



·惯性约束聚变物理与技术·

基于卡尔曼滤波的双约束 CUP-VISAR 压缩图像重构算法*

余远平¹, 李海艳¹, 甘华权¹, 郑锐涛¹, 黄庆鑫¹,
理玉龙², 关赞洋², 黄运保¹, 景龙飞²

(1. 广东工业大学 机电工程学院, 广州 510006; 2. 中国工程物理研究院 激光聚变研究中心, 四川 绵阳 621900)

摘 要: 针对从基于压缩超快成像 (Compressed Ultrafast Photography, CUP) 的任意反射面速度干涉仪 (Velocity Interferometer System for Any Reflector, VISAR) 中获得的压缩图像中重构出冲击波二维条纹图像的问题, 提出一种基于卡尔曼滤波的双约束图像重构算法。该算法首先基于条纹图像具有的稀疏性和平滑性, 将问题转化为基于小波与全变分双先验约束的优化问题, 然后, 考虑到实际成像的噪声问题, 采用加权卡尔曼滤波对图像已有信息进行预测和调整, 最后将卡尔曼滤波引入二步迭代阈值算法的迭代过程中, 进而求解该双约束优化问题, 实现压缩图像的精确重构。在大噪声仿真实验中, 该算法重构图像的峰值信噪比和结构相似度分别提高了 4.8 dB 和 14.81%, 显著提高了图像重构质量。在实际实验中, 该算法重构出了清晰的冲击波条纹图像, 且将冲击波速度最大相对误差降低了 9.57% 和平均相对误差降低了 2.2%, 验证了该算法的可行性。

关键词: 压缩超快成像; 任意反射面速度干涉仪; 图像重构; 加权卡尔曼滤波; 二步迭代阈值算法

中图分类号: TP391

文献标志码: A

doi: 10.11884/HPLPB202335.230100

Double-constrained CUP-VISAR compressed image reconstruction algorithm based on Kalman filtering

Yu Yuanping¹, Li Haiyan¹, Gan Huaquan¹, Zheng Kaitao¹, Huang Qingxin¹,
Li Yulong², Guan Zanyang², Huang Yunbao¹, Jing Longfei²

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China;

2. Laser Fusion Research Center, CAEP, Mianyang 621900, China)

Abstract: A dual-constrained image reconstruction algorithm based on Kalman filtering is proposed to solve the problem of reconstructing the two-dimensional shock wave fringe image from the compressed image obtained by the Velocity Interferometer System for Any Reflector (VISAR) based on Compressed Ultrafast Photography (CUP). Based on the sparsity and smoothness of fringed images, the algorithm firstly transforms the problem into an optimization problem based on wavelet and total variational double prior constraints, and then, considering the noise of actual imaging, the weighted Kalman filter is used to predict and adjust the existing information of the image, and finally the Kalman filter is introduced into the iterative process of the two-step iterative threshold algorithm, and then the double-constraint optimization problem is solved to realize the accurate reconstruction of the compressed image. In the large-noise simulation experiment, the peak signal-to-noise ratio and structural similarity of the reconstructed images of the algorithm are increased by 4.8 dB and 14.81%, respectively, which significantly improves the image reconstruction quality. In actual experiments, the algorithm reconstructs a clear shock wave fringe image and reduces the maximum relative error of shock wave velocity by 9.57% and the average relative error of shock wave velocity by 2.2%, which verifies the feasibility of the algorithm.

Key words: compressed ultrafast photography, velocity interferometer system for any reflector, image reconstruction, weighted Kalman filter, two-step iterative threshold algorithm

* 收稿日期: 2023-04-23; 修订日期: 2023-06-17

基金项目: 国家自然科学基金项目 (12127810, 51975125, 12105269)

联系方式: 余远平, 1762799572@qq.com。

通信作者: 李海艳, cathylhy@gdut.edu.cn。

惯性约束聚变^[1](Inertial Confinement Fusion, ICF)是实现可控核聚变的重要方法之一^[2-3]。在 ICF 研究中,任意反射面速度干涉仪^[4-5](Velocity Interferometer System For Any Reflector, VISAR)是该领域最常用的诊断仪器之一,被广泛应用于记录波前信息。其中,线-VISAR 通过不完全打开条纹相机的狭缝,将成像局限在一条线上,从而实现波前一维连续信息的获取。但当完全打开条纹相机的狭缝时,不同时间的条纹图像会沿时间方向相互重叠而导致信息无法解读^[6]。

近年来,基于压缩感知^[7]的压缩超快摄影^[8](Compressed Ultrafast Photography, CUP)技术得到快速发展,其通过完全打开条纹相机的狭缝,实现了时间分辨可达到 2 ps、成像幅数可达到 10^{11} 幅/s 的二维超快成像,并将多张叠加混合的图像分离重构出来,为解决这一问题提供了新的思路。2020 年, Yang 等人^[9]将 CUP 应用到 VISAR 中(CUP-VISAR)获取二维压缩条纹图像,并通过算法对其进行重构,从而实现波前二维连续信息的获取。2021 年, Guan 等人^[6]对 CUP-VISAR 系统设备诊断时间窗口的长度进行研究,促进该系统的发展。但该领域主流重构算法都是基于全变分(total variation, TV)正则化的二步迭代收缩/阈值(Two-step Iterative Shrinkage/Thresholding, TwIST)算法^[6,9],其并没有充分考虑到条纹图像的自身特性以及图像采集过程的噪声对图像重构影响。

