

小波域中的维纳滤波法在星图降噪中的应用

马林立, 孙 尧

(哈尔滨工程大学 自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要:小波阈值降噪法是一种简单而有效的方法,在图像降噪处理中广泛使用。但对于任意信号,在 MSE 意义上的最优信号估计是 Wiener 滤波器,在此基础上提出了一种基于小波域上的经验 Wiener 滤波器的设计方法,并应用在星图降噪中,实验结果表明,此方法比一般小波阈值降噪法的效果好得多。

关键词: 图像降噪; 阈值化; 滤波器

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-2276(2004)01-0055-04

Application of wavelet domain Wiener filtering analysis to noise elimination in star-image denoising

MA Lin-li, SUN Yao

(Automation College, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: Wavelet threshold is simple and available in image procession, but the Wiener filtering is optimal for any space in the sense of MSE. A wavelet domain Wiener filtering is developed. The design and the application in star-image denoising of Wiener filtering are proceeding. The experimental result shows the Wiener filtering is better than the standard wavelet thresholding method.

Keywords: Image denoising; Threshold; Filter

0 引言

图像降噪是一项应用比较广泛的图像处理技术,其目的是提高图像的信噪比,突出图像的期望特征。小波变换在时域和空域上同时具有局部化特性,优于经典的傅里叶变换,所以在信号与图像处理中得到了广泛应用。参考文献[1]提出了一种称为小波阈值的

降噪方法。其理论基础是在小波域上,绝对幅值比较大的小波系数其主要成分是由信号提供的,而绝对幅值比较小的小波系数主要是由噪声造成的,所以可通过设置阈值将小的噪声系数清除。这种阈值降噪方法简单有效,引起了研究人员的很大兴趣。

在已知期望信号和噪声的统计特性下,在 MSE 意义上的最优信号估计是 Wiener 滤波器,但是这两个信号的统计性质一般是未知的,所以在实际应用中

收稿日期:2003-03-05; 修订日期:2003-05-28

作者简介:马林立(1962-),女,山东青岛人,副教授,博士生,研究方向为导航制导与控制、自动天文导航。

一般采用经验 Wiener 滤波器的形式。提出了一种小波域上经验 Wiener 滤波器的设计方法,并应用在星图像降噪中。这种方法的基本思想是使用两个小波变换基,一种小波基在对图像的小波阈值处理过程中,得到期望信号的估计来设计经验 Wiener 滤波器,另一种小波基将观测图像从时域变换到小波域上,并在小波域上用经验 Wiener 滤波器进行图像降噪处理。

1 基于小波变换的阈值化去噪方法

基于小波变换的阈值化去噪方法^[1,2],是利用小波变换中的变尺度特性对确定信号具有一种“集中”的能力,对于大多数信号的能量,在小波变换下可由很小一部分小波系数表示,而噪声却是一致分布的,因此利用一个合适的阈值便可很好地去噪。

给定一个阈值 δ ,所有绝对值小于某个阈值 δ 的小波系数被判为“噪声”,它们的数值用零代替;而超过阈值的小波系数的数值用阈值 δ 缩减后再重新取值,因此也有人将此类方法称为小波缩减法或者缩减函数。这种方法意味着阈值化或者缩减小波变换将在小波域中移去小幅度的噪声或者非期望的信号,在小波的逆变换中,将得到所需要的信号。“软阈值化”和“硬阈值化”是对超过阈值之上的小波系数进行缩减的两种主要方法。对于“软阈值化”,绝对值小于阈值 δ 的小波系数,数值用零代替;绝对值大于阈值 δ 的小波系数,数值用 δ 来缩减。用公式表示为:

$$C_{\delta} = \begin{cases} \text{sgn}(C)(|C| - \delta), & |C| \geq \delta \\ 0, & |C| < \delta \end{cases} \quad (1)$$

式中 C 是小波系数的数值; $\text{sgn}(\cdot)$ 是符号函数,当数值大于零,符号为正,反之符号为负。对于“硬阈值化”,仅保留绝对值大于阈值 δ 的小波系数,并且被保留的小波系数与原始系数相同(未被缩减),用公式表示为:

$$C_{\delta} = \begin{cases} C, & |C| \geq \delta \\ 0, & |C| < \delta \end{cases} \quad (2)$$

