



核科学与工程

# 基于 OpenMC 的反应性等效物理转换方法在 双重非均匀性问题中的应用\*

刘鹏飞<sup>1</sup>, 陈玉清<sup>1</sup>, 李 颂<sup>1</sup>, 朱 彤<sup>2</sup>

(1. 海军工程大学 核科学技术学院, 武汉 430033; 2. 中核武汉核电运行技术股份有限公司, 武汉 430074)

**摘 要:** 由于基体中有着大量随机分布的弥散颗粒, 双重非均匀系统具有复杂的几何结构, 传统中子学计算方法往往难以处理双重非均匀系统, 反应性等效物理转换(RPT)方法是常用的近似处理方法。通过分析 RPT 方法的三个关键步骤: 精确初始值的求解、等效半径的求解、燃耗算法的选取, 探讨了各步骤采用不同算法对 RPT 方法效率和精度的影响, 并基于 OpenMC 在 Python 应用程序接口之上开发了 RPT 模块。数值结果表明, 优化后的 RPT 模块, 在保持良好计算效率的同时, 也能满足工程计算精度的需要。

**关键词:** OpenMC; 双重非均匀系统; 弥散颗粒燃料; 反应性等效物理转换方法

中图分类号: TL334

文献标志码: A

doi: 10.11884/HPLPB202335.230193

## Application development of RPT module based on OpenMC for double-heterogeneous system

Liu Pengfei<sup>1</sup>, Chen Yuqing<sup>1</sup>, Li Song<sup>1</sup>, Zhu Tong<sup>2</sup>

(1. College of Nuclear Science and Technology, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China;

2. China Nuclear Power Operation Technology Corporation, Ltd, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** Due to the large number of randomly distributed dispersed particles in the matrix, the double heterogeneous (DH) system has a complex geometric structure, and it is often difficult to deal with the DH system using the traditional neutronics calculation method. The reactivity equivalent physical transformation (RPT) method is a commonly used approximation method. This paper analyzes the three key steps of the RPT method: the solution of the exact initial value, the solution of the equivalent radius, and the selection of the depletion algorithm. The influence of different algorithms on the efficiency and accuracy of the RPT method is discussed. Based on OpenMC, an RPT module is developed on the Python API. The numerical results show that the optimized RPT module can meet the needs of engineering calculation accuracy while maintaining good calculation efficiency.

**Key words:** OpenMC, double heterogeneous system, dispersed particulate fuel, reactivity equivalent physical transformation method

弥散燃料颗粒具有在高温和深燃耗的情况下包容裂变产物、阻滞裂变气体和裂变碎片释放到燃料芯块外的特性, 广泛应用于高温气冷堆和压水堆等新型燃料设计中。弥散颗粒系统主要包括弥散颗粒燃料和弥散颗粒毒物燃料, 由于弥散颗粒在燃料栅元中的随机分布特性, 导致燃料栅元具有复杂的内部结构, 即存在宏观燃料栅格结构、芯块内部基体与弥散颗粒双重非均匀问题, 双重非均匀性导致在开展物理特性精细分析时将会带来非常高的计算成本, 而直接采用体积均匀化处理又会导致较大的偏差<sup>[1]</sup>。

针对双重非均匀性问题, 国际上分别基于确定论和概率论提出相应的解决策略, 基于概率论蒙特卡罗方法主要有重复结构随机栅格法<sup>[2]</sup>、弦长抽样法<sup>[3-6]</sup>和显示建模方法。基于确定论方法的主要有基于缺陷因子的等效均匀化方法、基于穿透概率的等效均匀化方法<sup>[7]</sup>、基于碰撞概率的颗粒建模方法<sup>[8]</sup>和基于特征线的颗粒建模方法等<sup>[9]</sup>。

\* 收稿日期: 2023-06-24; 修订日期: 2023-10-30

联系方式: 刘鹏飞, m21182703@nue.edu.cn。

通信作者: 陈玉清, chenyuqing301@163.com。

其中,反应性等效物理转换(RPT)方法<sup>[10]</sup>可以将复杂的双重非均匀系统转换为单重非均匀系统,进而采用传统的分析程序直接处理,是最常用的处理双重非均匀性的方法之一。