因此,本文针对 CUP-VISAR 压缩图像重构问题,提出了一种基于卡尔曼滤波的双先验约束的优化算法。该算法首先基于冲击波二维条纹自身具有的稀疏性和平滑性,构建了小波变换下的 L1 正则化和 TV 正则化的双先验约束优化模型;然后考虑到实际仪器中采集二维条纹图像时会受到噪声干扰,所以提出一种充分利用周围像素信息的加权卡尔曼滤波,根据图像已有的信息进行预测和调整,得到更加准确的图像像素值,降低噪声信息对图像重构的干扰;最后在 TwIST 的框架下,将加权卡尔曼滤波引入迭代过程,利用前两步的迭代结果计算当前值,逐步缩小解空间来寻求最优解,从而实现双约束优化问题的求解。

1 CUP-VISAR 重建原理

CUP-VISAR 系统^[8]由 VISAR 系统和 CUP 系统组成,如图 1 所示。在靶点进行数据采集后, VISAR 系统将其转化为二维条纹图像,并通过由管透镜和显微镜物镜组成的 4F 成像系统到达数字微镜装置(digital micromirror device, DMD)进行编码。编码后的图像通过 4F 成像系统和电子束分裂器到达条纹相机,由条纹相机对不同时刻的编码图像进行偏移以完成时间上的剪切。最后,偏移后的编码图像在条纹相机外置的电荷耦合器件(charge-coupled device, CCD)上叠加,生成冲击波二维观测条纹图像。

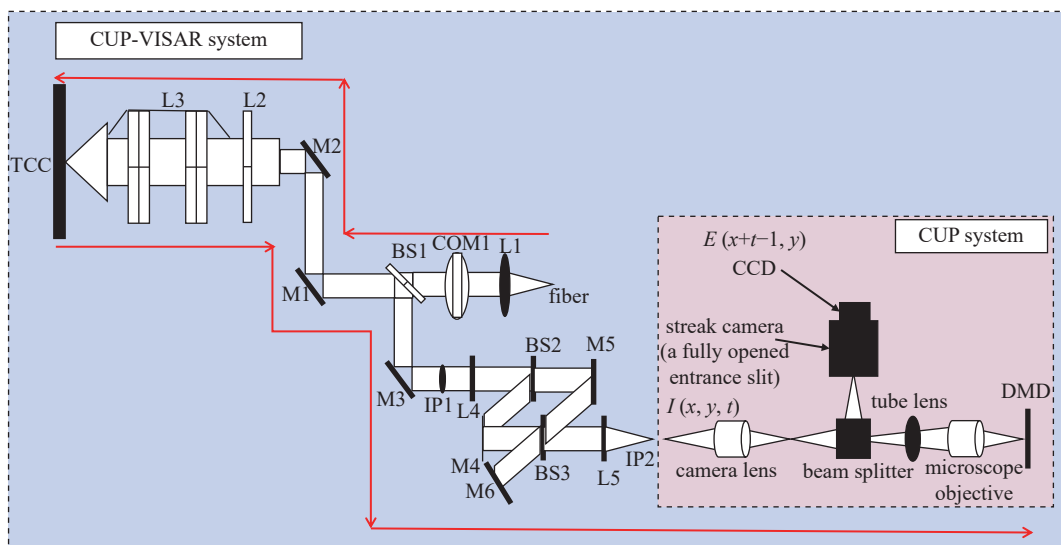


Fig. 1 CUP-VISAR system

图 1 CUP-VISAR 系统

该过程用数学公式^[6,9]可以表示为

$$E(x+t-1, y) = AI(x, y, t) \quad (1)$$

式中: E 是二维观测图像, $I(x, y, t)$ 是 t 张干涉条纹图像, $A(A = TSC)$ 为线性观测矩阵算子, T 是时空积分算子, S 是时间剪切速度算子, C 是与 DMD 图案对应的空间编码算子。

所以 CUP-VISAR 系统中的图像重建就是对式(1)进行逆问题求解,在已知线性观测矩阵算子 A 和二维观测图像 E 重建出原干涉条纹图像 I 。因为二维观测图像 E 所含的数据量远远小于原干涉条纹图像 I 所含的数据量,不能直接求解,所以该重建过程属于欠定问题^[10],通常采用增加待求状态量 I 的先验约束进行求解。

2 重构算法

2.1 小波-TV 先验约束

条纹图像在空间结构上具有相似性,因此,本文采用多层离散小波变换^[11]将图像分解成不同尺度和方向的频率分量,使其在小波域下呈现出稀疏性。其中,低频分量包含图像的主要信息和结构特征,决定着图像的主要结构^[12]。本文通过只选取小波低频分量来保留图像关键信息,以减少噪声和冗余信息的影响。另一方面,条纹图像自身具有平滑性,TV 正则化^[13-14]能通过最小化图像中相邻像素之间的差异来实现平滑效果,既能保持图像边界的锐度,又能对分片区域进行平滑处理。基于这些特点,本文提出了一种基于小波-TV 双先验约束的优化模型,在保证图像的平滑性的同时更好地保留图像关键信息。

本文将对式(1)的逆问题求解转化为求解小波-TV 双先验约束的问题

$$\min_I \lambda_1 \Phi_{TV}(I) + \lambda_2 \Phi_W(I), \quad s.t. \|E - AI\|_2 \leq \varepsilon \quad (2)$$

通过拉格朗日乘子法将式(2)转化为目标函数 f 的无约束优化问题^[15]

$$f = \operatorname{argmin} \{0.5\|E - AI\|_2^2 + \lambda_1 \Phi_{TV}(I) + \lambda_2 \Phi_W(I)\} \quad (3)$$

