



·粒子束及加速器技术·

## 基于贝叶斯优化的高能质子空间传输精确控制\*

申诗雨<sup>1</sup>, 杨晓虎<sup>1</sup>, 张国博<sup>1</sup>, 赵子琦<sup>1</sup>, 马燕云<sup>2</sup>

(1. 国防科技大学 理学院 核科学与技术系, 长沙 410073; 2. 国防科技大学 前沿交叉学科学院, 长沙 410073)

**摘 要:** 综合考虑地磁场、高能质子的相对论效应以及同步辐射的影响, 建立了质子在空间传输的单粒子运动模型。基于该模型, 提出利用贝叶斯优化方法, 实现给定质子能量下, 质子从空间初始点传输到目标点的精确控制方法, 获得了出射方向随出射位置的变化规律, 当位置径向角取  $0^\circ$  和  $180^\circ$  时, 位置轴向角的取值不会改变粒子的最优出射方向。研究结果为质子束在空间环境中的长程传输提供理论支撑。

**关键词:** 高能质子; 传输控制; 空间传输; 贝叶斯优化

中图分类号: O53

文献标志码: A

doi: 10.11884/HPLPB202335.230231

## Precise control of high-energy protons transport in space environment by using bayesian optimization

Shen Shiyu<sup>1</sup>, Yang Xiaohu<sup>1</sup>, Zhang Guobo<sup>1</sup>, Zhao Ziqi<sup>1</sup>, Ma Yanyun<sup>2</sup>

(1. Department of Nuclear Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. College of Advanced Interdisciplinary Studies, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Considering the geomagnetic field, the relativistic effect and bremsstrahlung radiation of high-energy protons, a single particle motion model of proton transport in the space environment is established. Based on this model, the Bayesian optimization method is proposed to realize the precise control of protons transport from the initial position to the target under a given proton energy. The dependence of the proton launch angle on the launch height is obtained, that is, when the coordinate radial angle is  $0^\circ$  and  $180^\circ$ , the value of the coordinate axial angle will not change the optimal emission direction of the particles. The results can provide theoretical references for long-distance transport of proton beams in the space environment.

**Key words:** high energy proton, transport control, space transmission, Bayesian optimization

在目前的空间主动实验中, 已经完成的形式包括发射带电粒子束、释放等离子体、释放化学物质和核爆炸等。其中发射带电粒子对于辐射防护以及空间碎片清除等方面具有工程价值。由于探寻带电粒子在空间传输中的精确控制实验成本昂贵, 因此有必要利用理论方法、数值模拟等简易、经济的研究手段, 对质子束在空间环境中的长程传输控制开展预研和探索。

由于高能电子束加速相比起高能质子束加速要相对容易, 在国内外开展的研究中主要集中在电子束传输研究, 对高能质子的研究相对较少。Neubert 等<sup>[1-2]</sup> 使用蒙特卡罗模拟方法, 分析了同向地磁场对束包络的影响; Mironychev 等<sup>[3]</sup> 则结合蒙特卡罗方法计算了电子束水平射入大气环境的情况, 指出垂直方向的地磁场会改变电子束的传输方向; Porazik 等<sup>[4-5]</sup> 研究了电子束损失锥的计算以及电子束注入位置的选择, 之后 Powis<sup>[6]</sup> 利用单粒子运动模型模拟了电子束从轨道卫星发射后, 沿磁力线传输并最终抵达地球附近的全过程, 发现磁层环境的变化会显著影响电子束在大气层内束斑的落点。Hao 等<sup>[7-8]</sup> 利用二维 PIC 方法, 建立了适用于真空环境内相对论电子束长程传输的计算模型, 总结了地磁场及自生电磁场对电子束长程传输的影响。姚海波等人的研究表明通过调制相对论电子束的束/背景等离子体密度比值、相对论因子、束包络和密度分布等, 可以抑制电子束传输中的束流不稳定

\* 收稿日期: 2023-07-26; 修订日期: 2023-09-19

基金项目: 国家自然科学基金项目 (12175309、11975308、12005297); 中国科学院战略先导专项 (XDA25050200); 湖南省自然科学基金项目 (CX20190001); 国防科技大学青年创新奖资助课题 (20180104)

