

## 基于小波域分类隐马尔可夫树模型的图像去噪

苏涛,张登福,毕笃彦

(空军工程大学 航空电子工程系, 陕西 西安 710038)

**摘要:**为适应图像的空域非平稳变化,提出了一种基于小波域分类隐马尔可夫树(CHMT)模型的图像去噪方法。该模型中,图像在每一尺度每一子带的小波系数均被分成  $C$  组以突出其空域非平稳变化的特征,这样原来的一棵小波四叉树被分成了  $C$  棵具有不同 HMT 参数的小波四叉树,再经过合理的初始化和期望最大化(EM)算法训练参数,反变换恢复。实验结果表明,与已有方法相比,该方法在不增加计算量的前提下,明显改善了所恢复图像的质量(PSNR)。

**关键词:**CHMT 模型; 去噪; EM 算法; 初始化

**中图分类号:**TP391 **文献标识码:**A **文章编号:**1007-2276(2005)02-0232-04

## Denoising method based on Wavelet-Domain Classified Hidden Markov Tree Model

SU Tao, ZHANG Deng-fu, BI Du-yan

(Electronic Department of Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

**Abstract:**In order to adapt spatial nonstationary character of an image, a denoising method based on Wavelet -Domain Classified Hidden Markov Tree Model (CHMT) is proposed.In this method,image's coefficients of every scale and subband are divided into  $C$  groups to emphasize the spatial nonstationary character,so that one image corresponds with  $C$  HMTs.Then these coefficients are initialized,trained by EM algorithm and inverse-transformed.Test result shows that this method improves image quality(PSNR) obviously while calculation doesn't add.

**Key words:**CHMT Model; Denoising; EM algorithm; Initialization

### 0 引言

隐 Markov 模型(HMM)理论起源于 20 世纪 60 年代<sup>[1]</sup>,其普及主要归功于在语音识别<sup>[2]</sup>领域的成功应用。根据小波系数尺度之间的持续性和指数衰减性,利用 HMM 可简洁地表示小波系数的概率结构。小波域的隐 Markov 模型,尤其是隐 Markov 树 HMT 模

型<sup>[3]</sup>,利用了小波域的一种树型结构 Markov 链提取小波系数尺度之间的相关性,在图像去噪<sup>[4]</sup>中取得了较好的效果。但仅利用了图像小波系数间的关联<sup>[3,4]</sup>,而忽略了图像空域非平稳变化的特性。Wiener 滤波虽可用于去噪,但对图像的峰值信噪比(PSNR)的改善有限。软门限方法<sup>[5]</sup>虽然可以大幅提高 PSNR,但存在“过平滑”问题。

文中提出的基于小波域分类隐马尔可夫树 (CHMT) 模型的去噪方法不仅利用了图像小波系数间的关联, 而且反映了图像空域非平稳变化的特性。实验结果表明去噪图像的 PSNR 性能和视觉质量都有明显提高。

### 1 小波域 HMT 模型

根据小波系数分布的持续性和聚类性, 提出了树型结构的 HMT 模型<sup>[3]</sup>, 先将原图像按  $J$  尺度逐级进行小波分解, 然后经线性卷积和下采样将小波系数矩阵裁减成原图像大小<sup>[4]</sup>, 如图 1 所示。相同子带的  $j$  ( $2 \leq j \leq J$ ) 尺度下的一个小波系数对应  $j-1$  尺度下的四个小波系数。这样子带 LH、HL、HH 分别对应一个 HMT, 每一个 HMT 为图 2 所示的四叉树结构。其中

