

点扩散函数的一维数值计算及其 MATLAB 实现*

江月松¹, 邱志伟², 李 铮¹

(1. 北京航空航天大学 电子信息工程学院 光电与信息工程系, 北京 100083;
2. 北京东方计量技术研究所, 北京 100080)

摘 要:通过应用复指数函数与 Bessel 函数的展开关系和将径向对称的光瞳函数展开成方位角的 Fourier 级数的方法, 可以将衍射受限光学成像系统的点扩散函数的二维 Fourier 变换的计算转换为二维 Fourier 变换和一维 Hankel 变换的计算。并借助 MATLAB 软件在计算机上实现了编程计算。与二维 Fourier 变换计算方法相比, 一维计算可以方便而清晰地获得像平面上任一确定方向的点扩散强度分布。与 Fortran、Basic 和 C 等编程计算语言相比, 应用 MATLAB 语言编程计算, 程序语言简洁, 且大大降低了使用者对数学基础和计算机语言知识的要求, 是进行科学与工程研究的高效工具。

关键词:点扩散函数; 一维计算; Hankel 变换; MATLAB 软件

中图分类号:TN21; TP31 **文献标识码:**A **文章编号:**1007-2276(2004)04-0405-04

One-dimensional digital computation and realization on MATLAB of point spread function*

Jiang Yue-song¹, Qiu Zhi-wei², Li Zheng¹

(1. Department of Optoelectronics and Information, School of Information Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China; 2. Institute of Beijing Orient Measuring Technique, Beijing 100080, China)

Abstract: The computation of two-dimensional Fourier transform for point spread function of diffraction limited pupil can be transformed to the computation of one-dimensional Fourier and Hankel transform by use of the relationship between exponential function and Bessel function and property of an expansion of a optical symmetrical pupil function into azimuthal Fourier series. The detailed numerical procedure based on one-dimensional digital algorithm is completed on MATLAB. In comparison with the classic two-dimensional Fourier transform algorithm, the one-dimensional method of Fourier and Hankel transform can obtain intensity samples along arbitrary radial direction at the image plane. And compared with Fortran, Basic and C language etc., the MATLAB program has advantages of succinct language, great reductions of demand of mathematic basis and computer language, and it is a efficient tool for scientific and engineering research.

Key words: Point spread function; One-dimensional computation; Hankel transform; MATLAB software

收稿日期: 2003-09-02; 修订日期: 2003-10-15

* 基金项目: 武器装备预研基金资助项目(51401020104HK0106)

作者简介: 江月松(1959-), 男, 江苏淮安人, 教授, 博士, 主要从事红外成像、综合孔径成像技术与系统、光电制导与对抗等方面的研究。

0 引言

点扩散函数是评价光学系统成像质量的基本工具,对于衍射受限成像系统,点扩散函数就是计算 Fraunhofer 衍射积分的值^[1,2],通常在实际工程应用中,很难求出衍射积分的精确解析式,因此计算点扩散函数的一般做法是计算含有像差的光瞳函数的二维快速 Fourier (FFT) 变换作数值近似计算。二维 FFT 数值计算的好处是可以从总体上给出像面上点扩散函数强度分布概况,但要精确地观察某一方向的点扩散函数的强度分布却比较困难。为此,本文研究了在某一确定的方位角的情况下点扩散函数的一维数值计算问题,研究结果表明,在利用复指数函数与 Bessel 函数之间的展开关系和径向对称光瞳函数可以展开为 Fourier 级数的特性后,可以通过相继的一维 Fourier 变换和 Hankel 变换计算来实现点扩散函数的计算。实际计算表明,一维计算可以清晰地得出像平面上某一确定方向的点扩散函数的强度分布情况,同样可以作为工程研究的一个有效方法。此外,对于实际的编程计算,若用传统的 Basic、Fortran 和 C 语言编程,既需要熟练地掌握所有语言的语法及编程技巧,还需要对有关的算法有深刻的了解,这样要耗去大量的人力和物力,影响工作效率。MATLAB 科学与工程计算软件包的功能强、效率高^[3,4],集应用程序和图形于一体,表述形式简洁,不仅大大降低了科学研究和工程设计工作者的语言知识要求,而且还可以在计算机上直接输出计算结果和精美的图形显示,已成为当前流行的计算软件。本文的一维计算方法在 MATLAB 上进行了实例编程计算,计算结果以图形显示,证明了 MATLAB 软件是进行科学与工程研究的高效工具。

1 点扩散函数与 Hankel 变换

空不变衍射受限成像系统的点扩散函数 $h(x, y)$ 与出射光瞳函数 $P(x, y)$ 的关系可表示为^[1]:

$$h(x, y) = C \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda d_i} (x, x + y, y)\right] dx dy = F\{P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y})\} \quad (1)$$