联系方式: 申诗雨, 1806823156@qq.com。

通信作者: 杨晓虎, xhyang@nudt.edu.cn。

性,如成丝不稳定性和水龙管不稳定性,保证电子束稳定的长距离传输<sup>[9]</sup>。然而,人们对高能质子的研究较少,而高能质子的传输对空间武器和空间垃圾清理等的研究有重要作用,故有必要对高能质子的空间传输精确控制进行研究。高能质子在空间中的传输与地磁场的强度及方向、本身能量等因素密切相关,已有的研究并未充分考虑地磁场对于高能质子的偏转,磁场中运动粒子的同步辐射,高能质子的相对论效应对传输过程的影响,以及高能质子传输的准确控制等。

本文细致研究了不同能量的高能质子在空间传输的精确控制问题,综合考虑地磁场、相对论以及同步辐射等影响,建立了高能质子的单粒子运动模型。给定初始能量,利用贝叶斯优化方法,实现了高能质子在空间中从起始点到目标点的精确传输。

## 1 高能质子在地磁场中的传输

首先,我们建立地磁场的笛卡尔坐标系,认为地磁北极与地理北极重合,以地球球心为圆心,以从球心向地磁北极的连线为 $z$ 轴方向,向赤道与零度经线交点的连线为 $x$ 轴方向建立右手笛卡尔坐标系。

高能质子在空间中传输时受到地磁场的作用,由于受到洛伦兹力而产生速度的偏转,在某种情况下地球可认为是一个巨大的磁偶极子。所以,可以用偶极场来近似地磁场,其模型为<sup>[10]</sup>

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{M}] \quad (1)$$

式中: $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ 为矢径, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ 为单位矢量, $\mathbf{M}$ 为地球的磁矩。对于地球, $\mathbf{M} = -M\hat{\mathbf{z}}$ ,反平行于 $z$ 轴。在地球赤道处 $x = R_e$ ( $R_e$ 为地球半径), $y = z = 0$ ,地磁场强度约为 $B_0 = 3.07 \times 10^{-5}$  T,得 $\mu_0 M/4\pi = B_0 R_e^3$ 。于是在笛卡尔坐标中,磁场的表达式为

$$\mathbf{B}_{\text{dip}} = -\frac{B_0 R_e^3}{r^5} [3xz\hat{\mathbf{x}} + 3yz\hat{\mathbf{y}} + (2z^2 - x^2 - y^2)\hat{\mathbf{z}}] \quad (2)$$

选取零度经线与赤道交点处高度为0 km至1000 km每隔10 km取一个值的数据与IGRF模型数据比较,如图1所示,可以看出理论模型计算所得数据与IGRF数据库<sup>[11]</sup>数据拟合效果较好,拟合优度计算得 $R^2 = 0.9739$ ,验证较好,可以代替实际地磁场使用。

近地空间中,带电量为 $q$ 、质量为 $m_0$ 、速度为 $v$ 的质子,在电场强度为 $E$ 、磁感应强度为 $B$ 的场中运动时,其所受的磁场作用力由洛伦兹力公式给出,即

$$\frac{d\mathbf{m}_0 \mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (3)$$

当粒子能量大于本身静止能量的1/10时,应当考虑相对论对于粒子速度、质量等的影响,相对论对于粒子的影响根据洛伦兹变换公式给出,即

$$\frac{d\gamma m \mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (4)$$

式中: $\gamma$ 为相对论因子, $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。

给定质子能量为100 MeV,出射位置为高度500 km、经度0°、北纬30°处,出射角度为(60°,0°),即出射径向角为60°,出射轴向角为0°,运动时间为0.01 s。是否考虑相对论的高能质子在地磁场中运动轨迹图如图2所示。

可以发现,质子在地磁场中呈回旋运动,总体轨迹呈沿磁场方向螺旋前进的螺旋线,而由于相对论的作用,质子质量发生变化,变化约为11%,最终作用于洛伦兹力偏转半径时相差量级约为100 m,虽然运动时间很短,但由于质子速度接近光速,导致实际运动距离较长,最终导致差距较大。如图2所示,在运动时间为0.01 s时考虑相对论效应和未考虑相对论效应对质子运动有较大影响,经过计算得同一时刻下两种情况间最大距离可达20 km以上。