式中: $0.5\|E - AI\|_2^2$ 为数据保真项, $\Phi_{TV}(\cdot)$ 为 TV 正则项函数, $\Phi_W(\cdot)$ 为小波变换下的 l_1 范数, λ_1 和 λ_2 为正则项参数, ε 为误差值。

2.2 卡尔曼滤波

在实际图像采集过程中,存在大量的噪声干扰,导致采集的图像都是含噪声的,从而影响图像的重构效果。因此,本文在上述约束问题中引入卡尔曼 (Kalman) 滤波^[16]降低重构过程中噪声的干扰。其原理是通过以图像 I 中的 $I(i-1, j)$ 像素点为准,对 (i, j) 位置的状态值进行状态估计,得到预测值 X ,同时利用图像中的 $I(i, j)$ 像素值对预测值 X 进行修正,得到 (i, j) 位置更加准确的像素值 $I'(i, j)$,从而达到去噪的目的。

滤波计算方程

$$\begin{cases} X = \alpha I(i-1, j) \\ I'(i, j) = X + K(I(i, j) - \mu X) \end{cases} \quad (4)$$

增益计算方程

$$\begin{cases} P' = \alpha P \alpha^T + Q \\ K = P' \mu^T (\mu P' \mu^T + R)^{-1} \\ P = (1 - K \mu) P' \end{cases} \quad (5)$$

式中: α 为转移矩阵, μ 为观测矩阵, K 为卡尔曼增益, P 为预测协方差, Q 为状态转移方差, R 为观测方差。

本文提出一种充分利用周围像素信息的加权卡尔曼滤波图像去噪算法,从四个方向(左、右、上、下)上分别进行卡尔曼滤波,提升去噪效果。在每次滤波时,取图像矩阵的行或列作为输入值,进行左-行滤波(从左往右)、右-行滤波(从右往左)或上-列滤波(从上往下)、下-列滤波(从下往上),然后进行迭代运算。最终将四次滤波结果以 25% 的加权形式相加,得到去噪后的图像,如图 2 所示。

2.3 算法流程

本文采用的 TwIST 算法^[17]作为求解框架,将卡尔曼滤波加入迭代过程中,对式(3)进行迭代求解,利用前两步的迭代值计算当前值,逐步缩小解空间来寻求最优解,从而实现双约束问题的求解。过程如下

$$I^1 = \Gamma(I^0) \quad (6)$$

$$I^N = (1 - \alpha)I^{N-2} + (\alpha - \beta)I^{N-1} + \beta\Gamma(I^{N-1}) \quad (7)$$

式中: I^0 为输入的初值, I^1 为第一次估计的值, $\Gamma(\cdot)$ 为去噪函数, N 代表第 N ($N \geq 2$) 次迭代, α 和 β 两个参数共同决定算法的收敛速度,它们的值由下面的式子得到,即

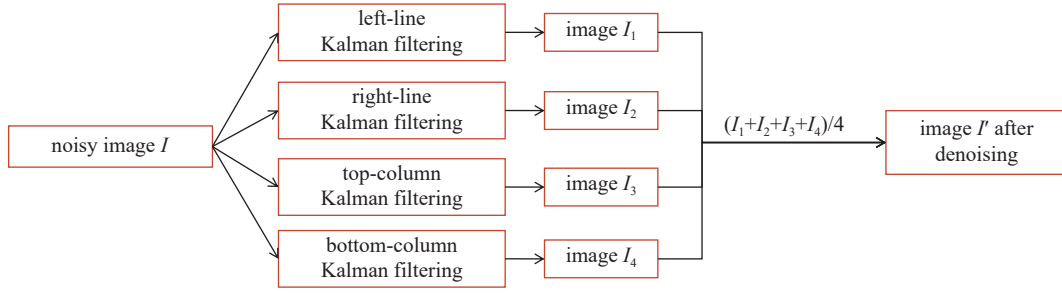


Fig. 2 Weighted Kalman filter principle diagram

图 2 加权卡尔曼滤波原理图

$$\begin{cases} \alpha = 1 + \rho^2 \\ \beta = \frac{2\alpha}{\lambda_1 + \lambda_n} \end{cases} \quad (8)$$

式中: $\rho = (1 - \sqrt{\lambda_1 - \lambda_n}) / (1 - \sqrt{\lambda_1 + \lambda_n})$, $\lambda_1 = 10^{-4}$, $\lambda_n = 1$ 。

$$\Gamma(I) = \Psi_{\text{WTV-KM}}(I + A^T(E - AI)) \quad (9)$$

式中: $\Psi_{\text{WTV-KM}}(\cdot)$ 表示小波-TV与卡尔曼滤波结合的去噪算子。

去噪算法流程如图 3 所示。具体去噪步骤如下:

- ①将原始图像 I 进行多层离散小波分解, 仅选取并保留其低频小波系数 LL;
- ②对保留的低频小波系数 LL 进行加权卡尔曼滤波, 得到滤波后的图像 LL1;
- ③将滤波后的图像 LL1 扩展成原始图像 I 的尺寸, 矩阵的其他元素置为 0;
- ④对扩展后的图像进行多层离散小波重构, 得到重构后的图像 I_1 ;
- ⑤对重构后的图像 I_1 进行 TV 去噪, 得到最终去噪后的图像 I_2 。

