



基于神经网络的消色差旋转双棱镜反向解算*

罗昊鑫^{1,2}, 姚宇翔², 潘文武¹, 游安清²

(1. 中国工程物理研究院 应用电子学研究所, 四川 绵阳 621900; 2. 中国工程物理研究院 研究生院, 四川 绵阳 621999)

摘 要: 为了实现基于双棱镜的光电跟踪平台, 需要根据光束指向精确求解两棱镜转角。基于非近轴光线追迹法与二步法, 利用神经网络拟合了消色差旋转双棱镜角度差值与偏转角之间的关系, 并在求解方位角与消色差旋转双棱镜两组棱镜转角的时候, 将其中的非线性关系与线性关系分开, 利用神经网络对其中的非线性关系进行了拟合, 最终得到了消色差旋转双棱镜转角与出射光束指向的数值关系。实验表明, 在仅用 3 层神经网络共 20 个神经元的条件下, 得到了两棱镜旋转角度反向解算值达到了 0.0001° 量级。

关键词: 旋转双棱镜; 反向解析解; 消色差; 光束指向; 非近轴光线追迹

中图分类号: O439

文献标志码: A

doi: 10.11884/HPLPB202335.220332

Inverse calculation of achromatic Risley prism based on neural network

Luo Haoxin^{1,2}, Yao Yuxiang², Pan Wenwu¹, You Anqing²

(1. Institute of Applied Electronics, CAEP, Mianyang 621900, China;

2. Graduate School of China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621999, China)

Abstract: To achieve an optoelectronic tracking platform based on biprisms, it is necessary to accurately calculate the angle of the Risley prisms based on the beam direction. This article uses non-paraxial ray tracing method and two-step method to fit the relationship between the angle difference and deflection angle of achromatic rotating biprism using the Neural Network. In solving the azimuth angle and the angle of achromatic rotating biprism, we separate the nonlinear relationship from the linear relationship, which is also fitted by using neural network. Finally, the mapping relationship between the angle of achromatic rotating biprism and the direction of the outgoing beam is obtained. The experiment shows that the exact inverse calculation of angle value of 0.0001° is obtained under the condition of using only three layers of neural network with 20 neurons.

Key words: rotational double prism, inverse solution, achromatic aberration, beam steering, nonparaxial ray tracing

旋转双棱镜由一对共轴排列的棱镜组成, 通过控制每个棱镜相对于水平方向的旋转角度大小, 可以实现光束在一定范围内的任意控制。相较于传统的万向架式^[1]和快反镜式光束指向控制机构, 旋转双棱镜指向精度高, 响应时间快, 可靠性高, 且能够实现大视场角度的光束指向^[2-4], 在激光通信、激光武器、天文观测等方面有着广泛的应用^[5-6]。

解算出射入射光束与双棱镜转角的数学关系, 是实现双棱镜应用的基础。2002 年, Boisset 等人根据一阶近轴近似的方法提出了一种基于迭代的闭环方法来求得反向解^[7]。2002 年, Degnan 同样根据一阶近轴近似的方法给出了旋转双棱镜指向反向解的解析表达形式^[8], 但该方法在大角度的光束偏转的反向解算存在较大偏差^[9]。2009 年, Yang Y 通过对棱镜转角进行求导, 进而构造 Jacobian 矩阵解析公式, 给出了旋转双棱镜的封闭解析形式^[10], 但该方法运算复杂, 实际应用中可编制计算程序实现反向问题的实时解算^[9]。2011 年, Li Y 根据非近轴光线追迹法得到了双棱镜中一个通解, 然后将其展开为幂级数, 建立了 Risley 棱镜的三阶理论^[11]。同年 Li Y 又给出了旋转双棱镜在自由空间通信中应用所产生的反向问题的精确解, 提出了二步法的思想^[12], 大幅减小了运算复杂度。2015 年, 同济大学李安虎团队提出了一种将近似逆解与正解迭代相结合的迭代方法^[3], 该方法可以根据不同的要求规

* 收稿日期: 2023-01-03; 修订日期: 2023-03-26
联系方式: 罗昊鑫, 874577946@qq.com。

定跟踪误差阈值,可以满足被动跟踪领域的各种应用。

然而双棱镜的使用无可避免地会导致色差和图像失真^[13],难以应用到光束波长复合的情况^[14],而这一点对于需要成像的系统影响尤其大。在设计之初,双棱镜在宽光谱范围内可以实现消色差^[15],但是加入消色差的旋转双棱镜反向解算运算十分复杂,文献[16]利用二步法求解了消色差旋转双棱镜的反向解,但实际上利用的是非近轴光线追迹法正向生成数据并通过二分法不断地进行试凑,其精度依赖于算法所设置误差阈值。目前还没有人给出消色差旋转双棱镜反向解的准确数值解算形式。因此,有必要对消色差旋转双棱镜的反向解算进行研究。