## 2 同步辐射对高能质子传输的影响

磁场中的高能粒子运动时受到洛伦兹力的作用产生垂直于运动方向的加速度,从而发生同步辐射,粒子在发

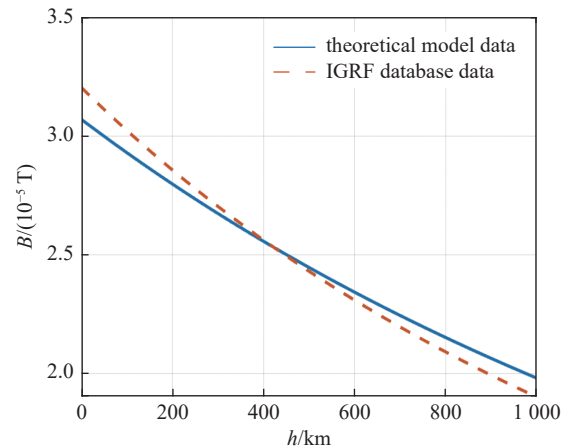


Fig. 1 Magnetic induction intensity diagram of theoretical model and IGRF database

图1 理论模型与IGRF数据库磁感应强度图

射同步辐射后损失能量, 影响后期洛伦兹偏转半径和运动轨迹, 故需予以考虑。

粒子在磁场中发射的同步辐射功率由下式确定<sup>[12]</sup>

$$P(t') = \frac{e^2 v^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} \quad (5)$$

给定质子能量为 100 MeV, 出射位置为高度 500 km、经度 0°, 北纬 30°处, 出射方向为 (60°, 0°), 即出射径向角为 60°, 出射轴向角为 0°, 运动时间为 0.01 s。是否考虑同步辐射的高能质子在地磁场中运动轨迹图如图 3 所示。

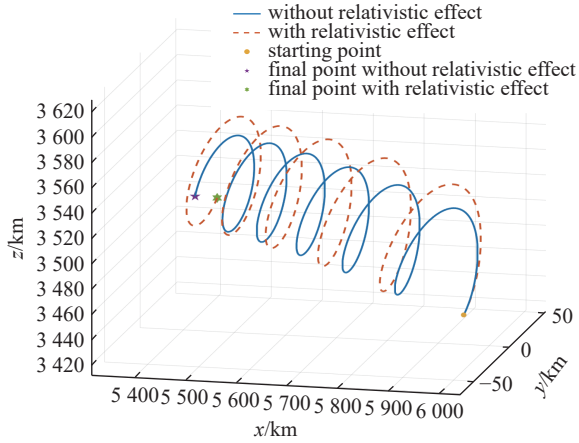


Fig. 2 Proton trajectory with and without relativistic effect  
图 2 考虑相对论效应和未考虑相对论效应的运动轨迹图

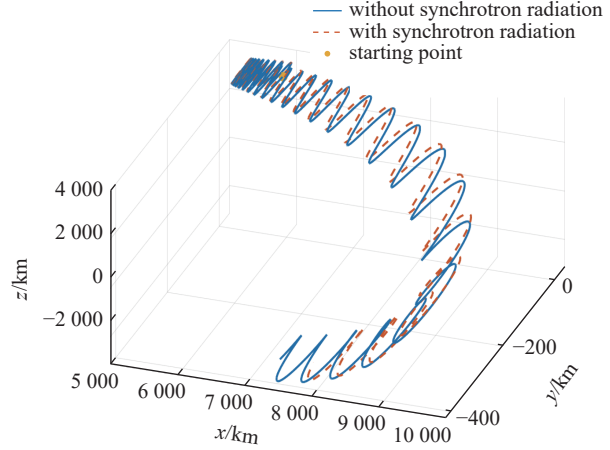


Fig. 3 Proton trajectory with and without synchrotron radiation  
图 3 考虑同步辐射和未考虑同步辐射的质子运动轨迹图

可以看出由于地磁场的磁镜效应, 质子出现弹跳运动; 同步辐射对质子运动轨迹的影响与相对论的影响相似, 是否考虑同步辐射对于质子的总体运动轨迹影响不大, 其对于质子的影响在运动初期并不明显, 但由于质子的速度接近光速, 仅 0.01 s 的时间两者之间的距离已经相差了 80 km 以上, 相差了将近一个螺旋, 可以说明同步辐射的影响会随着运动距离的增加而逐渐增加, 予以考虑。