但 RPT 方法存在三点不足:一是需要具有双重非均匀系统处理能力的高保真计算程序结果为参考解,用于确定反应性等效物理转换等效半径大小<sup>[11]</sup>,而由于栅元数量的增加,采用蒙特卡罗方法计算双重非均匀系统效率会变得低下;二是 RPT 半径一般在寿期初被确定,RPT 等效半径并非随着堆芯燃耗线性变化,在燃耗过程中,RPT 半径始终保持不变,初始半径引入的反应性误差可能会随着燃耗过程累计,故需要评估初始 RPT 半径精度对后续燃耗计算的影响;三是蒙特卡罗燃耗计算耗费巨大计算资源,需要评估 RPT 方法在采用简化燃耗算法下的精度。

本文通过分析 RPT 方法的初始值求解、等效模型半径逼近、燃耗计算三个主要关键步骤,探究各环节采取不同算法对 RPT 方法精度和效率的影响,并基于 OpenMC 程序<sup>[12]</sup>设计 RPT 模块用于双重非均匀性分析计算,在提高计算效率的同时,也能满足工程计算精度的要求。

## 1 模型与方法

### 1.1 反应性等效物理转换方法分析

RPT 方法最早被用于确定论程序 DRAGON 和 WIMS,用于计算有效增殖系数随燃耗的变化。娄磊等<sup>[13-16]</sup>也对双重非均匀系统其他的 RPT 方法进行了探索,并提出了 RPT 方法的四种变体:改进的 RPT(IRPT)、环形 RPT(RRPT)、两步法 RRPT 以及混合 RPT 方法。该项研究表明,对于自屏效应更为强烈的弥散毒物,传统 RPT 方法存在失效的情况,并提出了相应的改进方法。本文采用了弥散毒物单颗粒系统进行验证,除了选取传统 RPT 方法外,还选择了改进的 RRPT 方法作为对比。

弥散颗粒单栅元元件的 RPT 等效处理过程如图 1 所示,首先将燃料区的弥散颗粒压缩到一个更小的区域中去,然后将压缩区的基体材料和弥散颗粒材料按照各材料所对应的体积比例进行均匀化。当有效增殖因子与参考解相同时,该压缩区域的半径大小即被确定。RPT 方法的原理是在宏观层面模拟颗粒材料的自屏效应,压缩颗粒材料空间并进行均匀化,直至 RPT 等效模型达到与颗粒模型一致的自屏效应,进而在后续的运输-燃耗耦合计算过程中使 RPT 等效模型与原来的颗粒模型保持相同的燃耗特性。

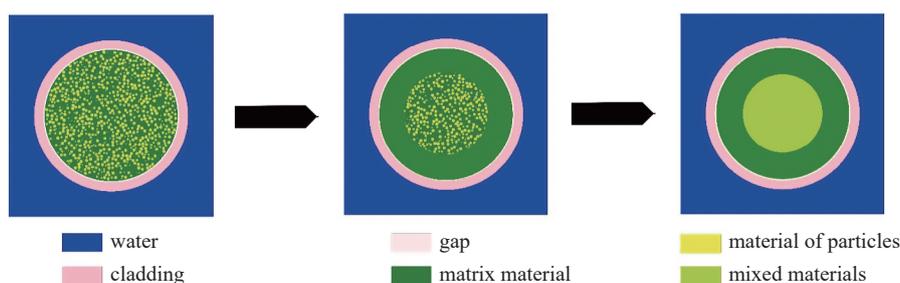


Fig. 1 Schematic diagram of reactivity equivalent physical transformation method

图 1 反应性等效物理转换方法示意图

相比于 RPT 方法,RRPT 方法则是将弥散颗粒集中压缩到一个环状燃料区中,不进行均匀化操作<sup>[16]</sup>,由于颗粒毒物的自屏效应更为强烈,而 RRPT 方法强化了颗粒材料的自屏效应,故 RRPT 在进行弥散颗粒毒物系统等效时具有更高的精准度。

经分析可知,为了提高 RPT 方法的效率和精度,有三个关键步骤:首先是初始精细颗粒模型参考解的计算,该计算会消耗大量时间,需要研究精细化的计算加速方法;其次是 RPT 模型等效半径的求解,在颗粒毒物系统中,传统线性插值方法会导致较大的初始误差,若想得到精确的半径初值,则需要更多的插值点计算,这会导致计算效率的降低。为此,本文将探究不同方法得到的初值半径对后续燃耗计算的影响;最后是燃耗算法的选取,合理的燃耗算法选取可以减少计算步数,提高计算效率,但简化的燃耗算法需要评估引入的误差。

### 1.2 计算模型

本文以单个燃料棒栅元为研究对象,基于全反射边界条件,燃料棒栅元参数见表 1,采用随机弥散颗粒的方式,随机弥散颗粒参数见表 2。

本文采取颗粒模型作为基准解,由于颗粒的空间自屏效应,颗粒内部核子密度随燃耗深度成梯度变化。外层可燃毒物核子密度变化梯度远大于内层,即颗粒呈现“剥洋葱”的燃耗效应,同时,随着颗粒材料吸收截面的增大,