神经网络作为一种工具,具有很强的非线性逼近能力,理论上能够近似任何函数^[17],而这在消色差旋转双棱镜的反向解算上具有重要意义。本文基于二步法,通过神经网络确定了消色差旋转双棱光束指向与棱镜转角的关系,相对于传统的解析求解形式,该方法更有利于对系统进行扩展,无论是双棱镜还是多棱镜系统,添加消色差镜与否,该方法均具有一定的适用性。

1 消色差旋转双棱镜结构

消色差旋转双棱镜结构如图1所示,共由4个共轴的棱镜组成,包括2块主棱镜与2块与之对应的消色差棱镜。两块梯形消色差棱镜具有相同的折射率 n_1 与顶角 α_1 ,消色差镜中的一个折射面与主棱镜外折射面平行;两块主棱镜同样具有相同的折射率 n_2 与顶角 α_2 ,其中一个折射面与z轴垂直,通过折射补偿消除色差^[18-19]。每一块主棱镜与其紧挨的消色差棱镜被固定在同一个旋转电机上,在系统运作过程中,始终保持相同的旋转角度。

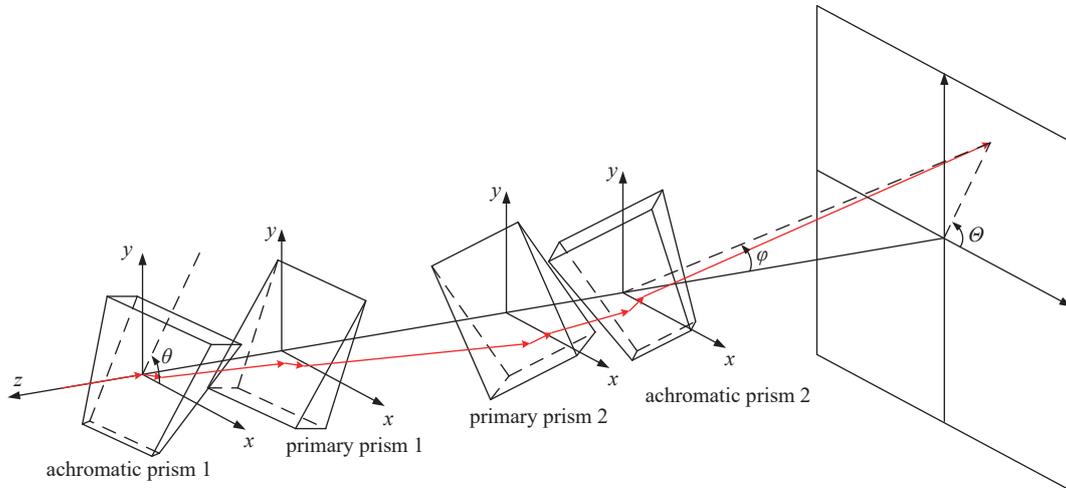


Fig. 1 Achromatic Risley prisms structure

图1 消色差旋转双棱镜结构图

入射光束经过4块棱镜的8个折射面共8次折射,最终从消色差镜2出射。出射光束的指向通常用偏转角与方位角进行描述,对于消色差旋转双棱镜系统,其出射光束的偏转角 ϕ 为其与z轴负方向的夹角,取值范围为 $[0^\circ, 90^\circ)$,方位角 θ 为出射光束在 xOy 平面上与x轴正向的夹角,以逆时针为正方向,取值范围为 $[0^\circ, 360^\circ)$ 。

2 消色差旋转双棱镜正向解算

2.1 一阶近轴近似法

消色差旋转双棱镜系统光路图如图2所示,四块棱镜从左至右依次为消色差镜 Π_1 ,主棱镜 Π_2 ,主棱镜 Π_3 ,消色差镜 Π_4 ,第*i*个棱镜的入射与出射面法向量用 \mathbf{n}_{i1} 与 \mathbf{n}_{i2} 来表示。我们将消色差镜与其对应的主棱镜看作一组棱镜,其中第一组棱镜对光束的偏转作用可以看作长度为 $|\delta_{11}|$ 、角度为 θ_1 的偏转矢量,第二组棱镜对光束的偏转作用可以看作长度为 $|\delta_{21}|$ 、角度为 θ_2 的偏转矢量

$$|\delta_{11}| = |\delta_{21}| = (\alpha_1 - \alpha_2)(n_1 - 1) - \alpha_2(n_1 - 1) + \alpha_2(n_2 - 1) \quad (1)$$