### 3 空间中的单粒子运动模型建立及应用

#### 3.1 空间中的单粒子运动模型的建立

由于粒子在运动过程中同时受到地磁场偏转、相对论效应以及同步辐射的影响, 因此在综合计算中将时间离散化后需要在一个时间步长里同时进行三个效果的计算。由于时间步长取得很小, 在某一个时间步长内的计算可认为粒子的状态不发生变化。

首先使用上一时刻的最终速度计算由相对论效应引发的质量变化; 之后由于地磁场的作用发生洛伦兹偏转及同步辐射: 受到洛伦兹偏转会影响粒子的加速度, 受到同步辐射会影响粒子能量进而影响速度, 且偏转和辐射应是同步发生, 故选择上一时刻的速度及本时刻计算所得的质量同时计算偏转和辐射, 在计算的过程中需将粒子的运动在三维进行展开来分别计算每个方向的速度及加速度。再使用通过偏转计算得到的加速度以及通过辐射计算得到的速度来计算并保存本时刻的位移、计算并保存本时刻的最终速度并作为下一时刻的初始速度。

#### 3.2 空间中的单粒子运动模型的应用

建立笛卡尔坐标系, 并通过坐标变换将给定坐标中的经纬度换算为笛卡尔坐标系下的坐标, 给定初始点的坐标  $X_0$ 、目标点的坐标  $X_t$ 、质子的初始能量及出射角度, 将质子的运动在时间上进行离散化, 以  $dt = 10^{-8}$  s 为一个时间步长, 共走  $N$  步, 应用上述空间中的单粒子运动模型, 计算每个时刻粒子的坐标及速度并保存, 最后得到粒子运动坐标  $(X_p)$  及运动速度  $(v_p)$  的  $3*N$  维矩阵。

通过计算  $X_p$  中每个坐标点与目标点  $X_t$  的距离, 找到其中的最小值, 得到此出射速度方向下与目标点的最小距离; 通过使用每时刻粒子的速度即可计算得到每时刻粒子的能量, 与初始能量相比即可得到每时刻的能量损耗; 再找到距离最小值的坐标后, 其对应的步数  $N'$  即对应粒子运动的时间。

### 4 基于贝叶斯优化方法对高能质子传输的优化控制

高能质子在空间传输中由于受到地磁场影响, 其运动轨迹比较复杂, 难以实现准确控制。因此, 我们提出利用

贝叶斯优化方法对高能质子空间传输进行精确控制。贝叶斯优化是一种非常有效的全局优化算法,可以快速高效的找到相对最优的输入参数。目标函数通常是一个黑盒函数,它的精确表达式或导数是未知。高斯过程是贝叶斯优化的基础<sup>[13]</sup>。一个高斯过程由其均值函数和协方差函数唯一定义<sup>[14]</sup>。高斯过程假设给定参数为正态分布,并将具有不确定性的未知函数建模为替代函数。通过应用贝叶斯公式 $P(A|B) = P(B|A) * P(A) / P(B)$ ,可以从先验分布得到后验分布。 $P(A|B)$ 表示为后验分布,代表需要优化的分布。同时, $P(B|A)$ 代表目标函数, $P(A)$ 是未知函数的先验分布, $P(B)$ 代表证据或边际可能数据<sup>[15]</sup>。经过多次迭代,基于高斯过程的贝叶斯优化器会以一定的置信水平逼近函数,并逐渐增强置信水平,收敛到最优解。

以到目标点距离和质子出射角度的优化为例。将目标点坐标,出射角度及其对应的路径中每个点的坐标之间的关系建模为 $y = f(X)$ ,其中 $X$ 代表相关参数

$$X = X_1, \dots, X_n \tag{6}$$

设 $y = \sqrt{(X_t - X_p)^2}$ 为目标点与路径点之间的距离,可以将问题转化为寻找出射角度对应到目标点最小距离的优化问题 A, 即

$$X^* = \arg \min_{X \in A} f(X) \tag{7}$$

贝叶斯优化需要初始采样来获得数据集 $X_0$ 。给定均值函数和核函数,高斯过程回归然后通过使用均值向量和协方差矩阵来提供数据集 $X \sim f(X)$ 的简洁表示。