表 1 棒状几何燃料栅元主要参数

Table 1 Main parameters of fuel pin

pitch/cm	radius of fuel region/cm	thickness of air gas/cm	material of matrix	enrichment ratio/%	density of matrix/(g·cm <sup>-3</sup> )	material of cladding/cm	thickness of zirconium cladding/cm	density of zirconium cladding/(g·cm <sup>-3</sup> )	density of moderate H <sub>2</sub> O/(g·cm <sup>-3</sup> )	temperature/K
1.26	0.4096	0.0084	UO <sub>2</sub>	20	10.5	Zr	0.057	6.5	1.0	300

表 2 随机弥散毒物颗粒模型参数

Table 2 Parameters of dispersed poison particles

material of particles	radius of particles/μm	volumetric fraction of particles/%	density of fuel particles/(g·cm <sup>-3</sup> )
B <sub>4</sub> C	100/215	5	1.9
Er <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	100/215	5	8.6

该效应也会更加强烈。故对弥散颗粒毒物,需要更精细地划分燃耗区,基准算例在建模过程中颗粒材料将按照半径大小被均匀划分为 5 层进行燃耗计算,以便获得更精确的结果。

为了便于对比分析,本文设置了体积均匀化(VHM)模型、RPT 模型、RRPT 模型分别开展对比计算。为了验证 RPT 模块在快速计算下的准确性,在燃耗策略上也采取了燃耗计算步数最小的一阶预估模型,并与基准解进行对比。

## 2 基于 OpenMC 的 RPT 模块设计

OpenMC 是麻省理工学院(MIT)开发的开源的蒙特卡罗中子输运计算代码,主要用于中子临界计算,可以使用构造实体几何来模拟三维模型,具有高保真计算双重非均匀系统问题的能力。得益于 OpenMC 丰富的开发接口设计,RPT 模块也同样具有良好的扩展性和二次开发性,本节将对 RPT 模块使用到的一些 OpenMC 核心功能进行简要分析。

### 2.1 OpenMC 库 Python API 接口分析

OpenMC 中提供了大量 Python 程序接口,用户可以通过 Python 脚本对软件计算进行控制和后处理。

OpenMC 中 `openmc.search_for_keff` 函数提供了通过修改单个自变量来搜寻目标有效增殖系数的方法,该函数需要传入一个 model 实例和初始取值区间范围。而 RPT 方法上限和下限为

$$\begin{cases} R_{\min} = R_{\text{fuel}} \cdot \sqrt{f_p} \\ R_{\max} = R_{\text{fuel}} \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $R_{\max}$  是半径值的上限;  $R_{\min}$  是半径值的下限;  $R_{\text{fuel}}$  为燃料区域半径;  $f_p$  为颗粒所占相体积。在 OpenMC 中,搜索算法主要采取的是二分法,这种方法要达到高精度需要更长的时间,后续可以对该算法进行改进,以期获得更好的加速效果,更快的逼近弥散颗粒系统所对应的 RPT 半径。

### 2.2 颗粒模型精细计算效率分析

在 RPT 方法中,需要弥散颗粒系统的精确初始有效增殖系数作为初始参考解,而基于蒙特卡罗的弥散颗粒显式精细建模功能可以处理该问题。在开展颗粒模型精细分析过程中,颗粒模型的构建与精细颗粒模型输运计算过程中粒子的追踪是影响效率的关键环节,而 OpenMC 中提供了随机序列堆叠(RSP)和紧密随机堆叠(CRP)两种方法用于产生弥散小球坐标<sup>[7]</sup>。晶格加速方法则被用于优化粒子追踪效率,该方法可加快蒙特卡罗方法对粒子追踪扫描的速度,晶格划分如图 2 所示,在中子追踪的过程中,晶格可以帮助定位中子路径中的弥散颗粒,下一节的数值结果将展示不同晶格划分对颗粒精细模型计算效率以及精度的影响。