偏转向量 δ_{11} 以坐标原点(光轴方向)为起点,偏转向量 δ_{21} 以偏转向量 δ_{11} 的末端为起点,如图3所示。

系统的偏转矢量 δ 可以看作偏转向量 δ_{11} 与偏转向量 δ_{21} 的和

$$\delta = \delta_{11} + \delta_{21} \quad (2)$$

偏转矢量 δ 在 δ_x 与 δ_y 上的投影可以表示为

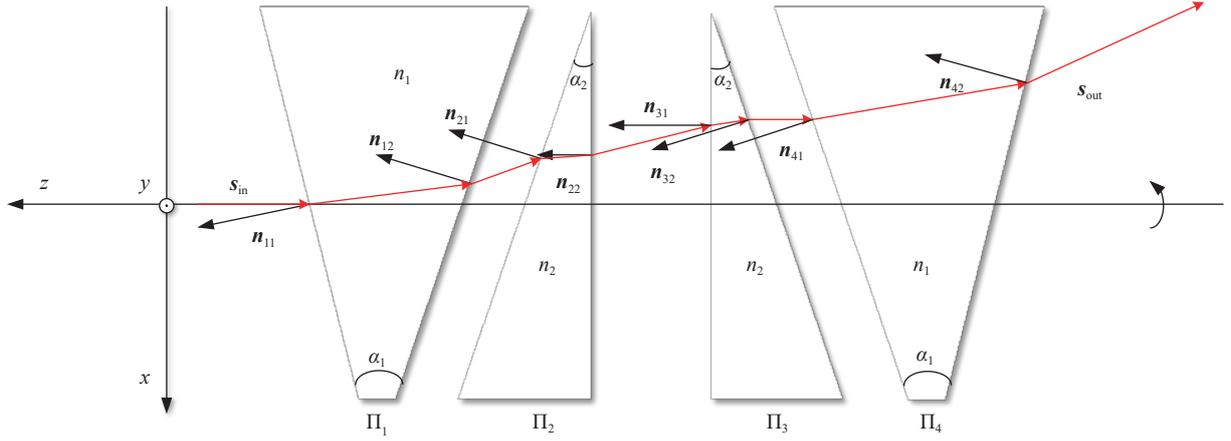


Fig. 2 Optical path diagram for achromatic Risley prisms

图2 消色差旋转双棱镜光路图

$$\delta_x = |\delta_1| \cos \theta_1 + |\delta_2| \cos \theta_2 \quad (3)$$

$$\delta_y = |\delta_1| \sin \theta_1 + |\delta_2| \sin \theta_2 \quad (4)$$

进而可以计算出光束的偏转角 ϕ 和方位角 Θ

$$\phi = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + 2\delta_1\delta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (5)$$

$$\Theta = \arctan\left(\frac{|\delta_1| \sin \theta_1 + |\delta_2| \sin \theta_2}{|\delta_1| \cos \theta_1 + |\delta_2| \cos \theta_2}\right) \quad (6)$$

2.2 非近轴光线追迹法

如图3所示,入射光线沿着 z 轴负方向入射,其矢量形式可以表示为

$$\mathbf{s} = (0, 0, -1) \quad (7)$$

在图2所示的消色差旋转双棱镜系统中,八个折射平面的法向量可以表示为

$$\mathbf{n} = (\sin a \cos \theta, \sin a \sin \theta, \cos a) \quad (8)$$

式中: θ 为该棱镜的旋转角度, a 为折射平面与 xOy 平面的夹角, $\theta = 0$ 时, \mathbf{n} 指向 x 轴正向为正,反之为负。

当光从折射率为 n_1 的介质射入折射率为 n_2 的介质,由斯涅尔定律的矢量形式,我们可以得到出射光束矢量与入射光束矢量的关系

$$\mathbf{s}_{\text{out}} = \frac{n_1}{n_2} [\mathbf{s}_{\text{in}} - (\mathbf{s}_{\text{in}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] - \mathbf{n} \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} + \frac{n_1^2}{n_2^2} (\mathbf{s}_{\text{in}} \cdot \mathbf{n})^2} \quad (9)$$

