB/kR^2) \exp(ikz) \exp(ikr^2 D/2B) \times \sum_{s=1}^{\infty} E_0(j_s B/kR, 0) \exp(ikj_s^2 AB/2kR^2) \times \frac{J_0(j_s r/R)}{[J_1(j_s)]^2} \quad (17)$$

$$T = -\frac{i2B}{kR^2} \exp(ikz) \exp\left(\frac{ir^2 kD}{2B}\right) \exp\left(\frac{ij_s^2 AB}{2kR^2}\right) \times J_0(j_s r/R) [J_1(j_s)]^{-2} \quad (18)$$

这一方法还可推广用于圆对称光束通过含多个

光阑轴对称 $ABCD$ 光学系统的计算模拟。

图4给出了高斯光束通过 $z=0$ 处置一圆孔光阑后在不同菲涅耳数 $F=b^2/(\lambda z)$ 处的横向和轴上光强分布。计算参数为 $w_0=1\text{ mm}$, $\lambda=1.06\ \mu\text{m}$, $b=1\text{ mm}$ 。由图可知,无论在菲涅耳或夫琅和费衍射区,与直接数值积分 Collins 公式的结果都很相符。因此,矩阵表示法是一种可提供足够计算精度的算法,但其计算精度与 R 选取有关。 R 取得越大,计算精度越高,计算时间越多。图中的实线表示用公式(15)计算的结果,圆圈表示用 Collins 公式数值积分的结果。

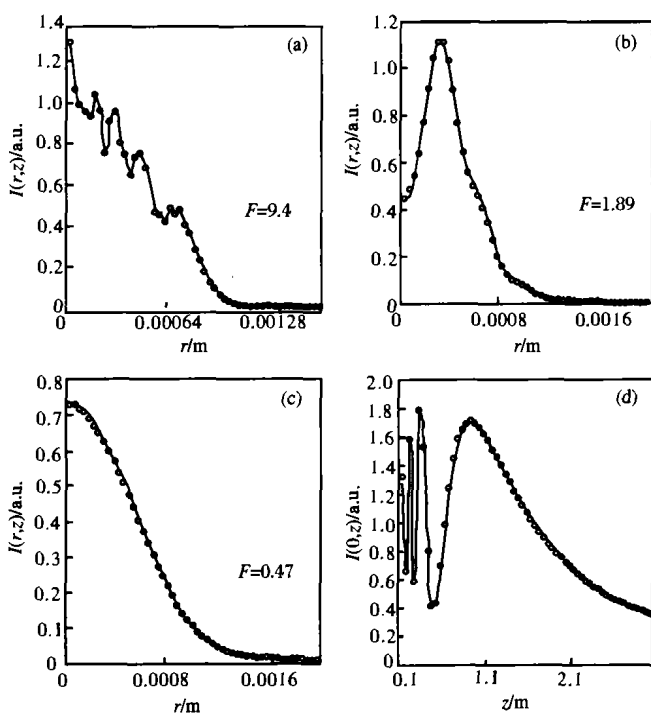


图4 高斯光束通过圆孔光阑后光强分布

Fig.4 Transversal intensity distributions $I(r,z)$ at planes of a Gaussian beam passing through a circular aperture

5 小结

对有代表性的几种硬边光阑衍射光束的计算模拟方法进行了分析。其中,解析公式法和递推算法能提供解析(或形式上解析)的传输公式,便于对影响光阑衍射的物理因素作直观的物理分析。在近轴近似下利用解析公式能得到与直接对 Collins 公式作数值计算完全一致的结果,计算效率高。对常见光束,使用复高斯函数展开法都能得到近似解析传输公式,除在靠近光阑的近场处外,一般能保证计算精度,并兼顾计

算效率。其计算误差是因为用有限个复高斯函数之和不能完全拟合硬边窗口函数引起的。可通过更好地拟合窗口函数来进一步提高计算精度。矩阵表示法仅能用于圆对称光束和轴对称光学系统。当 R 取足够大时,可保证计算精度,但以牺牲计算时间为代价。 R 的选取与光束的衍射发散程度有关,对多光阑光学系统,衍射光束在不同位置光阑处的发散情况不同。因此,在计算模拟中 R 的合理选取仍是一个值得重视的问题,一般取 R 为光束扩展尺寸的 10 倍左右为宜。

参考文献:

- [1] Lü B, Ma H, Zhang B. Propagation properties of cosh-Gaussian beams[J]. Opt Commun, 1999, 164: 165-170.
- [2] Tao X, Zhou N, Lü B. Recurrence propagation equation of Hermite-Gaussian beam through a paraxial optical ABCD system with hard-edged aperture[J]. Optik, 2003, 114(3): 113-117.
- [3] Wen J, Breazeale M. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams [J]. J Acoust Soc Am, 1988, 83(5): 1752-1756.
- [4] Ding D, Liu X. Approximate description for Bessel, Bessel-Gauss, and Gaussian beams with finite aperture [J]. J Opt Soc Am A, 1999, 16(6): 1286-1293.
- [5] Lü B, Luo S. Approximate propagation equations of flattened Gaussian beams passing through a paraxial ABCD system with hard-edge aperture [J]. J Mod Opt, 2001, 48(15): 2169-2178.
- [6] 王喜庆, 吕百达. 贝塞耳函数调制的高斯光束通过有光阑 ABCD 光学系统的传输[J]. 物理学报, 2001, 50(4): 682-685.
- [7] Lü B, Ji X. Analytical study of a flattened Gaussian beam through multi-apertured optical imaging systems of $B=0$ [J]. Opt & Quant Electron, 2003, 35: 1317-1333.
- [8] Lü B, Ji X. An approximate analytical study of laser beams with amplitude modulations and phase fluctuations through a multiapertured ABCD system[J]. Pure and Applied Optics, 2004, 6(1): 161-166.
- [9] 赵光普, 吕百达. 硬边光阑光学系统对光束变换的改进算法[J]. 强激光与离子束, 2004, 16(6): 707-711.
- [10] Vicari L, Bloisi F. Matrix representation of axisymmetric optical systems including spatial filters [J]. Appl Opt, 1989, 28(21): 4682-4686.
- [11] Bloisi F, Vicari L. Diffraction field of a circularly symmetric beam through a sequence of apertures[J]. Appl Opt, 1991, 30(13): 1595-1597.