### 2.3 OpenMC 的燃耗方法效率分析

燃耗计算是反应堆设计与运行跟踪分析的重要一环,燃

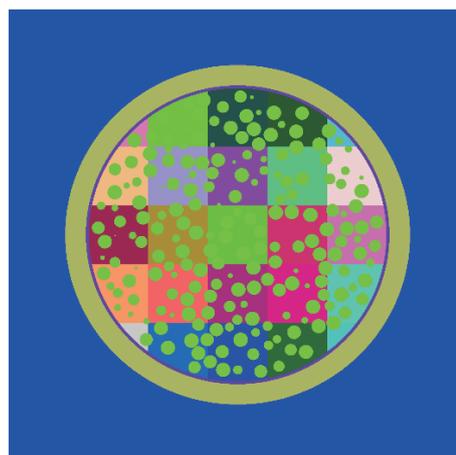


Fig. 2 Diagram of lattice division of dispersed particle system

图 2 弥散颗粒系统晶格划分示意图

耗方程可视形如  $y'=A(y, t)y$  的表达式, 在 OpenMC 中, 有多种燃耗算法可选取, 包括 CE/CM、CE/LI、LE/QI、SI-CE/LI、SI-LE/QI、EPC-RK4 等算法<sup>[18]</sup>, 高阶燃耗算法结果更精准, 但是选择高阶算法会导致计算步数的增多; 而一阶预测算法是最为简单的近似算法, 但是也会带来一定的误差。为评估一阶预测算法在 RPT 方法中是否可行, 本文 RPT 模型采用的燃耗算法均为一阶预测算法, 而颗粒精细模型则采用了 CE/LI 算法。

除了燃耗算法以外, 燃耗区的划分对模型计算精度的影响也至关重要。对于弥散颗粒毒物来说, 由于毒物材料对 neutron 吸收截面更大, 自屏效应要更为明显, 此时需要对弥散颗粒进行燃耗区划分, 以获得更为精细的计算结果。本文中弥散颗粒模型基准解则采取将毒物颗粒按照半径等分为五层进行燃耗计算, 以获得更为准确的计算结果。而为了提高计算效率, RPT 等效模型则未细分燃耗区, 进而验证 RPT 模块在快速计算时的精度。

## 2.4 基于 OpenMC 的 RPT 模块设计实现

基于 OpenMC 库设计开发 RPT 模块设计流程如图 3 所示。

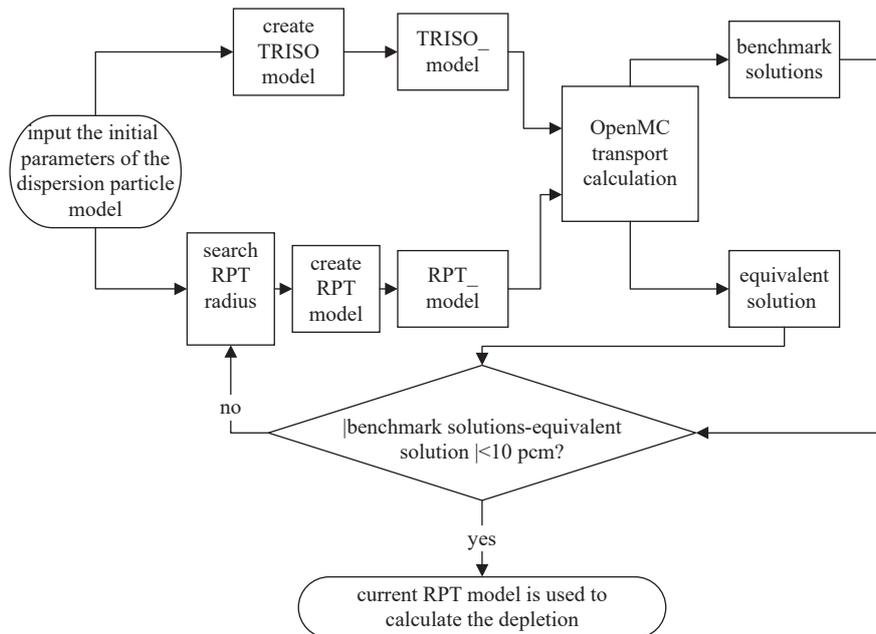


Fig. 3 Flow chart of RPT module based on OpenMC

图 3 基于 OpenMC 的 RPT 模块流程图

(1) 将模型构建过程封装进 `create_TRISO_model` 函数。该函数通过传入相体积、颗粒大小以及栅元大小等变量参数构建并返回一个颗粒模型实例 `TRISO_model`。在这个步骤中, `create_TRISO_model` 函数将会根据弥散颗粒的数量确定合适的晶格划分方法, 以确保最快的输运计算效率。

(2) 实例 `TRISO_model` 输出 xml 并进行输运计算。OpenMC 采用 xml 文件作为标准输入文件, 而 `model` 类具有 `export_to_xml` 的属性, 可将之前定义的几何信息、材料信息、模拟条件信息导出为对应的 `geometry.xml`、`materials.xml` 和 `settings.xml` 文件, 并进行输运计算, 得到 RPT 方法所需要的初始精确解。