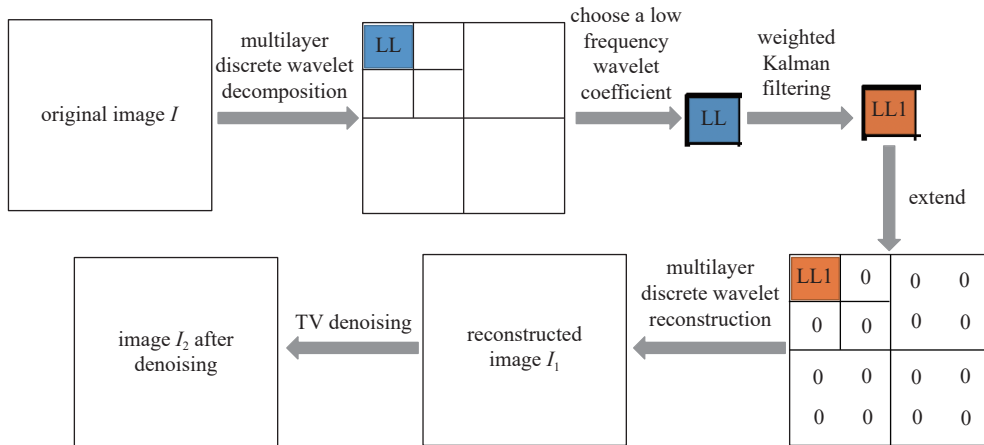


Fig. 3 Denoising flowchart

图 3 去噪流程图

算法迭代的终止条件

$$Q(I^{N-1}, I^N) = \frac{|f(I^N) - f(I^{N-1})|}{f(I^{N-1})} \quad (10)$$

综合以上数学求解模型, 对于式(3)的最小化求解算法如算法一所示。

算法一 本文 CUP-VISAR 压缩图像重构算法

输入: 观测图像 E 、观测矩阵 A 。

输出: 重建图像 I^N 。

- ①初始化矩阵 $I^0 = \{0\}_{N \times N \times N}$, 给定正则化参数 ξ 、最大误差值 δ 、最大迭代次数 N_{\max} 。
- ②根据式(6)计算第一次估计值 I^1 , 令 $N = 1$ 。
- ③更新迭代次数 $N = N + 1$, 根据式(7)计算第 N 次估计值 I^N 。

- ④根据式(3)和式(10)计算 f^N 和 Q^N 。
 ⑤如果满足停止条件 $Q^N \leq \delta$ 或者 $N > N_{\max}$,则继续执行;否则跳转到步骤③。
 ⑥得到重建图像 I^N 。

3 仿真实验与分析

本文针对高噪声下的仿真数据进行实验,以贴近实际实验情况。为验证算法一的合理性和优越性,我们选择了 TV-TwIST 作为对照组,并采用结构相似度 (Structural Similarity, SSIM) 和峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) 作为评价指标^[18-19]来评定上述算法的重构能力。

3.1 参数设置

本文选取具有正交性和紧支撑性的 9/7 双正交小波基^[20],且图像离散小波变换的次数为 3 次,正则化参数 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.008$,最大迭代次数 $N_{\max} = 200$,误差值 $\delta = 10^{-6}$ 。

3.2 实验数据获取

首先,本文基于线-VISAR 系统测量到的冲击波速度数据生成线-VISAR 图,该图在空间上包含 3 个条纹周期,在时间 t 上包含 50 个时间点,如图 4(a)所示。将线-VISAR 图像在每个时间点的数据沿着 y 方向复制 330 次,得到 50 张大小为 $330(y) \times 790(x)$ 的 2D-VISAR 条纹图像数据^[9],如图 4(b)所示。

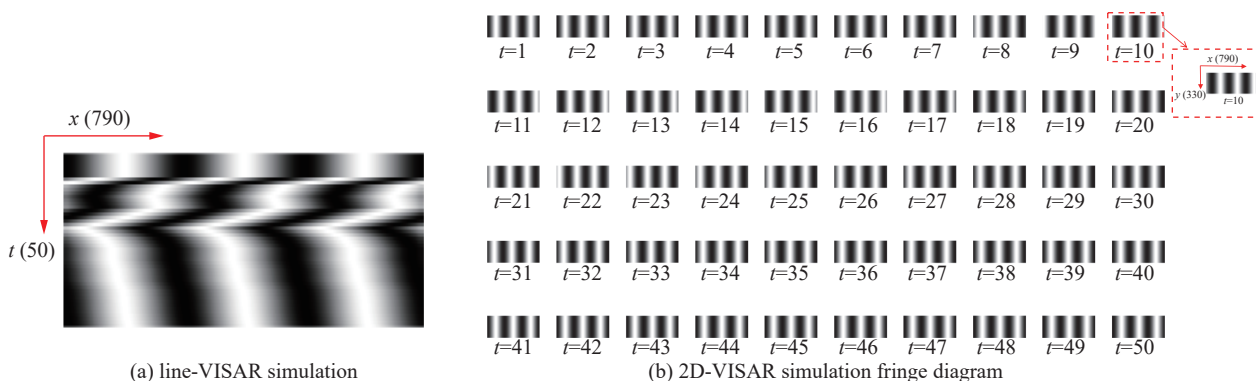


Fig. 4 Simulated fringes

图 4 仿真条纹图

然后,考虑到实际数据采集通常会受到噪声的干扰,得到的原始干涉条纹图像往往含有噪声,会影响冲击波速度测量的准确性。因此,本文在仿真条纹图像中引入了均值为 0,方差为 0.5 的高斯噪声,以模拟实际图像采集的情况,从而增强仿真实验的说服力,如图 5 所示。