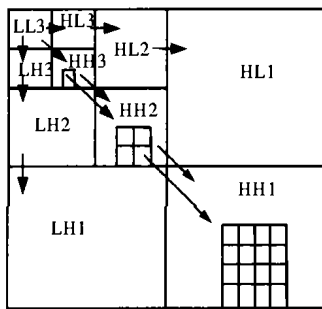


图 1 2-D 3 尺度 DWT  
Fig.1 2-D 3-scale DWT

### 2 小波域 CHMT 模型

由上述可见 HMT 仅利用了图像小波系数间的

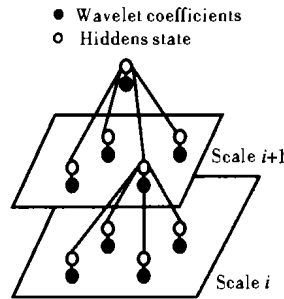


图 2 2-D HMT 模型  
的四叉树结构

Fig.2 2-D HMT for an  
image quad tree

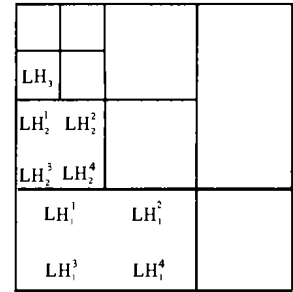


图 3 2-D CHMT(C=4)模型

Fig.3 2-D CHMT(C=4) model

关联, 为使 HMT 适应图像的空域非平稳变化以提高去噪性能, 提出了 2-D 分类 HMT(CHMT) 模型, 如图 3 所示。在 CHMT 中, 每子带四叉树结构的小波子树分成  $C$  组, 每一组都用不同的 HMT 模型表示, 则, EM 训练过程对每一 HMT 单独处理。由于一个 2-D HMT 由  $\Theta_{HMT} = \{p_{S_j, j}, A_{j, j+1}, \sigma_{j, S_0}^2, \sigma_{j, S_1}^2 | j=1, \dots, J\}$  定义。CHMT 可用  $C$  组参数来表示, 即:

$$\Theta_{CHMT} = \{\Theta_{HMT1}, \Theta_{HMT2}, \dots, \Theta_{HMTC}\}$$

系数的分类可以是等量一致分组, 也可以分成不同大小, 一种简便的方法是把每一尺度的每一子带分成等大小的  $C$  组。考虑  $C=4^\gamma$  ( $\gamma=0, 1, 2, \dots$ ) 的均匀分类, 并且在 CHMT 中没有重叠的子树, 以便直接使用 EM 训练算法。CHMT 和 HMT 有相似的计算复杂性, 但 CHMT 需要更多的参数来定义模型。另一方面, 通过分类减少了每一 HMT 中子树的小波系数, CHMT 模型的训练效率也可能因训练数据的减少而提高。但是过少的训练数据会使训练结果不可靠, 因此  $C$  不能选得太大。对  $512 \times 512$  的图像, 根据分解尺度  $J$  的不同,  $C$  可取 4、16、64。

合理、优化的参数初始化应用在 CHMT 模型中可保证算法的有效性和效率。文中采用的初始化方法<sup>[6]</sup>是: 首先将每一子带的小波系数分为不同的几组, 用从每一组确定的局部统计参数作为局部起始点; 然后两相邻组之间的转移概率由其相应的局部统计得到。这两步分别称为水平扫描和垂直计数, 水平扫描在不

黑、白点分别代表小波系数及隐状态。隐状态指控制小波系数大小且不可观测的状态变量, 记为  $S_{k,i} = m$ ,  $m=S, L$  ( $k, i$  为小波系数在各子带中的位置) 分别对应小波系数取小值或大值时的隐状态取值。每个父节点有四个子节点, 且每个子节点的分布都由其父节点的分布确定, 而与其“祖先”节点之间彼此独立。

假设  $S_0$  表示小系数而  $S_1$  表示大系数的状态, 每一父→子的状态转移对应一个状态转移矩阵

$$A_{k,i} = \begin{bmatrix} p_{k,i}^{S_0 \rightarrow S_0} & p_{k,i}^{S_0 \rightarrow S_1} \\ p_{k,i}^{S_1 \rightarrow S_0} & p_{k,i}^{S_1 \rightarrow S_1} \end{bmatrix}, p_{k,i}^{S_0 \rightarrow S_1} = 1 - p_{k,i}^{S_0 \rightarrow S_0}, p_{k,i}^{S_1 \rightarrow S_0} = 1 - p_{k,i}^{S_1 \rightarrow S_1}$$

参数  $p_{k,i}^{S_0 \rightarrow S_0}$  ( $p_{k,i}^{S_1 \rightarrow S_1}$ ) 为已知其父系数为小(大)、该小波系数为小(大)的概率, 称为持续概率;  $p_{k,i}^{S_0 \rightarrow S_1}$  和  $p_{k,i}^{S_1 \rightarrow S_0}$  为更新概率。

同尺度中状态概率  $p_{s_{j,m}}(m)$  和方差  $\sigma_{k,j,m}$  初始值的估计,垂直计数得到初始的转移概率  $p_{i,j+1}^{m \rightarrow n}$ ,用这些统计参数和初始概率开始一子带的 HMT 模型参数训练。