两种阈值化方法有所不同,前者具有连续性,从数学上容易处理;后者更接近实际应用。

2 基于小波变换域中的 Wiener 滤波设计^[3-6]

基于小波缩减的去噪声算法可以归结为:观察信号(图像)在小波变换域进行滤波处理。其具体思路为:观测公式 $s = x + n$, 式中 n 为零均值的白色高斯噪声; x 为期望信号; s 为观测值。降噪是将 x 从观测值 s 中恢复出来。

记离散小波变换的变换矩阵为 W , 则对公式(1)进行小波变换得到: $y = \theta + z$, 式中 $y = Ws$; $\theta = Wx$; $z = Wn$ 。

小波缩减过程可看成滤波器 H 作用过程,并且认为滤波器的输出是对原始信号 x 的小波系数 $\hat{\theta}$ 的最好估计,估计值 $\hat{\theta}$ 通过小波逆变换得到原始信号的估计值 \hat{x} , 即信号的恢复。图 1 为小波变换域的滤波过程。

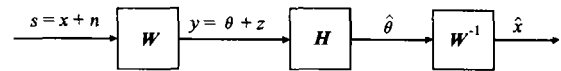


图 1 小波变换域的滤波过程

Fig. 1 The filtering process of wavelet domain

就图 1 来看,从观测信号 x 输入到估计值 \hat{x} 的输出,可以写为 $\hat{x} = W^{-1}HWx$, 同时,小波系数的缩减/保留操作被定义为:在小波变换域上完成一个对角滤波过程,即: $H \triangleq \text{diag}[h(1), h(2), \dots, h(N)]$, 式中 $h(i)$ 是“软阈值化”公式(1)或者“硬阈值化”公式(2)的具体实现。例如,对于“硬阈值化”:

$$h(i) \triangleq \begin{cases} 1, & |y(i)| \geq \delta, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

现在,从维纳滤波器设计角度来说明图 1 的滤波过程。令 x 通过一个线性滤波器 G , 所得到的估计值 $\hat{x} = Gx$ 满足均方误差的期望最小 ($MSE \parallel \hat{x} - x \parallel^2$)。滤波器 G 就是维纳滤波,其定义为:

$$G = R_s(R_s + \sigma^2 I)^{-1} \quad (4)$$

假定 x 的长度为 N , 在公式(4)中, R_s 是 $N \times N$ 矩阵, $R_s = E(xx^T)$; I 是单位矩阵; σ^2 是噪声信号的方差。由公式(4)可知,设计维纳滤波器需要知道信号与噪

声的统计特性。利用线性代数知识,将 R_s 用特征向量($U=[u_1, u_2, \dots, u_M]$)与特征根对角矩阵($\Lambda=diag[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_M]$)表示, M 是 R_s 的秩($M \leq N$), 即:

$$R_s = U\Lambda U^T = \sum_{k=1}^M \lambda_k u_k u_k^T \quad (5)$$

将公式(5)代入公式(4), 得到:

$$G = \sum_{k=1}^M \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \sigma^2} u_k u_k^T = U\tilde{\Lambda}U^T \quad (6)$$

式中 $\tilde{\Lambda} = diag\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \sigma^2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \sigma^2}, \dots, \frac{\lambda_M}{\lambda_M + \sigma^2}\right]$ 。

由此求得对角化的维纳滤波器的系数为:

$$g(i) = \frac{\hat{\chi}^2(i)}{\hat{\chi}^2(i) + \sigma^2}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (7)$$

式中 $\chi(i)$ 是观测值的最好估计值。公式(6)说明: 维纳滤波首先让数据经过 U^T 特征域变换(也称作 K-L 变换); 其次, 对每个系数进行独立的最小均方误差(MSE)、加权优化处理 $\tilde{\Lambda}$; 最后, 由 U 变换将数据转换到原始数据域上。比较小波变换阈值化去噪思路与维纳滤波设计过程, 发现小波缩减是维纳滤波的一个近似特例, 即 $H \approx \Lambda; W \approx U$ 。按图 1 所示, 在小波变换域上设计一个维纳滤波器, 将公式(7)改写为:

$$g(i) = \frac{\hat{\theta}^2(i)}{\hat{\theta}^2(i) + \sigma^2}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (8)$$