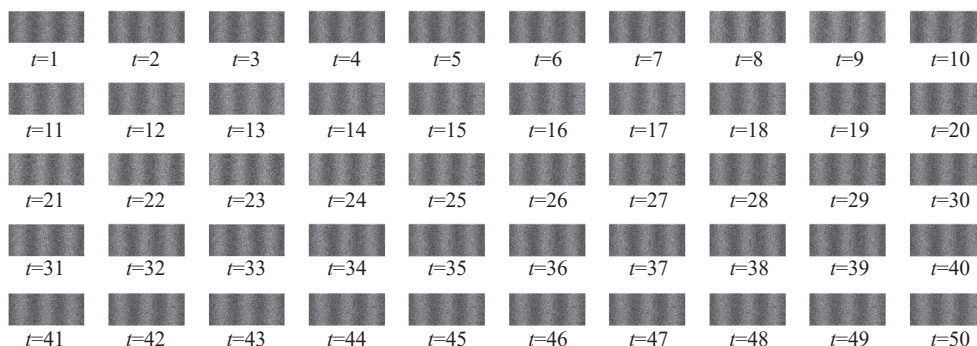


Fig. 5 Simulated 2D-VISAR stripes with noise

图 5 含噪的仿真 2D-VISAR 条纹图

最后,结合设备的实际情况,以 8×8 孔径大小、0.5 采样率所生成的随机矩阵作为模拟编码,如图 6 所示。然后将含噪的仿真 2D-VISAR 条纹图像通过编码、剪切、叠加得到含噪的仿真 CUP-VISAR 观测图像 $E(x+t-1, y)$,其大小为 379×790 ,如图 7 所示。

3.3 实验结果与分析

用 TV-TwIST 算法和算法一分别对模拟实验 CUP-VISAR 观测图像进行重构,结果如图 8 所示。对比上述两种



Fig. 6 Simulated coded image

图 6 模拟编码图像

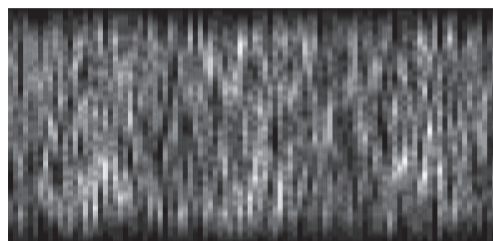
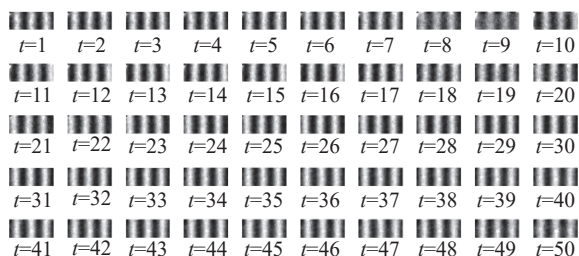
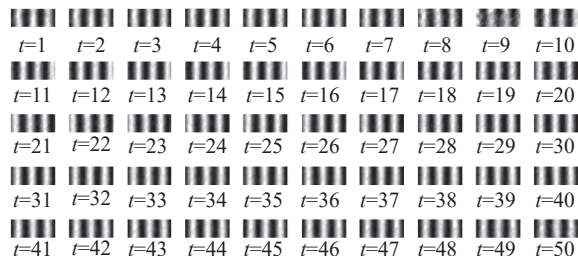


Fig. 7 Simulated CUP-VISAR observation images with noise

图 7 含噪的仿真 CUP-VISAR 观测图像



(a) TV-TwIST algorithm

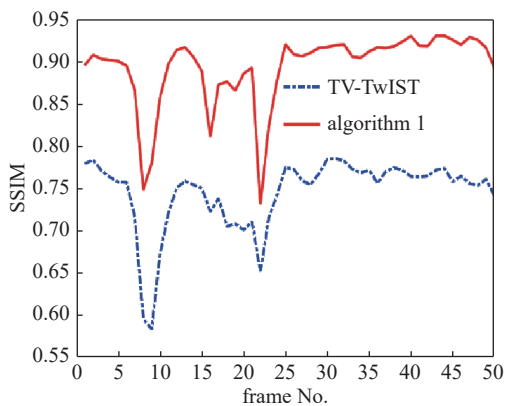


(b) algorithm 1

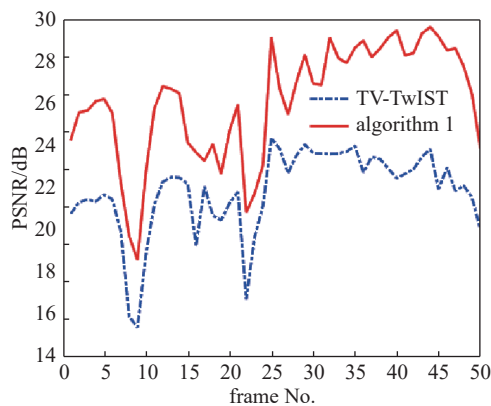
Fig. 8 Reconstruction results of different algorithms

图 8 不同算法的重构结果图

算法,从主观视觉上,两种算法都能够重构出图像,但算法一重构的图像整体较为光滑,视觉效果清晰,重构效果更优。为了更加直观地评定重构图像的质量,本文绘制重构图像的 PSNR 和 SSIM 曲线图,如图 9 所示。TV-TwIST 算法重构图像的 SSIM 为 58.3%~78.5%, PSNR 为 13.59~23.65 dB。算法一重构图像的 SSIM 为 73.1%~93.0%, PSNR 为 17.17~28.55 dB。与 TV-TwIST 算法相比,算法一的平均 PSNR 和平均 SSIM 分别提高了 14.81% 和 4.80 dB,显著提高了重构图像的结构相似度和峰值信噪比,获得更高的图像重构质量。