(3) 将 `create_RPT_model` 函数封装至 `search_RPT_radius` 函数并传入 `openmc.search_for_keff` 函数中, 搜寻 RPT 半径。`search_RPT_radius` 函数构建了 RPT 半径与 RPT 模型的映射关系, `openmc.search_for_keff` 函数将颗粒模型解作为目标函数, 通过迭代修改 RPT 半径的值, 使得 RPT 模型的有效增殖系数不断趋近于目标解, 最终搜寻至颗粒模型所对应的 RPT 半径。

(4) 将 RPT 半径传入至 `create_RPT_model` 函数得到模型 `RPT_model`。即完成将双重非均匀系统转换为传统的单重非均匀系统, 从而进行燃耗计算。

与此同时, RPT 模块还内置了环形 RPT 方法 (RRPT), 该方法为了更好地模拟毒物系统自屏效应, 将 RPT 方法中等效为圆柱的方法改进为等效为圆环状。相关研究表明, 对于吸收截面较大的弥散颗粒毒物系统, 相较于传统 RPT 方法, RRPT 方法有着更高的等效精度<sup>[15]</sup>。

## 3 数值模拟验证研究

针对双重非均匀系统, 本文分析了晶格划分对计算效率的加速效果, 本文计算环境为 32 核 Intel Xeon (Cascade

Lake) Platinum 8269/8269CY 2.5 GHz, 表 3 计算时间均为在该环境下计算得出。本计算条件设置为每代 10000 个粒子, 一共 500 代。并以 OpenMC 精细颗粒模型(GM)为基准, 对比分析了 RPT 模块在不同颗粒材料和颗粒大小情况下的准确性。

表 3 不同晶格划分方法对弥散颗粒系统计算的影响

Table 3 Effects of different lattice partition methods on the calculation of dispersed particle system

lattice division method	computing time/s		$K_{mf}$	
	volumetric fraction 5%	volumetric fraction 10%	volumetric fraction 5%	volumetric fraction 10%
1×1×1(no lattice)	5868.359	17236.021	1.45644	1.61679
3×3×3	732.663	1639.056	1.45538	1.61731
5×5×5	376.934	769.323	1.45602	1.61757
7×7×7	270.646	503.730	1.45558	1.61638
10×10×10	177.279	262.550	1.45651	1.61755
13×13×13	174.607	247.808	1.45698	1.61752
15×15×15	177.633	246.969	1.45634	1.61741
17×17×17	182.233	254.476	1.45673	1.61613
19×19×19	200.549	260.858	1.45546	1.61734
21×21×21	206.945	271.748	1.45615	1.61748

以本文研究对象为例, 表 4 展示了 OpenMC 在不同相体积下时生成颗粒所需的时间。可见相体积越大, 产生颗粒所需花费时间越长。但是当填充率超过 38% 时, 建模时间会显著提升, 因此颗粒填充率对 RPT 方法的求解效率也有较大的影响。

图 4 分别展示了弥散颗粒燃料在相体积分数为 5% 和 10% 的情况下, 不同的晶格划分方式对粒子输运计算时间的影响。从图 4 可以看出模拟计算时间与颗粒数近似成正比, 相体积越大, 颗粒数越多, 计算时间也越长; 细化晶格划分对计算效率有显著提升, 相较于无晶格的情况(即晶格大小为 1×1×1 时), 适当细化晶格后, 有效增殖系数计算速度提高了 33.1 倍, 但是当晶格划分到 10×10×10 这一阶后, 继续细化晶格后, 计算效率并无显著提升, 甚至有降低的趋势。不同晶格划分对颗粒精细模型计算效率与精度的影响详细数据见表 3, 由表 3 可见, 晶格划分对精细颗粒模型有效增殖系数计算影响在  $\pm 10^{-3}$  以内, 符合蒙特卡罗统计误差。

表 4 OpenMC 生成颗粒时间

Table 4 Particle generation time of OpenMC

volumetric fraction/%	particle number	consumption time/s
5	5033	0.67583202
10	10066	1.49383474
20	20132	3.50719374
30	30198	17.73238749
40	40265	156.2571