连续套用斯涅尔定律的矢量形式,我们便可以根据棱镜当前转角得到消色差旋转双棱镜的出射光束矢量形式 (K, L, M) ,进而得到出射光束偏转角与方位角

$$\phi = \arccos(-M) \quad (10)$$

$$\Theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{L}{K}\right), & K \geq 0 \text{ \& } L \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{L}{K}\right) + 2\pi, & K \geq 0 \text{ \& } L < 0 \\ \arctan\left(\frac{L}{K}\right) + \pi, & K < 0 \end{cases} \quad (11)$$

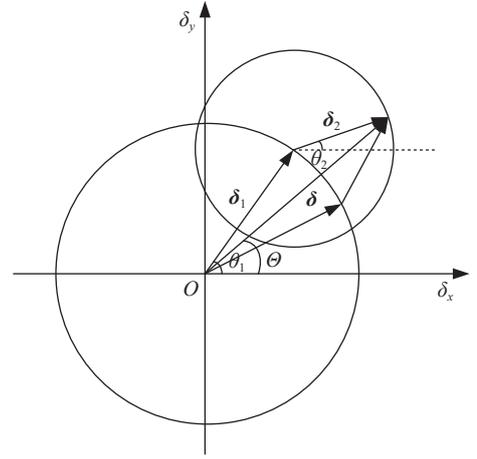


Fig. 3 Central algorithm

图3 中心算法

3 消色差旋转双棱镜反向解算

由二步法可以知道,在控制两组棱镜相对转角不变的情况下,同时旋转两棱镜并没有改变光路传播的路径,仅仅改变了出射光束相对于外界环境的位置关系,因而偏转角并不会发生改变,如果在其后方放置一垂直于光轴方向的平面,那么出射光束将会在该平面上形成一个圆形的轨迹。消色差旋转双棱镜系统出射光束的偏转角仅与两组棱镜的相对转角有关。

保持消色差旋转双棱镜中一组棱镜旋转角度为固定值,旋转另一组棱镜,通过正向解,我们可以得到消色差旋转双棱镜偏转角与两组棱镜旋转角度差值绝对值之间的关系,如图4所示。可以看出,在添加消色差棱镜之后的旋转双棱镜,其偏转角与两组棱镜旋转角度差值的变化关系与不添加的变化关系大致相同。

在消色差旋转双棱镜视场范围内的任意偏转角取值,始终有两组 $d\theta$ 与其对应,这一点在图2中心算法中同样有体现。而两组 $d\theta$ 对应了消色差旋转双棱镜的两组解。由正向解生成的数据,始终包含了这两组解,这两组解在数值上有着较大差异。如果直接利用神经网络进行拟合,并利用MES(均方误差)作为损失函数,最终得到的解为两组解的均值,而该值对于消色差旋转双棱镜的反向解算是没有任何意义的,因为我们不可能从中拆分出任何一组解。

为了区分消色差旋转双棱镜的两组解,我们用两组棱镜的相对位置关系进行描述,以靠近入射光束的棱镜组的旋转角度为基础,如果第二组棱镜角度值在第一组棱镜正向旋转 180° 范围内,则此时 $d\theta$ 取值为正,反之 $d\theta$ 取值为负。 $d\theta$ 可以由下面的表达式得出

$$d\theta = \frac{180^\circ - |\theta_2 - \theta_1|}{|180^\circ - |\theta_2 - \theta_1||} * \frac{\theta_2 - \theta_1}{|\theta_2 - \theta_1|} * \min(|\theta_2 - \theta_1| - 360^\circ, |\theta_2 - \theta_1|) \quad (12)$$

神经网络可以充分逼近任意复杂的非线性关系,然而由于复杂的矩阵运算,该算法在时间上并不会优于经典算法。但是在偏转角与两组棱镜旋转角度差值的计算上,由于光束偏转递推公式的复杂性,我们难以推导出具体的参数公式。而利用正向解进行迭代,其正向解占用了大量的运算资源,其算法运算效率反而不如神经网络。

利用BP神经网络对图4所示曲线进行拟合,可以直接得到两棱镜转角差 $d\theta$ 与偏转角 ϕ 之间的映射关系

$$d\theta = \pm f(\phi)$$

该神经网络的结构图如图5所示,其中每两层神经网络之间的递推关系式如下

$$y_i = \text{sig mod} \left(\sum (w_i y_{i-1} + b_i) \right) \quad (13)$$

$$\text{sig mod} (x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (14)$$

式中: w_i 为第 i 层神经网络的权重, b_i 为第 i 层神经网络的偏置, y_i 为第 i 层神经网络计算的结果值,当 i 为0时 y_0 为该神经网络的输入 $d\theta$,当 i 为神经网络层数 N 时, y_N 为该神经网络的输出 $|\phi|$ 。