式中 (x, y) 是像平面上的点; $C = 1/(\lambda^2 d_o d_i)$, d_o 是物面到光瞳面的距离, d_i 是出瞳平面到像平面的距离; λ 是波长; $\tilde{x} = \frac{x}{\lambda d_i}$, $\tilde{y} = \frac{y}{\lambda d_i}$; x, y 是光瞳面上的点; j 是虚数单位。公式(1)表明,点扩散函数是光瞳函数的二维 Fourier 变换。对于一般情况,很难求得公式(1)积分的解析计算,通常是通过编程求出二维离散快速 Fourier 变换作为解析解的近似。而计算离散的二维 FFT 就需在每个指标上连续地计算原函数的一维 FFT^[5],得出的结果是像平面上点扩散函数强度的总的分布情况,要想清晰地观察某一特定方向的点扩散函数的强度分布情况,还要做进一步的工作。但值得注意的是,在实际的光学系统中,出射光瞳(如透镜、光阑等)的形状通常是圆形的,因此公式(1)中的光瞳函数通常是径向对称(或圆对称)的,可以应用这种对称性来研究光瞳函数的二维 Fourier 变换。

在公式(1)中,将直角坐标用极坐标表示。设 θ 和 φ 分别是光瞳面内和像平面中的方位,并令 $\tilde{x} = r \cos \theta$, $\tilde{y} = r \sin \theta$, $x_i = \rho \cos \varphi$, $y_i = \rho \sin \varphi$, 则公式(1)的积分为:

$$h(\rho, \varphi) = C \iint_{-\infty}^{\infty} P(r, \theta) K(r, \theta; \rho, \varphi) r dr d\theta \quad (2)$$

式中 $K(r, \theta; \rho, \varphi) = \exp[j 2\pi r \rho \cos(\varphi - \theta)]$ (3) 应用 Bessel 函数将 $K(r, \theta; \rho, \varphi)$ 展开,有^[6]:

$$K(r, \theta; \rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(2\pi r \rho) e^{jn(\varphi - \theta)} = J_0(2\pi r \rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} j^n J_n(2\pi r \rho) \cos[n(\varphi - \theta)] \quad (4)$$

式中 $J_n(2\pi r \rho)$ 是第一类 n 阶 Bessel 函数。对于径向对称的光瞳函数 $P(r, \theta)$ 是方位角 θ 的周期函数,因此 $P(r, \theta)$ 可以展开成如下的 Fourier 级数:

$$P(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(r) e^{jm\theta} \quad (5)$$

应用公式(4)和公式(5),可以将公式(2)积分号内的乘积项 $P(r, \theta) K(r, \theta; \rho, \varphi)$ 表示为:

$$P(r, \theta) K(r, \theta; \rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n C_m(r) J_n(2\pi r \rho) \times \exp\{j[m\theta + n(\varphi - \theta)]\} \quad (6)$$

将公式(6)代入公式(2)可得到:

$$h(\rho, \varphi) = C \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n H_m(\rho) \beta_{nm}(\varphi) \quad (7)$$

式中 $H_m(\rho)$ 和 $\beta_{nm}(\varphi)$ 分别为:

$$H_m(\rho) = \int_0^{\infty} C_m(r) J_m(2\pi r \rho) r dr \quad (8)$$

和

$$\beta_{nm}(\varphi) = e^{jm\varphi} \int_0^{2\pi} e^{j(m-n)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (9)$$

其中公式(8)是 m 阶 Hankel 变换^[7]。由于公式(9)的正交性,所以公式(7)可简化为:

$$h(\rho, \varphi) = 2\pi C \sum_{m=-\infty}^{\infty} j^m e^{jm\varphi} H_m(\rho) \quad (10)$$

对于实际的数值计算, m 取有限值。公式(10)表明:点扩散函数可以用一系列相继阶的 Hankel 变换的和来近似表示,它适用于一般的衍射受限像差的光瞳函数。光瞳函数在极坐标下表示为^[8]:

$$P(r, \theta) = T(r, \theta) \exp[jkW(r, \theta)] = \begin{cases} \exp[jkW(r, \theta)] & \text{光瞳内} \\ 0 & \text{光瞳外} \end{cases} \quad (11)$$