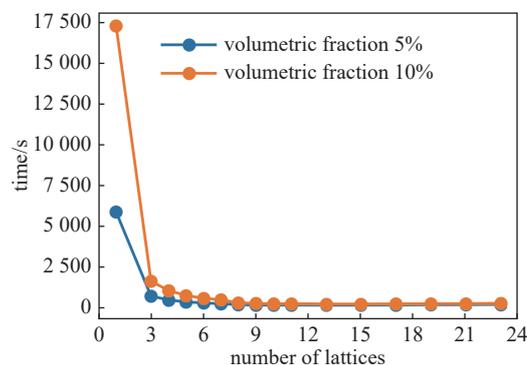


Fig. 4 Effect of lattice division on computational efficiency

图 4 晶格划分对计算效率的影响

图 5 展示了 5% 相体积分数下 100  $\mu\text{m}$  的  $\text{B}_4\text{C}$  颗粒等效过程, 传统插值方法精确度很大程度上取决于样本点的取值, 对于含有吸收截面较大的颗粒材料, 引入的非线性更大, 传统插值方法会导致更大的误差。而 RPT 模块具有精确搜索初值的能力, 只需提供颗粒模型参考解, 模块会反复迭代逼近初始参考值, 直到收敛至判定条件。本算例在迭代 19 次后, 所得到的等效模型与颗粒模型有效增殖系数误差可达  $10^{-4}$  以内, 而传统插值方法受颗粒材料影响较大, 若颗粒材料为吸收截面较大的毒物, 则有效增殖系数与等效半径呈非线性关系, 此时传统插值方法的精度取决于插值点, 误差将超过  $1.5 \times 10^{-3}$ 。由此可见, 采用精确搜索初值方法在进行反应性等效时较传统插值方法初始引入误差更小。

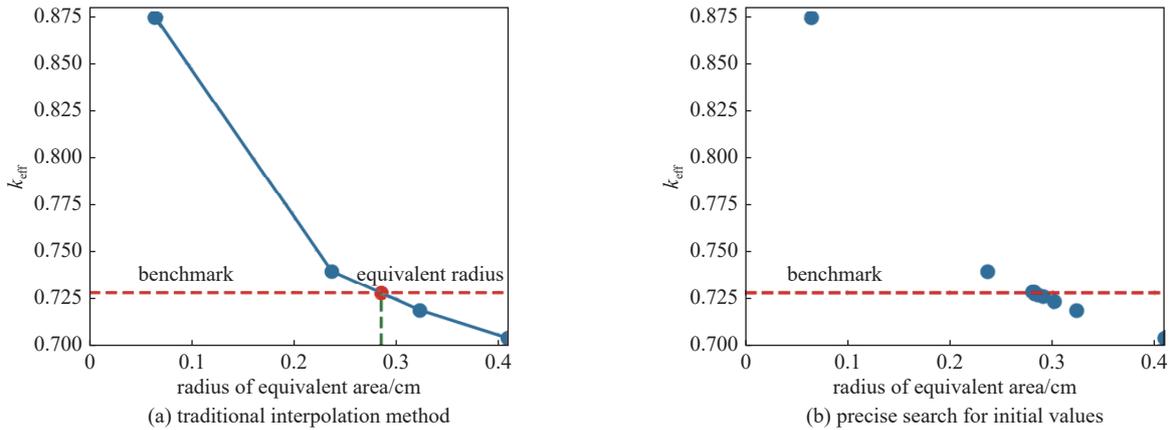


Fig. 5 Comparison of the effect of searching equivalent radius between traditional method and RPT module

图 5 采用传统方法与 RPT 模块搜索等效半径效果对比图

图 6 展示了相体积为 5% 时, 采用 RPT 模块处理包含不同类颗粒的双重非均匀系统时有效增殖系数随着时间的变化情况。从图 6 可以看出,  $B_4C$  颗粒尺寸为  $100\ \mu m$  的情况下, 虽然插值方法相较于精确求解方法初始引入的反应性误差更大, 但是在燃耗后续该误差并未累积, 在寿期内误差均小于  $10^{-3}$ , 故插值方法是可以应用于 RPT 等效半径求解的, 且插值方法可以减少插值点的计算, 进而提高计算效率。随后又分别验证了  $B_4C$  材料颗粒为  $215\ \mu m$  以及  $Er_2O_3$  颗粒尺寸为  $100\ \mu m$ 、 $215\ \mu m$  的情况下。可以看出即使在颗粒材料吸收截面较大和尺寸较大的情况下, RPT 方法误差开始变大, 对于  $215\ \mu m$  的  $Er_2O_3$  颗粒材料, 误差超过了  $3 \times 10^{-3}$ , 而 RRPT 方法全寿期最大误差保持在  $2 \times 10^{-3}$  左右; 对于  $215\ \mu m$  的  $B_4C$  颗粒, RPT 方法全寿期最大误差超过了  $2 \times 10^{-3}$ , 而 RRPT 方法则降低到了  $1.5 \times 10^{-3}$ 。相较于  $Er_2O_3$ ,  $B_4C$  有更大的中子吸收截面, 故自屏效应更强, 而颗粒越大, 也会加剧颗粒材料的自屏效应。从图 6 分析可知, 随着颗粒材料自屏效应的增强, RPT 方法所带来的误差也会增大。