对于两组棱镜不同的旋转角度 θ_1 与 θ_2 ,其方位角 θ 随之变化的关系如图6所示。从图中可以看出,方位角 θ 与 θ_1 、 θ_2 的关系可以近似看作平面线性关系,根据空间平面表达式,可以得出方位角 θ 的解析式

$$\theta \approx \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} \quad (15)$$

然而此平面并非严格的光滑平面,方位角也并非随着 θ_1 与 θ_2 呈线性关系,在线性关系的基础上,方位角 θ 还会随着 θ_1 与 θ_2 的变化出现非线性的部分,利用方位角减去其中的线性部分值,我们得到了方位角 θ 随 θ_1 、 θ_2 变化的非线性部分关系,如图7、图8所示。可以看出,方位角 θ 随着 θ_1 与 θ_2 的变化产生的非线性部分的值较小,随着 θ_1 与 θ_2 的差

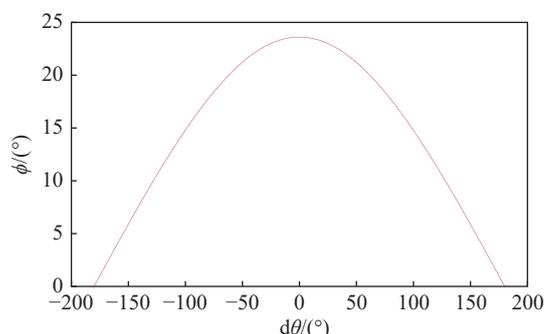


Fig. 4 Relationship between deflection angle and absolute value of prism angle difference

图4 偏转角与棱镜转角差绝对值的关系

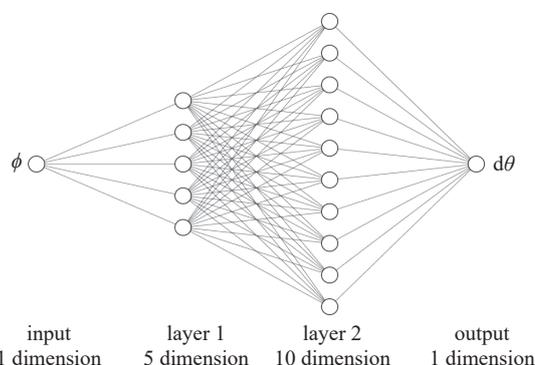


Fig. 5 Neural network structure diagram (deflection angle)

图5 神经网络结构图(偏转角)

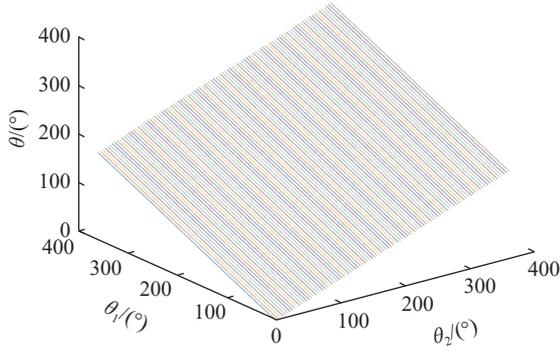


Fig. 6 Relationship between azimuth angle and two groups of prism angles

图 6 方位角与两组棱镜转角的关系

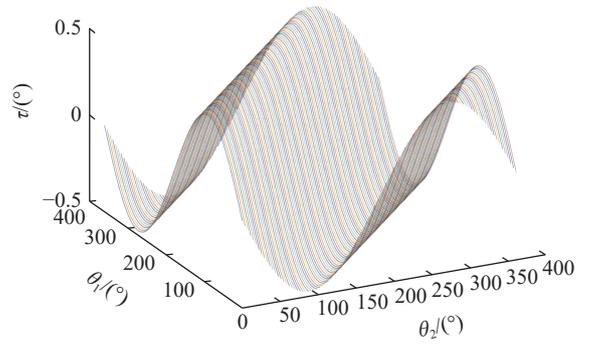


Fig. 7 Nonlinear part for the achromatic Risley prisms

图 7 消色差旋转双棱镜非线性部分

值即 $d\theta$ 变化的类三角函数,当 $d\theta$ 为 0° 时,其非线性部分的偏差值为零,能够与式(15)很好地吻合,而随着 $d\theta$ 的增大,上述线性关系将不再适用。