(a) SSIM curve



(b) PSNR curve

Fig. 9 PSNR and SSIM curves of reconstructed images

图 9 重构图像的 PSNR 和 SSIM 曲线图

4 实验与分析

为了验证算法一在实际情况下的可行性,本文在仿真实验的基础上开展实际实验,进行实际冲击波数据采集和重构分析。

4.1 实验设置及相关参数

实际实验光路排布如图 10 所示,在 CUP-VISAR 系统中额外添加了外接设备(如红色虚线方框所示),并通过不完全打开外接设备中条纹相机狭缝(约 100 μm)记录线-VISAR 图像,将其作为重构的二维冲击波条纹图像速度误差的参考数据。

在实际实验中的部分观测数据如图 11 所示,(a)为尺寸 330 \times 790、DMD 编码孔径 8 \times 8 的编码掩模图像,(b)为外接设备中条纹相机的狭缝不完全打开记录得到线-VISAR 图像,(c)为 CUP 系统中条纹相机的狭缝完全打开记

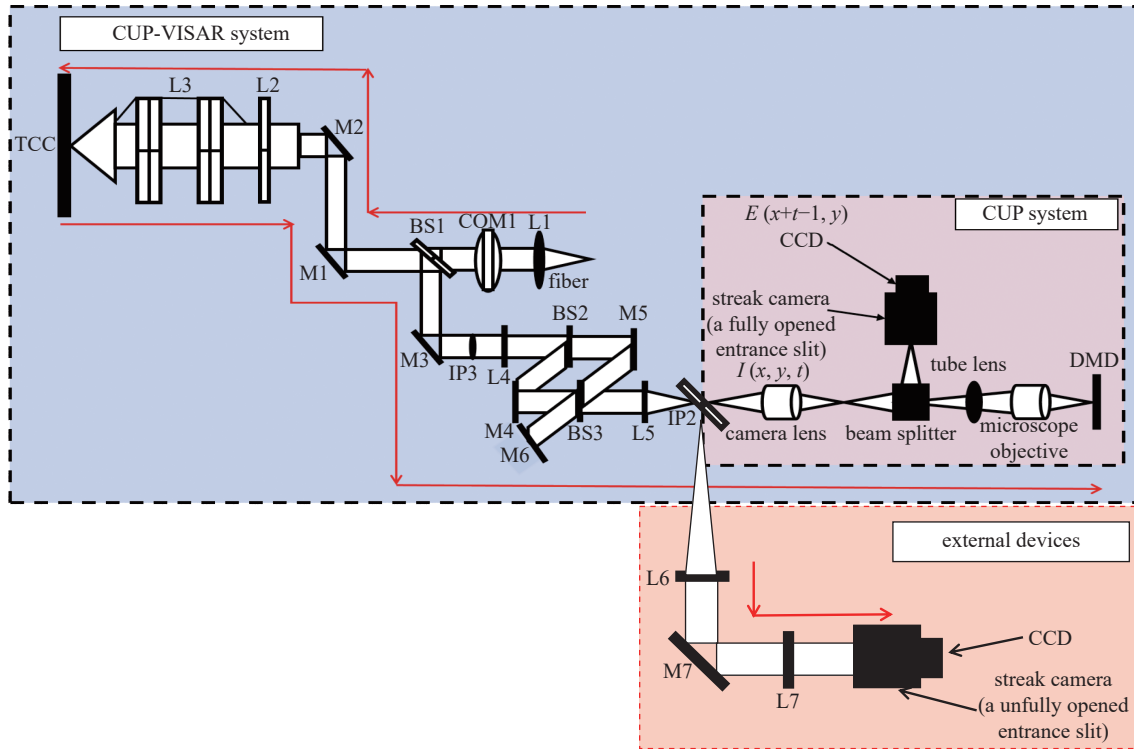


Fig. 10 Diagram of actual experimental optical path

图 10 实际实验光路图

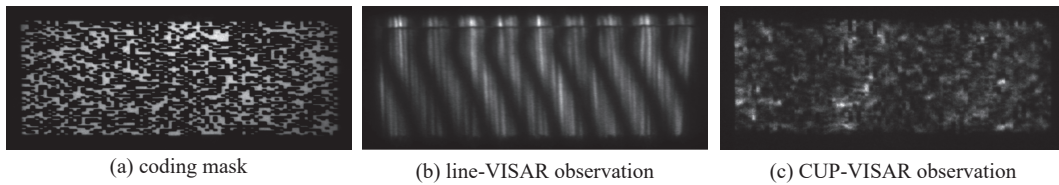


Fig. 11 Actual experimental observation data

图 11 实际实验观测数据

录得到尺寸为 330×790 的 CUP-VISAR 观测图像, 由条纹相机的扫描速度档为 200 ns , 探针光长度为 5 ns , 可知压缩帧数为 25。

4.2 实验结果与分析

用 TV-TwIST 算法与算法一分别对实际实验 CUP-VISAR 观测图像进行重构, 结果如图 12 所示。对比两组实验, TV-TwIST 重构图像边界轮廓模糊, 且第 13~25 帧呈云状效果难以观测到条纹轮廓细节和移动效果; 算法一重构图像形状整体更加清晰, 在第 13~25 帧虽存在略微发散, 但轮廓仍清晰可见, 可以清楚地观测条纹的移动规律, 视觉效果更好。