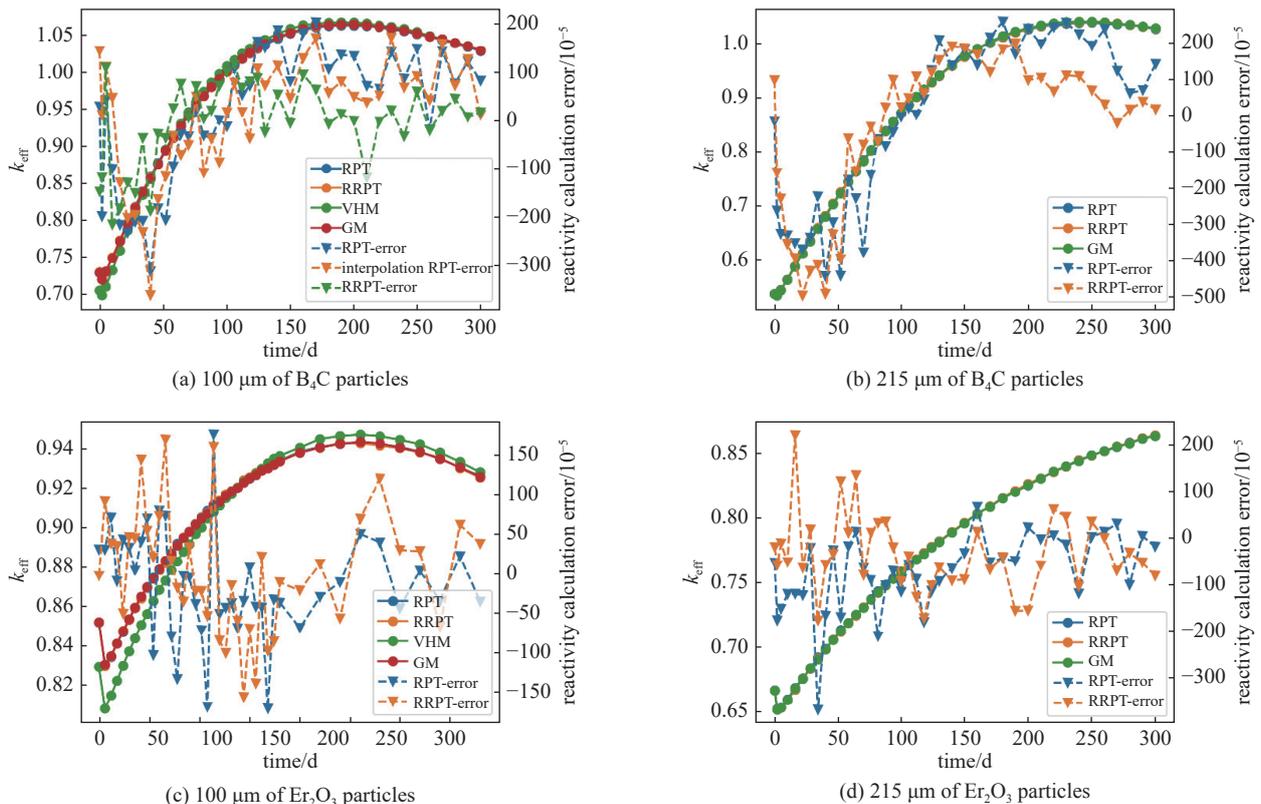


Fig. 6 Variation of  $K_{inf}$  and reactivity deviation with depletion using RPT module to deal with DH system

图 6 RPT 模块处理双重非均匀系统时  $K_{inf}$  及反应性偏差随燃耗的变化

#### 4 结 论

本文基于 OpenMC 开发了 RPT 模块, 通过对制约 RPT 方法精度和效率的三个关键步骤: 精确初始值的求解、

等效半径的求解、燃耗算法的选取,对比了各环节采用不同方法对 RPT 方法精度的影响,并做了数值模拟验证。数值模拟结果表明,晶格加速方法可使得颗粒模型精细计算时间缩短到 3%,极大地提高了蒙特卡罗采用 RPT 方法求解弥散颗粒系统初始解的求解速度。同时,本文还对比了不同初值搜索方法所引入的误差对后续燃耗计算的影响,结果表明,传统插值方法所引入的初值半径误差在燃耗计算的后续并不会累计,且可以减少插值点以提高计算效率。采用所需步长更少的一阶预测算法进行燃耗计算时,对于自屏效应越强的材料,RPT 方法所引入的误差也会越大,但 RRPT 算法仍然保持着良好的精度范围,故基于 OpenMC 的 RPT 模块双重非均匀性处理能力可以满足工程设计精度和速度的需要。