非线性部分偏差 τ 随着两棱镜旋转角度值 θ_1 、 θ_2 的变化关系如图7所示,可以看出,该值仅与两组棱镜转角的差值 $d\theta$ 相关,且为关于原点对称的周期函数(图8),同样的,我们可以利用神经网络对其进行拟合,进而获得 $d\theta$ 与 τ 之间的映射关系

$$\tau = g(d\theta) \quad (16)$$

该神经网络的结构图如图9所示。由此,我们可以得到方位角 θ 与 θ_1 、 θ_2 、 $d\theta$ 之间的函数关系表达式

$$\theta = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \tau \quad (17)$$

最终,我们便得到了消色差旋转双棱镜出射光束指向与两组棱镜转角之间的解析关系式

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{f(\phi)}{2} + \theta - g(d\theta) \\ \theta_2 = -\frac{f(\phi)}{2} + \theta - g(d\theta) \\ \theta_1' = -\frac{f(\phi)}{2} + \theta + g(d\theta) \\ \theta_2' = \frac{f(\phi)}{2} + \theta + g(d\theta) \end{cases} \quad (18)$$

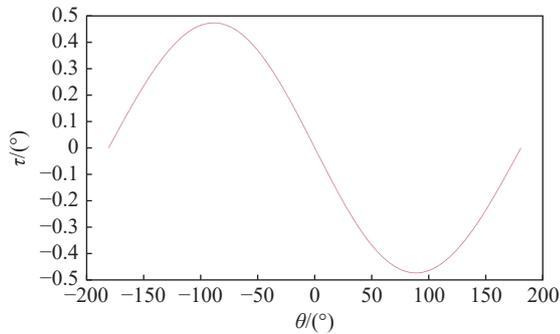


Fig. 8 Relationship between the angle difference and the nonlinear part

图 8 消色差旋转双棱镜非线性部分与转角差的关系

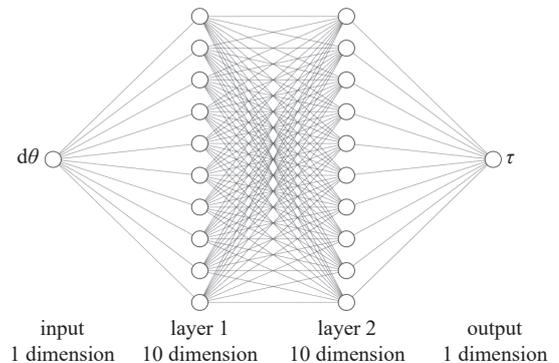


Fig. 9 Neural network structure diagram (nonlinear part)

图 9 神经网络结构图(非线性部分)

4 实验结果分析

消色差旋转双棱镜在一阶近轴近似法下得到的结果与非近轴光线追迹法得到的精确解存在部分差异,图10与图11分别是由一阶近轴近似法与非近轴光线追迹法得到的偏转角和方位角差值随两组棱镜转角变化的关系图。

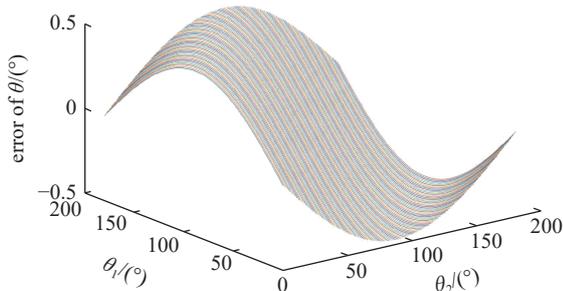


Fig. 10 Deflection angle error value
图 10 方位角误差值

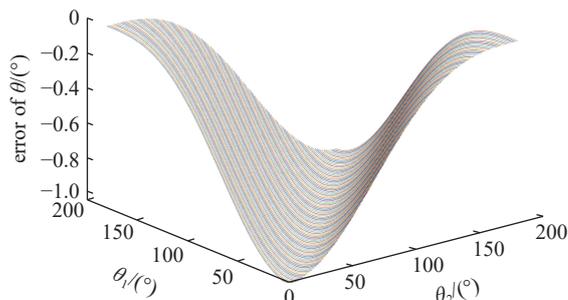


Fig. 11 Azimuth error value
图 11 偏转角误差值

当两组棱镜旋转角度差值为 0° 的时候,一阶近轴近似法与非近轴光线追迹法得到的偏转角的结果完全一致,而随着两组棱镜旋转角度差值变大,一阶近轴近似法的误差不断增大。而在方位角上,由于一阶近轴近似法将消色差旋转双棱镜两组棱镜对光束的偏转效果等效成线性关系,得到的关系图与消色差旋转双棱镜中方位角 θ 随着 θ_1 与 θ_2 的变化产生的非线性部分一致,这一点与文献 [20] 一致。