式中 $g(i)$ 涉及真实信号 $\theta(i)$ 的估计和噪声的方差 σ^2 估计。在小波变换域, $\theta(i)$ 是小波系数, $\hat{\theta}(i)$ 是真实信号的小波系数估计值。

在硬阈值处理过程中, 对角滤波器 H 为:

$$h(i) = \begin{cases} 1, & i = 1, 2, \dots, N_T \\ 0, & i = N_{T+1} \dots N \end{cases}$$

由公式(8)可知, 为设计小波域上的 Wiener 滤波器, 须从输入数据中估计 $\hat{\theta}^2(i)$ 和 σ^2 。准确估计 $\hat{\theta}^2(i)$ 比较困难, 因为通过小波系数仅可估计出噪声方差 σ^2 。

利用两路小波变换实现一种基于小波变换的维纳滤波器设计, 其结构如图 2 所示。在图 2 中, 针对

小波变换的紧致性和去相关性等特性, 滤波算法将从噪声干扰中恢复真实的信号, 滤波的主要步骤如下:

(1) 用第一路小波变换(W_1) 阈值化去噪, 从 s 信号中, 取得近似的“干净”信号 \hat{x}_1 , 其过程同图 1 一样。

(2) “干净”信号 \hat{x}_1 通过另一路小波变换(W_2) 得到小波变换系数, 即估计值 $\hat{\theta}_{21}$, 通过公式(8)得到维纳滤波器的系数值 $g(i)$; 同时, s 信号经过第二路小波变换, 再通过滤波器 G 进行滤波处理, 重新获得一个新的去噪声的估计值 $\hat{\theta}_2$ 。

(3) 对估计值 $\hat{\theta}_2$ 进行小波逆变换, 实现去噪。

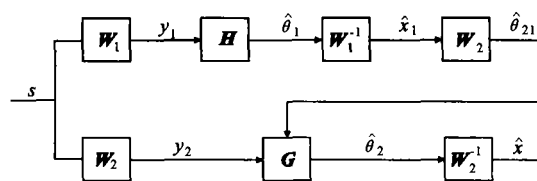


图 2 小波变换域的维纳滤波器设计

Fig. 2 The design of wavelet domain Wiener filter

3 实验与分析

从维纳滤波器公式和硬阈值公式可看出, 在 $\theta^2(i) \gg \sigma^2$ 的情况下, 也就是在小波系数幅度绝对值较大的情况下, Wiener 滤波器权重 $h_\infty(i) \rightarrow 1$, 与硬阈值操作中保留操作比较类似, 而在小波系数幅值绝对值较小的情况下, 小波阈值技术是简单地将小波系数置为零, 这样做的后果是将丢掉这部分小波系数中包含的信号分量, 使重构后的信号损失了一部分信息, 而在 Wiener 滤波器中, 这部分信息则通过一个较小的权值而得到部分保留, 只有在 $\theta^2(i) \ll \sigma^2$ 的情况下, Wiener 滤波器权重 $h_\infty(i) \rightarrow 0$ 才会舍弃掉其中包含的信息。考虑一种特殊情况, 假设通过硬阈值操作已经得到了信号子空间的一个完美估计(即 $N_T = N_S$), 此时两种滤波方式 MSE 指标的比值为:

$$\frac{MSE_H}{MSE_w} = \frac{N_T}{\sum_{i=1}^{N_T} \frac{\hat{\theta}^2(i)}{\hat{\theta}^2(i) + \sigma^2}}$$