#### 参考文献:

- [1] 娄磊,柴晓明,姚栋,等. 弥散颗粒系统双重非均匀性物理边界研究[J]. *核动力工程*, 2021, 42(s2): 82-88. (Lou Lei, Chai Xiaoming, Yao Dong, et al. Research of double-heterogeneity physical boundary on dispersed particle-type systems[J]. *Nuclear Power Engineering*, 2021, 42(s2): 82-88)
- [2] Brown F B, Martin W R. Stochastic geometry capability in MCNP5 for the analysis of particle fuel[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 2004, 31(17): 2039-2047.
- [3] 刘仕倡,王侃,陈义学. 改进弦长抽样方法开发及在弥散燃料蒙特卡罗模拟的应用[J]. *原子能科学技术*, 2020(9): 54. (Liu Shichang, Wang Kan, Chen Yixue. Development of Improved chord-length sampling method and its application in Monte Carlo simulation of dispersion fuel[J]. *Atomic Energy Science and Technology*, 2020(9): 54)
- [4] Murata I, Takahashi A, Mori T, et al. New sampling method in continuous energy Monte Carlo calculation for pebble bed reactors[J]. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 1997, 34(8): 734-744.
- [5] Ji Wei, Martin W R. Monte Carlo simulation of VHTR particle fuel with chord length sampling[C]//Proceedings of 2007 Joint International Topical Meeting on Mathematics & Computation and Supercomputing in Nuclear Applications. 2007: 42104-48109.
- [6] Liang C. Radiation transport computation in stochastic media: method and application[D]. Troy: Rensselaer Polytechnic Institute, 2014.
- [7] She Ding, Liu Zhihong, Shi Lei. An equivalent homogenization method for treating the stochastic media[J]. *Nuclear Science and Engineering*, 2017, 185(2): 351-360.
- [8] Hébert A. A collision probability analysis of the Double-Heterogeneity problem[J]. *Nuclear Science and Engineering*, 1993, 115(2): 177-184.
- [9] Sanchez R, Pomraning G C. A statistical analysis of the double heterogeneity problem[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 1991, 18(7): 371-395.
- [10] 朱彤,陈玉清,李昂,等. 基于 SuperMC 的随机介质程序在双重非均匀性问题中的应用[J]. *强激光与粒子束*, 2022, 34: 026013. (Zhu Tong, Chen Yuqing, Li Ang, et al. Application of random media program based on SuperMC in solving double-heterogeneity[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2022, 34: 026013)
- [11] Kim Y, Kim K S, Noh J M. Reactivity-equivalent physical transformation for homogenization of double-heterogeneous fuels[C]//Transactions of the Korean Nuclear Society Autumn Meeting. 2005.
- [12] Romano P K, Horelik N E, Herman B R, et al. OpenMC: a state-of-the-art Monte Carlo code for research and development[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 2015, 82: 90-97.
- [13] Li Jian, She Ding, Shi Lei. An improved reactivity-equivalent physical transformation for treating FCM fuel with burnable poisons[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 2018, 121: 577-581.
- [14] Lou Lei, Peng Xingjie, Chai Xiaoming, et al. The ring RPT method for DH systems containing dispersed particle-type of fuel and burnable poisons[J]. *Frontiers in Energy Research*, 2021, 9: 704307.
- [15] Lou Lei, Yao Dong, Chai Xiaoming, et al. A novel reactivity-equivalent physical transformation method for homogenization of double-heterogeneous systems[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 2020, 142: 107396.
- [16] Lou Lei, Chai Xiaoming, Yao Dong, et al. Research of ring RPT method on spherical and cylindrical Double-Heterogeneous systems[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 2020, 147: 107741.
- [17] Torquato S, Uche O U, Stillinger F H. Random sequential addition of hard spheres in high Euclidean dimensions[J]. *Physical Review E*, 2006, 74: 061308.
- [18] Yu Jiankai, Forget B. Verification of depletion capability of OpenMC using VERA depletion benchmark[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 2022, 170: 108973.