在消色差旋转双棱镜的反向的计算上,由于非近轴光线追踪法为消色差旋转双棱镜正向解的无偏计算,将其作为上述 2 个神经网络的训练数据,最终得到的误差仅受神经网络拟合能力的影响。

在实验中,所选取的两个神经网络均为 3 层的 BP 神经网络,图 12 给出了该方法最终求得的解算值与真实值之间的误差值。可以看出,在两组棱镜旋转角度相差较小的时候,该方法拟合精度较差,最大误差为 0.0019° ,而在其他位置具有较好的结果 (0.0001° 量级),能够基本满足目标跟踪所需。

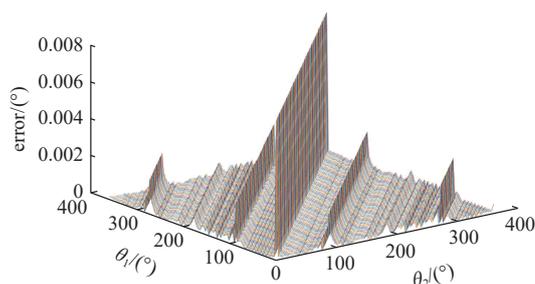


Fig. 12 Reverse solution error value for achromatic risley prisms
图 12 消色差旋转双棱镜反向解算误差值

表 1 为实验中利用 θ_1 与 θ_2 正向求解偏转角 ϕ 与方位角 θ 并对其进行反向解算得到的拟合角度值的部分数据,在所求得的两组旋转角度中,总有一组解与真实值相近。

表 1 实验结果
Table 1 Results of experiments

unit: ($^\circ$)

ϕ	θ	θ_1 (real)	θ_2 (real)	θ_1 (fitting)	θ_2 (fitting)	θ'_1 (fitting)	θ'_2 (fitting)
0.0186	90.0521	0.1	180	0.0973	180.0023	180.0072	0.1022
0.3724	90.0424	1	179	1.0001	179.0004	179.0845	1.0842
22.0821	4.3389	20	350	348.6781	18.6776	19.9998	350.0002
17.5733	129.2439	90	166	90.0001	166.0000	168.4876	92.4878
22.8874	325.2310	320	330	320.0006	329.9995	330.4613	320.4624

相较于文献 [16] 中所述的消色差旋转双棱镜反向解算方法,我们在控制解算精度相同的情况下与本文中的算法作了比较 (图 13)。可以看出,我们的算法在时间上更具优势,其运算速率为二分法的 4 倍以上,更能满足实时性系统的需求。

5 结 论

本文分析了消色差旋转双棱镜对光束偏转的作用,分析了一阶近轴近似法与非近轴光线追迹方法得到的正向结果,并利用神经网络对其中的非线性关系进行了拟合,推导出了消色差旋转双棱镜的高精度反向解。使用此方法得到

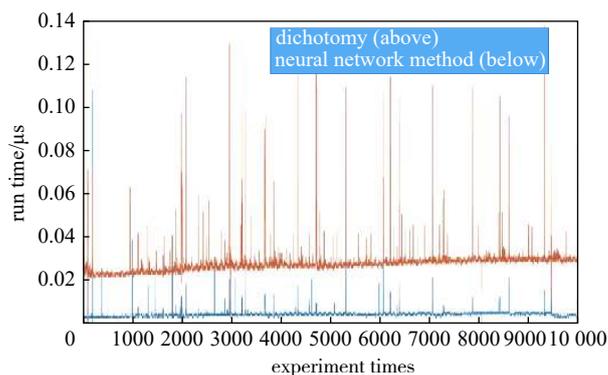


Fig. 13 Time analysis of neural network algorithm and dichotomy
图 13 神经网络算法与二分法运算时间分析