### 3 算法实现

首先将有噪图像(大小  $2^l \times 2^l$  像素)按  $J$  尺度变换到小波域(使用 Daubechies8 小波),经线性卷积和下采样将有噪小波系数矩阵裁减成原图像大小。然后按第 1 节中方法将此 HMT 模型拆成  $C$  ( $=4^\gamma, \gamma=0, 1, 2 \dots$ ) 组 CHMT 模型,每组对应的小波系数矩阵大小为  $2^{l-\gamma} \times 2^{l-\gamma}$ 。接下来是对  $C$  组参数  $\Theta_{\text{HMT}}(1 \leq i \leq C)$  的初始化和 EM 算法训练以快速找到最佳参数,每组参数的初始化和 EM 算法训练如下:

(1) 初始化

1) 水平扫描

水平扫描中对第  $j$  尺度参数  $\Theta_j$  的初始化采用折中的设置,即  $ps_j(0)=ps_j(1)=0.5$ ,并根据  $\omega_j^*$  (\* 代表有噪)的幅值分成同样大小的 2 组,用这两组系数的方差作为混合方差的初值,即  $\sigma_{j,0}^2$  和  $\sigma_{j,1}^2$ 。由定义的参数  $\Theta_j^0$  可知,水平扫描的操作如下:

a. 初始化 设置  $\Theta_j^0$  和迭代次数  $l=0$ ;

b. 期望值估计 计算状态  $s_{j,k,i}$  的条件概率为:

$$p(s_{j,k,i} = m | \omega_{j,k,i}^*, \Theta_j) = \frac{ps_j(m)g(\omega_{j,k,i}^*; 0, \sigma_{j,m}^2)}{\sum_{n=0}^1 ps_j(n)g(\omega_{j,k,i}^*; 0, \sigma_{j,n}^2)} \quad (1)$$

c. 参数更新

$$\Theta_j^{l+1} = \text{argmax}_{\Theta_j} E(\ln f(\omega_j^*, S_j | \Theta_j) | \omega_j^*, \Theta_j^l);$$

$$ps_j(m) = \frac{1}{N_j} \sum_{k=0}^{N_j-1} \sum_{i=0}^{N_j-1} p(s_{j,k,i} = m | \omega_{j,k,i}^*, \Theta_j) \quad (2)$$

$$\sigma_{j,m}^2 = \frac{\sum_{k=0}^{N_j-1} \sum_{i=0}^{N_j-1} (\omega_{j,k,i}^*)^2 p(s_{j,k,i} = m | \omega_{j,k,i}^*, \Theta_j)}{N_j ps_j(m)} \quad (3)$$

式中  $N_j \times N_j$  表示第  $j$  尺度下每子带小波系数矩阵的大小。

d. 迭代 置  $l=l+1$ ,如果收敛则停止,否则返回 b。

2) 垂直计数

用水平扫描估计初始的高斯混合模型之后,垂直计数完成两个邻近尺度之间的初始转移概率  $p_{j,j+1}^{m \rightarrow n}$  的估计。给定  $\Theta_j(j=1, \dots, J)$  和  $\omega_{j,k,i}^*(k, i=0, 1, \dots, N_j - 1)$  基于最大似然判据可确定  $\omega_{j,k,i}^*$  的初始隐含状态:

$$S_{j,k,i} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } |\omega_{j,k,i}^*| < T_j \\ 1, & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

式中  $T_j = \sqrt{\sigma_{j,0}^2 \sigma_{j,1}^2 (\ln \sigma_{j,1}^2 - \ln \sigma_{j,0}^2) / (\sigma_{j,1}^2 - \sigma_{j,0}^2)}$ 。由这

一初始状态,可以沿树型结构的小波系数集计数每两邻近尺度之间的状态转移频率。然后用归一化的转移频率设置转移概率  $p_{j,j+1}^{m \rightarrow n}$  的初始值:

$$p_{j,j+1}^{m \rightarrow n} = \frac{\#(S_{j,k,i} = m \text{ 和 } S_{j+1,[k/2],[i/2]} = n | k, i=0, 1, \dots, N_j - 1)}{\#(S_{j+1,[k/2],[i/2]} = n | k, i=0, 1, \dots, N_j - 1)} \quad (5)$$

式中  $\#(A=B)$  表示事件  $A=B$  发生的次数。

(2) EM 算法训练

1) 初始化:上已完成,置迭代次数  $l=0$ ;

2) 期望估计:计算隐含状态变量的联合 pdf:  $p(s = ml \omega^*, \Theta^l)$ , 用于使  $E_s[\ln f(\omega^*, s = m | \Theta) | \omega^*, \Theta^l]$  最大化。这一步在 HMM 文献中称为 Forward-Backward 算法<sup>[3]</sup>;

3) 参数更新(最大化):使  $\Theta^{l+1} = \text{argmax}_{\Theta} E_s[\ln f(\omega^*, s = m | \Theta) | \omega^*, \Theta^l]$ ;