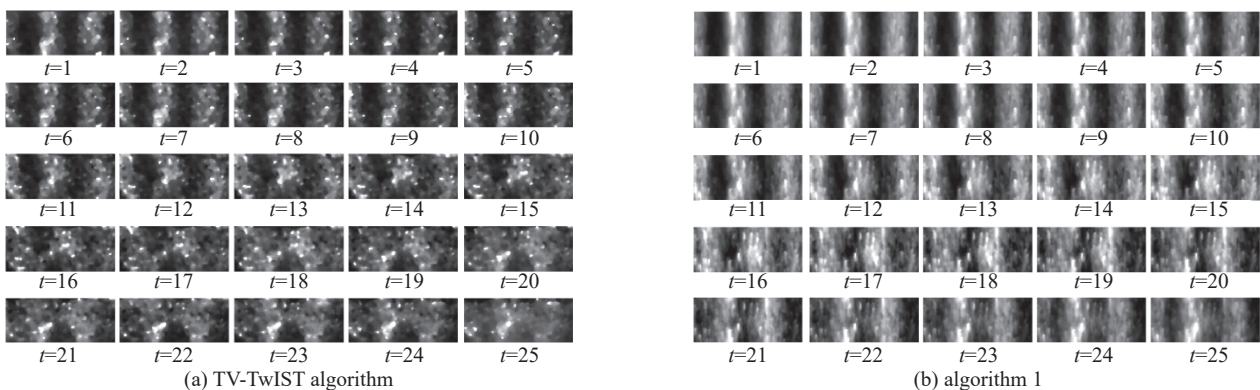


Fig. 12 Reconstruction results of different algorithms

图 12 不同算法的重构结果图

为了进一步验证算法一的可行性,本文对重构图像进行了处理,从中提取中间行,并按照时间顺序排列成线-VISAR 图像,如图 13 所示。然后我们从图 11(b)、图 13(a)和图 13(b)的线-VISAR 图像中提取冲击波速度,并将其绘制在图 14 中。将图 11(b)的线-VISAR 图像中提取的冲击波速度作为参考,计算两种方法重构图像的冲击波速度相对误差,用紫色虚线和黄色实线表示在图 14 中。结果显示,TV-TwIST 算法的最大相对误差为 20.38%,而算法一的最大相对误差为 10.81%,降低了 9.57%。TV-TwIST 算法的平均相对误差为 8.65%,而算法一的平均相对误差为 6.45%,降低了 2.2%。由此表明,算法一重构出了更加清晰的冲击波条纹图像,并有效提高了冲击波速度重构的准确度,具有实际应用价值。