使用均值和核函数获得初始函数 $f_1$ ,但由于有限的的数据 $X_0$ 和高度不确定性,它可能不是最佳的。为了改进估计,除了先前的数据点,还引入了额外的观察数据点。这降低了不确定性,并提供了更好的设计变量。可以使用各种方法来选择下一个数据点,这可以使用高斯过程回归中的采集函数 $\alpha(X)$ 来确定<sup>[16]</sup>。在这项工作中,采用置信界限标准方法,以避免局部最优,并根据当前估计找到新的最优解。

贝叶斯优化流程如图 4 所示。

现给定质子能量为100 MeV,初始位置为距离地球表面高度 500 km、经度 0°、北纬 30°处,目标位置为距离地球表面高度 500 km、经度 0°、北纬 30.9°处,两者距离为 100 km,将初始条件代入上述的综合模型中,使用贝叶斯优化后得到结果如图 5 所示。

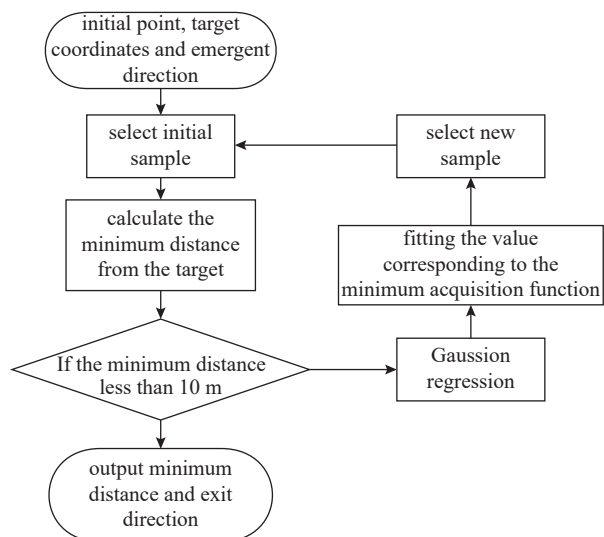


Fig. 4 Bayesian optimization flow chart

图 4 贝叶斯优化流程图

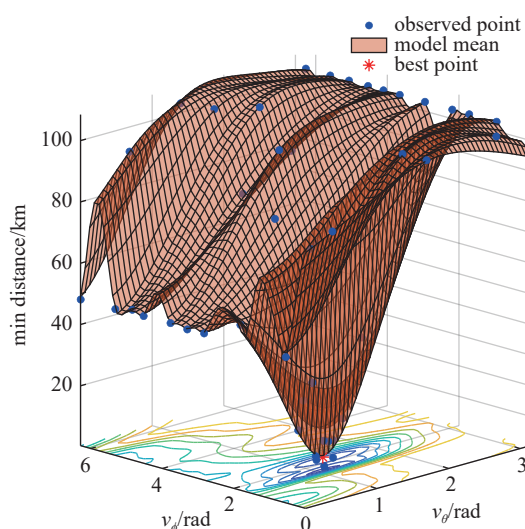


Fig. 5 Relationship between the minimum distance and the exit velocity direction

图 5 最小距离与出射速度方向关系图

图 5 给出了此情况下运动过程中与目标点的最小距离与出射方向的关系图,可以发现最小距离与出射方向之间不存在突变,其变化较平滑,最小值的区间比较明显,据此可以缩小出射方向的范围,进行下一步优化,优化得到三种最优出射情况。

图 6(a)给出了三个最小范围的最优出射方向,其 $(v_{\theta}, v_{\phi})$ 分别为 $(85.7^{\circ}, 120.8^{\circ})$ 、 $(99.5^{\circ}, 120.7^{\circ})$ 、 $(63.3^{\circ}, 98.6^{\circ})$ ,能

