



·超强激光激发的强场量子电动力学·

非线性啁啾频率对势阱产生正负电子对的增强^{*}

王 莉^{1,2}, 李烈娟², 麦丽开·麦提斯迪克², 谢柏松^{1,2}

(1. 北京市科学技术研究院 辐射技术研究所, 北京 100875; 2. 北京师范大学 核科学与技术学院, 北京 100875)

摘 要: 用计算量子场论方法研究了非线性啁啾频率对势阱中正负电子对产生的增强效应。研究了由静态势阱和动态势阱组成的组合势阱中产生的正负电子对的密度、产额和能谱等性质随着啁啾参数的变化, 分析了组合势阱的频谱和瞬时束缚态。发现非线性啁啾效应对低频区域比较敏感, 与固定频率情况相比可以使粒子数增加 2~3 倍。与组合势阱相比, 非线性啁啾效应对单个振荡势阱更敏感。在低频下单个振荡的势阱中正负电子对产额可提高多个数量级。这是因为在低频下单个振荡的势阱中, 主要通过量子隧穿过程产生的正负电子对数目非常低。非线性啁啾效应增加了高频场成分, 提高了多光子过程和动力学辅助机制。由于高频抑制作用, 所以非线性啁啾效应对高频区域粒子的增量不大, 甚至会抑制正负电子对的产生。

关键词: 正负电子对产生; 非线性啁啾频率; 计算量子场论; 多光子过程; 动力学辅助机制

中图分类号: O413

文献标志码: A doi: 10.11884/HPLPB202335.220066

Enhancement of nonlinear chirped frequency on electron-positron pair production in the potential well

Wang Li^{1,2}, Li Liejuan², Melike Mohamedsedik², Xie Baisong^{1,2}

(1. Institute of Radiation Technology, Beijing Academy of Science and Technology, Beijing 100875, China;

2. College of Nuclear Science and Technology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: Enhancement of nonlinear chirped frequency on electron-positron pair creation in the potential well is studied by the computational quantum field theory. The density, number and energy spectrum of electrons created under a single oscillating potential well and combined potential wells are investigated. The frequency spectrum and instantaneous bound states are also analyzed. It is found that nonlinear chirp effect is more sensitive to the low frequency region. When appropriate chirp parameters are selected, compared with the fixed frequency, the number of electrons created under combined potential wells can be increased by 2 to 3 times. For a single oscillating potential well, the number can be increased by several orders of magnitude. In the subcritical field at low frequencies, Schwinger mechanism dominates pair creation, and the production is very low. After modulation, the frequency spectrum widens. The high frequency component enhances the multiphoton processes and the dynamical assisted mechanism, while the ultrahigh frequency component inhibits pair creation.

Key words: electron-positron pair production, nonlinear chirped frequency, the computational quantum field theory, multiphoton processes, dynamically assisted mechanism

自从 1928 年狄拉克从理论上预测了正电子的存在^[1], 不久这一预言在 1933 年被安德森在实验中得到证实^[2], 强场真空中正负电子对的产生问题一直受到很多研究者的关注。经过 Sauter^[3], Heisenberg 和 Euler^[4], 以及 Schwinger^[5] 等人的早期研究, 目前已经发展了很多种理论方法, 如固有时方法^[5]、世界线瞬子技术^[6-9]、量子弗拉索夫方程 (quantum Vlasov equation, QVE) 求解方法^[10-12]、计算量子场论^[13-15]、狄拉克-海森堡-维格纳 (Dirac-Heisenberg-Wigner, DHW) 形式^[16-22] 和 Furry-picture quantization 方法^[23] 等等。

在恒定电场 E 中, 正负电子对的产生率正比于 $\exp(-\pi E_{\text{cr}}/E)$, 其中 $E_{\text{cr}} \approx 1.3 \times 10^{16}$ V/cm 是 Schwinger 临界场强,

* 收稿日期: 2021-03-10; 修订日期: 2022-06-13

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11875007, 11935008); 北京市科学技术研究院改革与发展项目 (13001-2114)