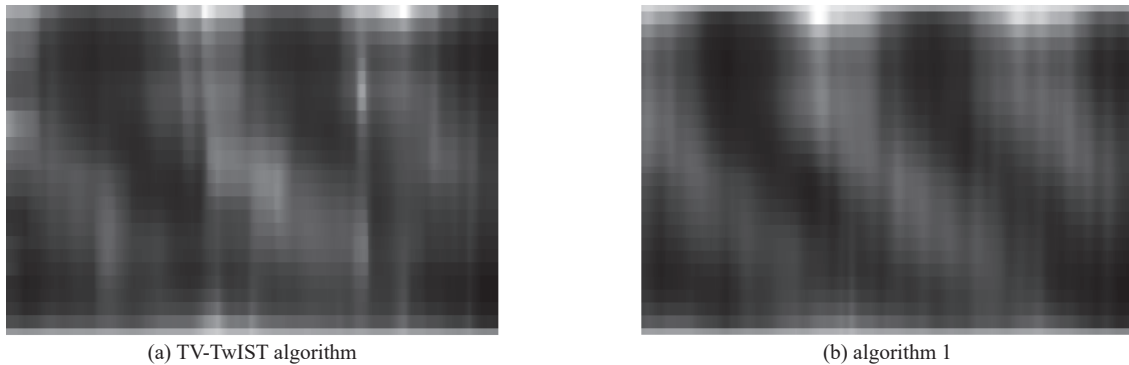


Fig. 13 Line-VISAR diagram obtained from the reconstructed image

图 13 从重构图像得到的线-VISAR 图

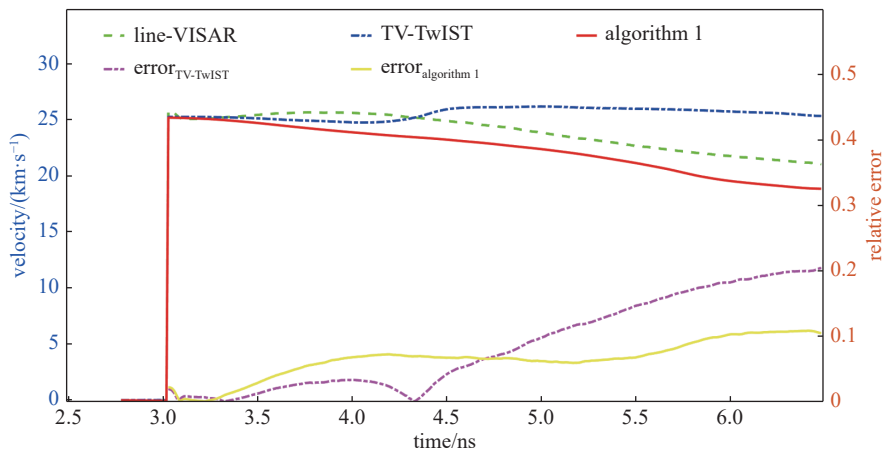


Fig. 14 Shock wave velocity and relative error

图 14 冲击波速度曲线及相对误差图

5 结 论

本文研究了条纹图像的特点,结合其在时域下的平滑性和小波域下的稀疏性,并针对 CUP-VISAR 系统实际图像采集过程中存在的噪声干扰问题,提出了一种基于加权卡尔曼滤波的小波-TV 双约束图像重构算法。本文通过仿真实验和实际实验验证了该算法的性能,并与目前主流算法进行了比较。结果表明,本文算法在高噪声仿真实验中重构图像的平均结构相似度和平均峰值信噪比分别提高了 14.81% 和 4.80 dB,并在实际实验中重构出了更加清晰的冲击波条纹图像,将冲击波速度最大相对误差降低了 9.57%、平均相对误差降低了 2.2%。因此,本文算法能从 CUP-VISAR 压缩图像中重构出更精确的冲击波条纹图像,具有理论意义和实际应用价值。由于实际图像的采集更加复杂,存在多种噪声干扰,后续工作可针对采集过程的噪声类型进行针对性的噪声去除,并根据条纹图像的特性添加更多的先验约束,提高算法的重构精度。

参考文献:

- [1] Celliers P M, Erskine D J, Sorce C M, et al. A high-resolution two-dimensional imaging velocimeter[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2010, 81: 035101.
- [2] 王峰, 关赞洋, 理玉龙, 等. 基于神光Ⅲ装置的光学诊断系统介绍[J]. *中国科学:物理学 力学 天文学*, 2018, 48: 065205. (Wang Feng, Guan Zanyang, Li Yulong, et al. Optical diagnostic systems based on Shenguang III [J]. *Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomica*, 2018, 48: 065205)

- [3] 吴宇际. 激光聚变中广角冲击波速度诊断方法及相关VISAR技术研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2019. (Wu Yuji. Wide-angle shock wave velocity diagnostic method and related VISAR technology in laser fusion[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2019)
- [4] 王巧巧. 大国重器——激光惯性约束聚变[J]. 现代物理知识, 2019, 31(3): 41-49. (Wang Qiaoqiao. The pillars of a great power—laser inertial constraint fusion[J]. Modern Physics, 2019, 31(3): 41-49)
- [5] 王强强. 飞秒时间分辨条纹相机的理论和实验研究[D]. 北京: 中国科学院西安光学精密机械研究所, 2014. (Wang Qiangqiang. Theoretical and experimental research on femtosecond temporal resolution streak camera[D]. Beijing: Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 2014.)
- [6] Guan Zanyang, Li Yulong, Wang Feng, et al. Study on the length of diagnostic time window of CUP-VISAR[J]. *Measurement Science and Technology*, 2021, 32: 125208.
- [7] Donoho D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [8] Gao Liang, Liang Jinyang, Li Chiye, et al. Single-shot compressed ultrafast photography at one hundred billion frames per second[J]. *Nature*, 2014, 516(7529): 74-77.
- [9] Yang Yongmei, Li Yulong, Guan Zanyang, et al. A diagnostic system toward high-resolution measurement of wavefront profile[J]. *Optics Communications*, 2020, 456: 124554.
- [10] Madych W R. Solutions of underdetermined systems of linear equations[R]. Shaker Heights: Institute of Mathematical Statistics, 1991: 227-238.
- [11] Qureshi M A, Deriche M. A new wavelet based efficient image compression algorithm using compressive sensing[J]. *Multimedia Tools and Applications*, 2016, 75(12): 6737-6754.
- [12] Pandey A K, Chaudhary J, Sharma A, et al. Optimum value of scale and threshold for compression of ^{99m}Tc-MDP bone scan images using *Haar* wavelet transform[J]. *Indian Journal of Nuclear Medicine*, 2022, 37(2): 154-161.
- [13] 查志远. 自适应范数约束图像正则化重建研究[D]. 昆明: 昆明理工大学, 2015. (Zha Zhiyuan. Research on image regularization reconstruction with adaptive norm constraints[D]. Kunming: Kunming University of Science and Technology, 2015)
- [14] Mahdaoui A E, Ouahabi A, Moulay M S. Image denoising using a compressive sensing approach based on regularization constraints[J]. *Sensors*, 2022, 22: 2199.
- [15] Afonso M V, Bioucas-Dias J M, Figueiredo M A T. An augmented Lagrangian approach to the constrained optimization formulation of imaging inverse problems[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011, 20(3): 681-695.
- [16] 张琦, 张慧, 潘健, 等. 一种新的卡尔曼滤波图像复原算法[J]. 湖北工业大学学报, 2022, 37(5): 23-27. (Zhang Qi, Zhang Hui, Pan Jian, et al. A new Kalman filter image restoration algorithm[J]. Journal of Hubei University of Technology, 2022, 37(5): 23-27)
- [17] Bioucas-Dias J M, Figueiredo M A T. A new TwIST: two-step iterative shrinkage/thresholding algorithms for image restoration[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(12): 2992-3004.
- [18] Sara U, Akter M, Uddin M S. Image quality assessment through FSIM, SSIM, MSE and PSNR—a comparative study[J]. *Journal of Computer and Communications*, 2019, 7(3): 8-18.
- [19] 朱里, 李乔亮, 张婷, 等. 基于结构相似性的图像质量评价方法[J]. 光电工程, 2007, 34(11): 108-113. (Zhu Li, Li Qiaoliang, Zhang Ting, et al. Metric of image quality based on structural similarity[J]. Opto-Electronic Engineering, 2007, 34(11): 108-113)
- [20] 孙雪. 基于提升算法的9/7整数小波变换的研究及硬件实现[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013. (Sun Xue. Design and implementation of 9/7 wavelet transform based lifting scheme[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2013)