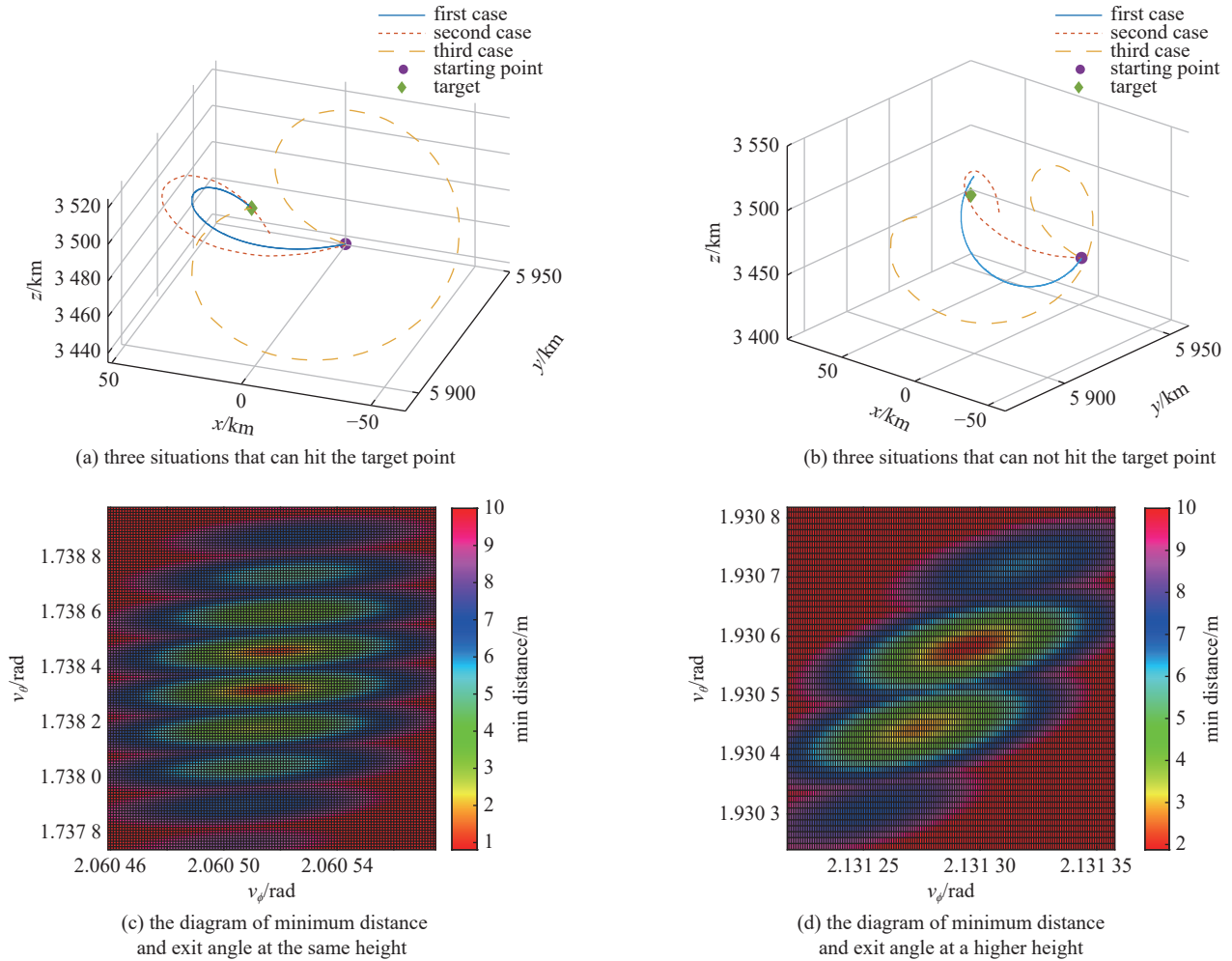


Fig. 6 Schematic diagram of optimization results

图 6 优化结果示意图

量损耗约为 4.99 MeV、4.99 MeV、4.98 MeV; 运动时间分别为  $1.078 \times 10^{-5}$  s、 $1.252 \times 10^{-5}$  s、 $2.895 \times 10^{-5}$  s; 距离目标点最小距离分别约为 5.55 m、1.15 m、6.56 m, 均可满足与目标点的最小距离小于 10 m 的限制条件。结合同步辐射的能量损耗, 粒子运动时间以及与目标点的最小距离三种评价标准, 我们可以分别给出能量损耗最小的出射方向、运动时间最短的出射方向以及与目标点有最小距离的出射方向: 结果表明第三个方向为能量损耗最小的方向, 能量仅损耗 4.98 MeV, 即图中黄色的曲线; 第一个方向为运动时间最短的出射方向, 耗时约  $1.078 \times 10^{-5}$  s, 即图中蓝色的曲线; 第二个方向为与目标点距离最近的出射方向, 最小距离为 1.15 m, 即图中红色的曲线。对于三个方向的综合评价, 首先, 我们在研究本方法的应用后认为能否击中目标对效果影响最大, 而与目标点的距离越小代表着击中目标的概率越大, 故认为最小距离应优先考虑; 其次, 在击中目标后粒子的能量代表了毁伤能力, 故粒子损耗能量应当第二考虑; 最后, 由于粒子的运动速度基本接近光速, 且通过实际结果发现运动绝对时间非常小, 故认为运动时间应最后考虑。对三种评价标准进行分权, 其中对最小距离赋权 70%, 对能量损耗赋权 20%, 对运动时间赋权 10%。以最优值为标准值计算相对偏差来综合评价三种出射方向的优劣, 最终得第二个出射方向为最优出射方向, 其加权平均相对偏差仅为 3.24%。图 6(b) 给出了三个无法满足限制条件的出射方向的粒子运动轨迹图, 即在这三种出射方向下, 粒子的运动路径与目标点的最小距离大于 10 m, 其  $(v_\theta, v_\phi)$  分别为  $(160.5^\circ, 120.4^\circ)$ 、 $(91.7^\circ, 114.6^\circ)$ 、 $(63.0^\circ, 103.2^\circ)$ , 距离目标点最小值分别约为 81 711 m、86 844 m、25 786 m。图 6(c) 给出了初始点与目标点相同高度下最小距离与出射方向的关系图, 可以发现小于 10 m 最小距离的范围呈类椭圆形堆叠分布, 且满足条件的角度范围只有 0.01°量级, 说明对于出射方向的掌控需要十分精细。图 6(d) 给出了初始点较目标点高 10 km 时最小距离与出射方向的关系图, 在出射高度上升后仍呈类椭圆形堆叠分布, 出射的角度相较相同高度时增加, 但类椭圆形数目减小, 范围减小, 说明在改变目标点与出射点的相对位置时最优出射方向的改变是连续变化的。