4) 迭代:置  $l=l+1$ 。若收敛则停止,否则返回 2)。获得最佳参数  $\Theta$  后,去噪系数  $\omega_{j,k,i}$  为条件均值:

$$\hat{\omega}_{j,k,i} = E[W_{j,k,i} | W_{j,k,i}^*, \Theta] = \sum_{m=0}^1 p(m | \omega_{j,k,i}^*, \Theta) \frac{\sigma_{j,k,i,m}^2}{\sigma_{j,k,i,m}^2 + \sigma_n^2} \omega_{j,k,i}^* \quad (6)$$

式中  $\sigma_n^2$  为噪声方差。 $C$  组 HMT 合并成一个 HMT

后经 IDWT 得到去噪图像。

### 4 实验结果

实验中采用的有噪图像大小为 512×512 像素,每像素灰度深度为 8 bits,噪声为加性 Gauss 白噪声,采用 Daubechies8 小波进行 5 级分解。实验平台是 MA TLAB6.1,结果如图 4 和表 1 所示。从去噪效果看,文中的 CHMT 模型明显优于 Donoho 等人的方法,尤其在噪声较大时对细节图像(barbara)的恢复效果较明显。



(a) 有噪图像(噪声标准差为  $\sigma_n=25, PSNR=22.1$  dB)



(b) Donoho 的软门限方法<sup>[5]</sup> ( $PSNR=25.5$  dB)

(a) Noisy image( $\sigma_n=25, PSNR=22.1$  dB)

(b) Donoho's soft threshold method<sup>[5]</sup> ( $PSNR=25.5$  dB)



(c) Matlab 中的 Wiener 滤波方法 ( $PSNR=26.8$  dB)



(d) 文中的 CHMT 模型 ( $C=4, PSNR=29.2$  dB)

(c) Wiener filter in Matlab ( $PSNR=26.8$  dB)

(d) CHMT model proposed in this paper( $C=4, PSNR=29.2$  dB)

图 4 各种方法去噪效果的比较

Fig.4 Performance comparison of various denoising methods

### 5 结 论

文中提出了一种基于小波域分类隐马尔可夫树模型的图像去噪方法,该方法将小波子树归到 C 类中,每一类是一个 HMT 模型,这样不仅利用了图像小波系数间的关联,而且反映了图像空域非平稳变化的特性。实验结果表明,文中的方法明显优于 Donoho 等人的方法,尤其在对细节图像的恢复时效果较明

显。可用于对医学图像和航空影像等的去噪增强。采用自适应的不一致分类或局部区域重叠分类更适应图像的局部非平稳性,以进一步提高去噪效果是今后工作的重点。

表 1 各种方法去噪后图像的 PSNR 比较  
Tab.1 PSNR values of images denoised by various methods

Noisy images	Lena				Barbara				
	Noise standard deviation $\sigma_n$	10	15	20	25	10	15	20	25
Donoho's soft threshold <sup>[5]</sup>		31.6	29.8	28.5	25.5	28.6	26.5	25.2	22.1
Wiener filter(Matlab)		32.7	31.3	30.1	26.8	28.4	27.4	26.5	23.2
HMT <sup>[4]</sup>		33.9	31.8	30.4	27.8	31.9	29.4	27.8	24.2
uHMT <sup>[4]</sup>		33.6	31.6	30.2	27.4	28.3	26.4	25.3	22.8
CHMT in this paper		34.2	32.2	31.1	29.2	32.7	30.0	28.6	25.9

### 参 考 文 献:

- [1] Baum L E , Eagon J A. An inequality with applications to statistical estimation for probabilistic functions of Markov processes and to a model for ecology[J]. Bulletin of American Mathematical Statistics, 1967, 37: 360-363.
- [2] Rabiner L R. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition[J]. Proceedings of the IEEE, 1989, 77(2): 257-286.
- [3] Crouse M S, Nowak R D, Baraniuk R C. Wavelet-based statistical signal processing using hidden Markov models[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1998, 46(4): 886-902.
- [4] Romberg J K, Hyeokho Choi, Baraniuk R G. Bayesian tree structured image modeling using wavelet-domain hidden Markov models[J]. IEEE Trans Image Processing, 2001, 10(7): 1056-1067.
- [5] Donoho D, Johnstone I. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. Ameri Stat Assoc, 1995, 90(12): 1200-1224.
- [6] Fan G, Xia X-G. Wavelet-based statistical image processing using Hidden Markov Tree model[A]. In: Proceedings 34th Annual Conference on Information Sciences and Systems[C]. New Jersey: Princeton, 2000.