式中 $k=2\pi/\lambda$, k 是波数; $T(r, \theta)$ 是振幅透射函数; $W(r, \theta)$ 是波前像差函数,包括纵向和横向的离焦量。造成像差的因素有多种,如透镜本身造成的波面畸变、镜头内部的不均匀、表面的玷污、传输途中的大气不稳定等因素。在实际问题中遇到的像差的光瞳函数总是满足 $P(r, \theta) = P(r, -\theta)$ ^[9], 即 $P(r, \theta)$ 是 θ 的偶函数,由 Fourier 分析得知,公式(5)中的 Fourier 展开系数满足 $C_m(r) = C_{-m}(r)$, 则公式(5)的 Fourier 级数只由余弦项组成。此外由 Bessel 函数的性质^[6] $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ 可知有 $H_{-m} = (-1)^m H_m(x)$, 这样点扩散函数公式(10)可表示为:

$$h(\rho, \varphi) = 2\pi C H_0(\rho) + 4\pi C \sum_{m=1}^{\infty} j^m \cos(m\varphi) H_m(\rho) \quad (12)$$

可见,由此得到的点扩散函数可以由光瞳函数的 Hankel 变换求得。

2 数值计算及其实例

通常难以从解析上求得公式(8)的 Hankel 变换,必须采取离散数值计算的方法,为此必须首先求

得光瞳函数展开式(5)中的 Fourier 系数 $C_m(r)$,再由公式(8)求得 $H_m(\rho)$,然后由公式(12)求得点扩散函数 $h(\rho, \varphi)$,最后求得像面上点扩散函数的强度分布 $|h(\rho, \varphi)|^2$ 。根据离散快速 Fourier 算法^[5]和 MATLAB 软件中序列或向量元素下标从 1 开始记数的考虑,公式(5)中 Fourier 变换系数 $C_m(r)$ 的离散值可写为^[5,7,9]:

$$\begin{bmatrix} C_{m1} \\ C_{m2} \\ \vdots \\ C_{mN} \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1L} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{N1} & P_{N2} & \cdots & P_{NL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j(m-1)\theta_1} \\ e^{-j(m-1)\theta_2} \\ \vdots \\ e^{-j(m-1)\theta_L} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$(m = 1, 2, \dots, M)$

式中 M 为在进行实际数值计算时所取的前 M 项, $P_{iq} = P(r_i, \theta_q)$, r_i, θ_q 分别为:

$$\begin{cases} r_i = r_0 e^{\alpha(i-1)} & (i = 1, 2, \dots, N) \\ \theta_q = \left(\frac{2\pi}{L}\right)q & (q = 1, 2, \dots, L) \end{cases} \quad (14)$$

式中 N, L 分别为光瞳面径向的离散采样点数和角向采样点数; α 为径向采样间隔; r_0 为光瞳面矢径的初始值。

计算出公式(13)中的 $C_m(r)$ 后便可计算公式(8)中的 $H_m(\rho)$,为此,采用 A. E. Siegman 在 1977 年提出的准快速 Hankel 变换方法来计算。令 $r = r_0 e^{\alpha x}$, $\rho = \rho_0 e^{\alpha y}$, ρ_0 为像平面上矢径方向采样的初始值。这样,公式(8)的 Hankel 变换积分可化为下列形式的互相关积分:

$$\hat{H}_m(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(x) \hat{j}_m(x+y) dx \quad (15)$$

式中 $\hat{f}_m(x) = r C_m(r)$, 其对应的逆变换函数为 $\hat{H}_m = \rho H_m(\rho)$; $\hat{j}_m(x+y) = 2\pi \alpha r \rho J_m(2\pi r \rho)$ 。可以看出,公式(15)是互相关函数,根据互相关定理^[1,7],它可以根据一维快速 Fourier 变换来计算,在实际的数值计算中,计算是针对像平面上一系列的离散采样点逐点进行的,即:

$$\hat{H}_m(y_n) = \text{FFT}^{-1} \{ \text{FFT}[\hat{f}_m(x)] \text{FFT}[\hat{j}_m(x+y_n)] \} \quad (16)$$

式中 y_n 相对应的径向离散值为:

$$\rho_n = \rho_0 \exp[(n-1)\alpha], (n = 1, 2, \dots, N) \quad (17)$$

在对公式(16)进行了 M 次、 N 项的准快速 Hankel

变换之后,得到矩阵 $[H_{mm}]_{M \times N}$,而 $H_{mm} = H_m(\rho_n)$,对于不同方向,设置确定的 φ_0 ,可以得到一系列的 $\cos(m\varphi_0)$ 值,应用公式(12)最终计算出在 n 个采样点上的点扩散函数的强度 $|h_n|^2 = |h(\rho_n, \varphi_0)|^2$,在实际的工程应用中, φ_0 可以根据具体的需要来确定,从而计算出不同方位的点扩散函数的强度分布情况。计算参量 N, r_0, ρ_0 和 α 可根据参考文献[10]的方法来确定。