以第二个最优出射方向为例, 可以发现在迭代 5 次之后即可得到预期结果, 效率较高, 其优化过程中最小距离

与迭代次数的变化关系如图7所示。

现以目标点为坐标原点建立与原坐标系方向相同的球坐标系,在以目标点为球心的50 km半径圆上设置初始点,限制出射方向量为 $0.01^\circ$ 得出的最佳出射方向,可以发现当位置径向角取 $0^\circ$ 和 $180^\circ$ 时,位置轴向角的取值不会改变粒子的最优出射方向,出射方向与出射位置关系如表1所示。

## 5 结 论

本文综合考虑地磁场、相对论效应以及同步辐射之后建立了高能质子的单粒子空间运动模型,并通过贝叶斯优化的方式来实现给定能量下高能质子传输的精确控制,获得了能量损耗最少的最优解,即传输的最优路径,给出了满足限制条件的出射角度范围及变化趋势;并通过在目标点附近设置与目标点距离相同的一系列出射点,得到了出射位置改变对出射方向的影响规律。研究结果将为空间粒子束长程传输的相关引用提供参考和借鉴。

表 1 不同出射位置的最佳出射方向及最小距离

Table 1 Optimal emission direction and minimum distance at different emission positions

coordinate radial angle/ $^\circ$	coordinate axial angle/ $^\circ$	radial angle of exit/ $^\circ$	axial angle of exit/ $^\circ$	minimum distance from target/m
0	0	146.34	271.76	2.8
45	0	126.45	214.08	4.8
90	0	14.54	259.39	1.9
135	0	50.89	155.38	1.8
180	0	33.98	92.10	3.2
0	90	146.33	271.77	2.8
45	90	101.28	274.37	3.6
90	90	56.79	86.26	4.7
135	90	11.32	284.69	2.9
180	90	33.99	92.11	3.2
0	180	146.33	271.77	2.8
45	180	128.89	334.47	2.7
90	180	91.02	5.00	3.2
135	180	54.10	34.93	4.5
180	180	33.99	92.11	3.2
0	270	146.33	271.76	2.8
45	270	168.63	104.92	2.4
90	270	79.02	94.64	2.6
135	270	123.92	96.31	3.9
180	270	33.99	92.11	3.2