从上式可以看出, σ^2 越大, 两者之间的差异越大。所以从理论上说, Wiener 滤波器具有比一般小波阈值技术优越的性能^[7]。

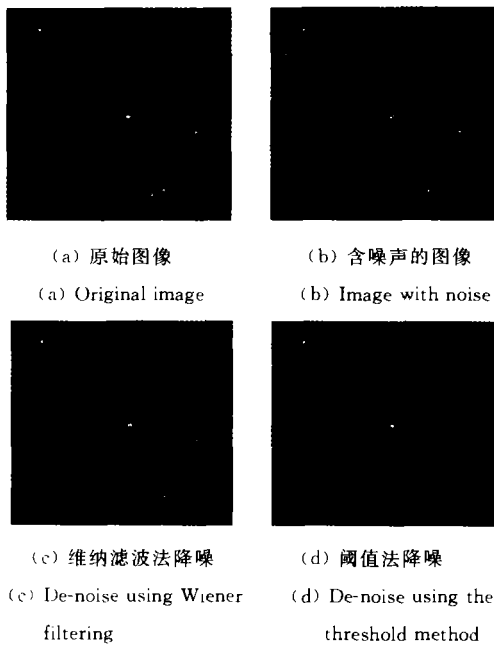


图 3 小波域 Wiener 滤波法对星图降噪处理

Fig. 3 Denoised image using wavelet domain Wiener filtering

将该方法应用到星图的降噪处理中,图 3(a)是原始图,(b)为加噪后的图像,(c)是采用文中提出的维纳滤波法处理后的图像,(d)是采用阈值法处理

(上接第 49 页)

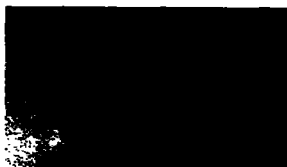


图 6 形态滤波图像

Fig. 6 Morphological filter image



图 7 双门滤波图像

Fig. 7 Double gated filter image

参考文献:

- [1] 朗晓红. 起伏背景下红外目标的检测与跟踪[D]. 长沙:国防科技大学,1995.10-21.
- [2] 杨卫平,沈振康. 起伏背景下的自适应门限检测方法[J]. 红外与毫米波学报,1999,18(2):120-124.
- [3] 陈非,敬忠良,李建勋. 红外序列图像中缓动点目标的投影算法及其改进[J]. 红外与毫米波学报,2003,22(2):96-100.

后的图像,实验结果表明降噪效果明显优于一般的阈值方法。

参考文献:

- [1] Donoho D L. De-noising by soft-thresholding[J]. IEEE Trans on IT, 1995, 41(3): 613-627.
- [2] Jansen M, Bultheel A. Experiments with wavelet based image denoising using generalized cross validation[A]. Image Processing, SPIE Proceedings[C]. 1997, 3034. 206-214.
- [3] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81:425-455.
- [4] Grace Chang, Bin Yu, Martin Vetterli. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression[J]. IEEE Trans on Image Proc, 2000,9:1532-1546.
- [5] 陈武凡. 小波分析及其在图像处理中的应用[M]. 北京:科学出版社,2002.
- [6] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用[M]. 北京:科学出版社,2001.
- [7] 涂丹. 小波域上的图像降噪 Wiener 滤波器设计[J]. 系统工程与电子技术,2001, 23(6): 4-7.

- [4] Alexis P Tzanner, Dana H Brooks. Temporal filters for point target detection in IR imagery[A]. SPIE Infrared Technology and Application XXXIII[C]. 1997, 3061. 508-520.
- [5] New W L, Tan M H, Er M H, et al. New method for detection of dim point-targets in infrared images[A]. SPIE Signal and Data Processing of Small Targets[C]. 1999, 3809. 141-150.
- [6] Morin A. Adaptive spatial filtering techniques for the detection of targets in infrared imaging seekers[A]. SPIE in Acquisition Tracking and Pointing XIV[C]. 2000,4025. 182-193.
- [7] Ronda V, New W L, Tan M H, et al. Adaptive threshold based spatio-temporal filtering techniques for detection of small targets [A]. SPIE Signal and Data Processing of Small Targets[C]. 2000,4048. 58-67.
- [8] Murat Bagci A, Yardimci Yasemin, Enis Cetin A. Small moving object detection using adaptive sub-band decomposition and fractional lower order statistics in video sequences[A]. SPIE Signal and Data Processing of Small Targets[C]. 2001,4473. 25-33.
- [9] 刘忠领. 非线性图像处理及在光电跟踪中的应用[D]. 北京:中国航天科工集团第二研究院,2001. 23-46.