将上述点扩散函数的一维计算过程在 MATLAB 6.0 软件上进行了编程计算,计算了两种像差的情况,一种是侧向离焦像差,光瞳函数为 $P(r, \theta) = \exp(ikW_{11}r\cos\theta)$ ($W_{11} = 0.5\lambda$);另一种是彗差,光瞳函数为 $P(r, \theta) = \exp[ik(W_{11} + W_{31}r^2 + W_{51}r^4)r\cos\theta]$ ($W_{11} = 0.5\lambda, W_{31} = -3.12\lambda, W_{51} = 2.60\lambda$)。计算中所用的参量是: $N = 128, L = 16, M = 16, r_0 = 0.08, \rho_0 = 1.0, \alpha = 0.0198$ 。图 1 是方位角 $\varphi = 0^\circ$ 时两种像差的点扩散函数的情况,图 2 是 $\varphi = 45^\circ$ 的情况,具体计算时,只需在程序中设置一个 φ_0 值,对应的计算结果便会以图形方式显示出来。由图 1 和图 2 可见,不同

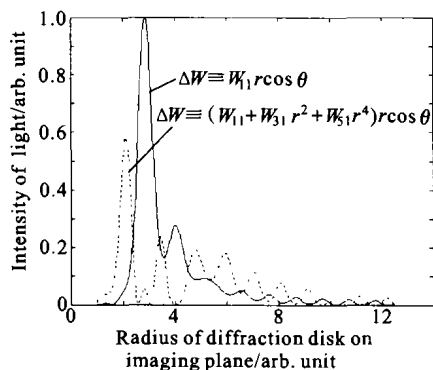


图 1 $\varphi = 0^\circ$ 的点扩散函数

Fig. 1 Point spread function at $\varphi = 0^\circ$

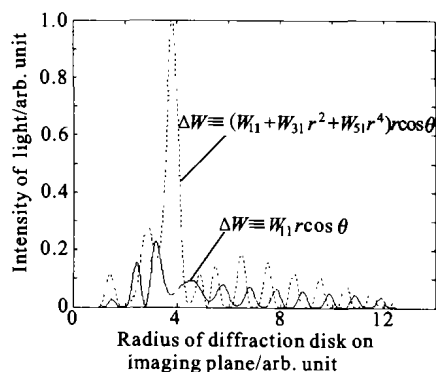


图 2 $\varphi = 45^\circ$ 的点扩散函数

Fig. 2 Point spread function at $\varphi = 45^\circ$

方位的点扩散函数的强度分布差别相当大,在实际的工程应用中,可以根据需求计算任一方位的点扩散函数的强度分布情况,为解决实际问题提供重要的参考依据。

3 结 论

根据 Bessel 函数的性质,将衍射受限光学成像系统的点扩散函数二维 Fourier 变换的计算变换为一维 Fourier 变换和一维 Hankel 变换的数值计算,并用当今流行的科学与工程计算软件对侧向离焦和彗差两种像差进行了实际编程计算,与二维 Fourier 变换数值计算方法相比,一维方法可以获得所需要的任意方位的点扩散函数的强度分布,而二维计算在此方面却有一定的限制。此外,本文的方法也可应用于调制传递函数计算、无线电天线阵列分析、光干涉分析以及光谱分析等领域。计算表明,使用 MATLAB 进行科学和工程计算,程序语言简洁,且大大降低了使用者对数学基础和计算机语言知识的要求。

参考文献:

- [1] 苏显渝,李继猷. 信息光学[M]. 北京:科学出版社,1999. 34-84.
- [2] Barakat R. The calculation of integrals encountered in optical diffraction theory, in The Computer in Optical Research[M]. New York:Springer-Verlag,1980. 35-80.
- [3] 许波,刘征. MatLab 工程数学应用[M]. 北京:清华大学出版社,2000.
- [4] 王未然. MATLAB 6.0 与科学计算[M]. 北京:电子工业出版社,2001.
- [5] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, et al. Numerical recipes in C, the art of scientific computing. 2nd ed. [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [6] 奚定平. 贝塞尔函数[M]. 北京:高等教育出版社;柏林:施普林格,1998. 62-92.
- [7] Jack D Gaskill. Linear systems, Fourier transforms and optics [M]. New York: John Wiley & Sons, 1978.
- [8] Born M, Wolf E. Principles of optics. 7th edition[M]. London: Cambridge University Press, 1999.
- [9] Robert R Shannon, James C Wyant. Applied optics and optical engineering, XI[M]. New York:Academic Press, Inc, 1992.
- [10] Siegman A E. Quasi fast Hankel transform[J]. Optics letters, 1997, 1(1):13-15.