## 参考文献:

- [1] Neubert T, Gilchrist B, Wilderman S, et al. Relativistic electron beam propagation in the Earth's atmosphere: modeling results[J]. *Geophysical Research Letters*, 1996, 23(9): 1009-1012.
- [2] Krause L H. The interaction of relativistic electron beams with the near-earth space environment[D]. Ann Arbor: University of Michigan, 1998.
- [3] Mirnychev P V, Babich L P. Propagation of an electron beam in atmosphere at altitudes from 15 to 100 km: numerical experiment[J]. *High Temperature*, 2000, 38(6): 834-842.
- [4] Porazik P, Johnson J R, Kaganovich I, et al. Modification of the loss cone for energetic particles[J]. *Geophysical Research Letters*, 2014, 41(22): 8107-8113.
- [5] Willard J M, Johnson J R, Snelling J M, et al. Effect of field-line curvature on the ionospheric accessibility of relativistic electron beam experiments[J].

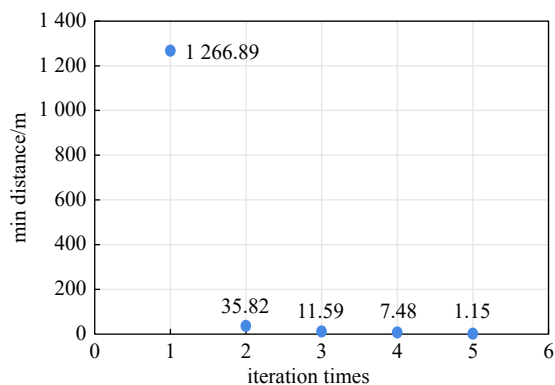


Fig. 7 Variation of min distance and iteration times

图 7 最小距离与迭代次数的关系图

- Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 2019, 6: 56.
- [6] Powis A T, Porazik P, Greklek-McKeon M, et al. Evolution of a relativistic electron beam for tracing magnetospheric field lines[J]. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 2019, 6: 69.
- [7] 郝建红, 王希, 张芳, 等. 随移动窗推进的带电粒子束团长程传输模拟分析[J]. *国防科技大学学报*, 2021, 43(5): 168-174. (Hao Jianhong, Wang Xi, Zhang Fang, et al. Simulation analysis of long-range propagation of charged particle beams propelled by moving window[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2021, 43(5): 168-174)
- [8] Hao Jianhong, Wang Xi, Zhang Fang, et al. The influence of magnetic field on the beam quality of relativistic electron beam long-range propagation in near-Earth environment[J]. *Plasma Science and Technology*, 2021, 23: 115301.
- [9] Yao Haibo, Yang Xiaohu, Zhang G B, et al. Stable transport of relativistic electron beams in plasmas[J]. *Journal of Plasma Physics*, 2022, 88: 905880105.
- [10] 钟海坚, 陈宗华, 赵炳炎. 基于 MATLAB 的地磁场中带电粒子运动模拟分析[J]. *大学物理实验*, 2021, 34(1): 83-86. (Zhong Haijian, Chen Zonghua, Zhao Bingyan. The motion simulation of charged particles in geomagnetic field based on MATLAB[J]. *Physical Experiment of College*, 2021, 34(1): 83-86)
- [11] Maus S. IGRF[EB/OL]. [2023-07-15]. <https://ccmc.gsfc.nasa.gov/models/IGRF~13/>.
- [12] 李承祖, 银燕, 赵晶, 等. 电动力学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2022: 305-307. (Li Chengzu, Yin Yan, Zhao Jing, et al. *Electrodynamics*[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 2022: 305-307)
- [13] Seeger M. Gaussian processes for machine learning[J]. *International Journal of Neural Systems*, 2004, 14(2): 69-106.
- [14] Snoek J, Larochelle H, Adams R P. Practical Bayesian optimization of machine learning algorithms[C]//Proceedings of the 25th International Conference on Neural Information Processing Systems. 2012: 2951-2959.
- [15] Srinivas N, Krause A, Kakade S, et al. Gaussian process optimization in the bandit setting: no regret and experimental design[C]//Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning (ICML). 2010: 1015-1022.
- [16] Brochu E, Cora V M, de Freitas N. A tutorial on Bayesian optimization of expensive cost functions, with application to active user modeling and hierarchical reinforcement learning[DB/OL]. arXiv preprint arXiv: 1012.2599, 2010.