的两组棱镜角度值精度能够优于 0.0001° ，有效解决了消色差旋转双棱镜反向解算问题。此外，该方法不仅在运算时间上相较于二分法更具优势，还能根据神经网络矩阵参数展开为具体的数值表达式，对高实时性消色差旋转双棱镜控制系统上具有重要工程意义。

参考文献：

- [1] Wang Zheng, Mastrogiacomio L, Franceschini F, et al. Experimental comparison of dynamic tracking performance of iGPS and laser tracker[J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2011, 56(1): 205-213.
- [2] Li Anhu, Jiang Xuchun, Sun Jianfeng, et al. Laser coarse-fine coupling scanning method by steering double prisms[J]. *Applied Optics*, 2012, 51(3): 356-364.
- [3] Li Anhu, Gao Xinjian, Sun Wansong, et al. Inverse solutions for a Risley prism scanner with iterative refinement by a forward solution[J]. *Applied Optics*, 2015, 54(33): 9981-9989.
- [4] Tirabassi M, Rothberg S J. Scanning LDV using wedge prisms[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2009, 47(3/4): 454-460.
- [5] Chu C, Tsao T C, Zhou Jingyu, et al. Double Risley prism pairs for optical beam steering and alignment: 20040057656[P]. 2004-03-25.
- [6] Dillon T E, Schuetz C A, Martin R D, et al. Nonmechanical beam steering using optical phased arrays[C]//*Proceedings of SPIE 8184, Unmanned/Unattended Sensors and Sensor Networks VIII*. 2011: 81840F.
- [7] Boisset G C, Robertson B, Hinton H S. Design and construction of an active alignment demonstrator for a free-space optical interconnect[J]. *IEEE Photonics Technology Letters*, 1995, 7(6): 676-678.
- [8] Degnan J J. Ray matrix approach for the real time control of SLR2000 optical elements[C]//*14th International Workshop on Laser Ranging*. 2004.
- [9] 范大鹏, 周远, 鲁亚飞, 等. 旋转双棱镜光束指向控制技术综述[J]. *中国光学*, 2013, 6(2): 136-150. (Fan Dapeng, Zhou Yuan, Lu Yafei, et al. Overview of beam steering technology based on rotational double prisms[J]. *Chinese Optics*, 2013, 6(2): 136-150)
- [10] Yang Yaguang. Analytic solution of free space optical beam steering using Risley prisms[J]. *Journal of Lightwave Technology*, 2008, 26(21): 3576-3583.
- [11] Li Yajun. Third-order theory of the Risley-prism-based beam steering system[J]. *Applied Optics*, 2011, 50(5): 679-686.
- [12] Li Yajun. Closed form analytical inverse solutions for Risley-prism-based beam steering systems in different configurations[J]. *Applied Optics*, 2011, 50(22): 4302-4309.
- [13] Hao Qun, Wang Zihan, Cao Jie, et al. A hybrid bionic image sensor achieving FOV extension and foveated imaging[J]. *Sensors*, 2018, 18(4): 1042.
- [14] Sasián J M. Aberrations from a prism and a grating[J]. *Applied Optics*, 2000, 39(1): 34-39.
- [15] Bos P J, Garcia H, Sergan V. Wide-angle achromatic prism beam steering for infrared countermeasures and imaging applications: solving the singularity problem in the two-prism design[J]. *Optical Engineering*, 2007, 46(11): 113001.
- [16] 周书芃. 消色差旋转双棱镜光束指向控制技术[D]. 成都: 中国科学院光电技术研究所, 2016. (Zhou Shupeng. Beam pointing techniques based on achromatic Risley prisms[D]. Chengdu: Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, 2016)
- [17] Yarotsky D. Error bounds for approximations with deep ReLU networks[J]. *Neural Networks*, 2017, 94: 103-114.
- [18] Lacoursiere J, Doucet M, Curatu E O, et al. Large-deviation achromatic Risley prisms pointing systems[C]//*Proceedings of SPIE 4773, Optical Scanning*. 2002: 123-131.
- [19] Curatu E O, Chevrette P C, St-Germain D. Rotating-prism scanning system to equip an NFOV camera lens[C]//*Proceedings of SPIE 3779, Current Developments in Optical Design and Optical Engineering VIII*. 1999: 154-164.
- [20] 周远, 鲁亚飞, 黑沫, 等. 旋转双棱镜光束指向解析解[J]. *光学精密工程*, 2013, 21(6): 1373-1379. (Zhou Yuan, Lu Yafei, Hei Mo, et al. Analytic solution of optical beam steering based on rotational double prisms[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2013, 21(6): 1373-1379)