联系方式: 王 莉, 201731220001@mail.bnu.edu.cn。

通信作者: 谢柏松, bsxie@bnu.edu.cn。

对应激光的功率密度为 10^{29} W/cm², 这种产生正负电子对的过程为 Schwinger 机制^[5]。随着外场强度的减小, 隧穿率指数下降。在仅随时间变化的电场下, 正负电子对的产生阈值除了对激光强度的要求外, 也要求激光的持续时间大于等于 10^{-21} s^[24]。然而目前激光强度最高只能达到 $10^{22} \sim 10^{23}$ W/cm²^[25], 很难产生大量的可用于实验研究的正负电子对。虽然欧洲的 Extreme Light Infrastructure (ELI)^[26] 和俄罗斯的 Exawatt Center for Extreme Light Studies (XCELS)^[27] 将要使激光强度提升到 $10^{25} \sim 10^{26}$ W/cm², 但是距离临界强度还差好几个量级。在激光场中, 尽管量子真空可以通过吸收单个或多个高能光子产生正负电子对, 即多光子过程^[28-29], 但是其要求的激光频率也远远超出目前实验室的范围。因此真空粒子对的产生一直没有得到实验验证。通过把一个低频振荡的强场和一个高频振荡的弱场组合起来, 人们又发现了一种新的产生机制——动力学辅助机制^[30-32]。这种组合电场把 Schwinger 机制和多光子过程结合起来, 大大促进了正负电子对的产生。在著名的斯坦福直线加速器 (SLAC) 实验上曾用能量为 46.6 GeV 的低发射度的电子束与 TW 脉冲碰撞首次实验产生正负电子对^[33]。这个过程分为两步, 首先是激光光子被电子束背向散射到 GeV 的能量, 然后高能光子与几个激光光子之间发生碰撞产生正负电子对。这种光子-光子对撞产生正负电子对的过程又叫做 Breit-Wheeler 过程, 基于此原理, 光子对撞机实验的研究得以快速发展^[34]。

为了降低正负电子对产生的阈值, 近年来的理论研究主要聚焦于如何裁剪电磁场的时间和空间依赖性, 寻找最佳激光场的配置。在对激光脉冲的形状及载波包络对正负电子对产生的影响的研究中, 发现超高斯形状的脉冲优于高斯形状的脉冲^[35]。也有研究者基于 Sauter 势对不同的时间空间形状的场进一步研究^[36-39]。Jiang 等人^[40] 在对单个振荡的 Sauter 势阱的研究中发现, 随着振荡频率的增加, 正负电子对产生数目在阈值附近迅速增加, 但是当振荡频率增加到一定值时, 产生的电子数目迅速降低, 过高的频率对正负电子对的产生具有很强的抑制作用。由于通常研究的振荡频率是低于阈值的, 所以这种高频抑制效应不在考虑范围。Tang 等人^[41] 设计了由静电场和交替场组成的组合场, 发现对称的势阱比单边势垒中正负电子对的产额高, 并且叠加势阱优于单个势阱。另外, 啁啾脉冲放大技术的发现使得啁啾频率更具现实意义^[42]。通过啁啾脉冲堆积, 可以对脉冲进行任意整形^[43]。激光脉冲在光纤中放大时, 由于色散的原因在线性介质中引入了线性啁啾, 在非线形介质中引起了非线性频率调制^[44]。由于非线性自相位调制效应, 堆积脉冲的频谱有较大的变化, 也会产生非线性啁啾频率^[45]。另外电子对激光场的非线性散射产生的高次谐波表现出非线性啁啾特征^[46]。很多研究发现在适当的频率调制参数下, 啁啾频率对正负电子对的产生过程有增强效应^[47-51]。虽然线性啁啾形式常被用于研究对产生, 但是理论上也可以通过叠加多个不同频率的激光实现非线性啁啾频率。在频率啁啾下, 超高频的频率成分会激发高频抑制效应, 强低频和弱高频成分也促进了动力学辅助机制, 正负电子对的产生过程就变成多种机制的竞争过程。相对于单个振荡势阱, 频率啁啾效应对叠加势阱是否更加敏感? 在单个振荡的势阱和组合势阱中, 非线性啁啾效应对正负电子对产生数目的增强及对各种产生机制的影响是值得研究的问题。

本文主要用计算量子场论方法研究非线性啁啾频率对势阱中正负电子对产生过程的影响。通过数值计算, 优化了啁啾参数, 对不同的啁啾参数下物理机制的变化进行了分析和总结。通过对比单个静态势阱下的研究结果, 发现在低频率时, 非线性频率调制对单个振荡势阱中正负电子对数目的影响最大, 给出了详细的分析和解释。

1 计算量子场论方法简介

在量子场论中, 正负电子在势阱 $V(z, t)$ 中的时间演化算符 $\hat{\psi}(z, t)$ 满足 Dirac 方程^[13]

$$i\partial\hat{\psi}(z, t)/\partial t = [c\alpha_z\hat{p}_z + \beta c^2 + V(z, t)] \quad (1)$$

其中 α_z 和 β 为 Dirac 矩阵, c 为真空中光速, $V(z, t)$ 为 z 方向随时间 t 变化的外加强场。本方法采用原子单位制, 满足 $\hbar = e = m_e = 1$ 。现在我们引入正能级的产生算符 \hat{b}_p 和负能级的产生算符 \hat{d}_n^\dagger , 将场算符展开成如下形式

$$\hat{\psi}(z, t) = \sum_p \hat{b}_p(t) W_p(z) + \sum_n \hat{d}_n^\dagger(t) W_n(z) = \sum_p \hat{b}_p W_p(z, t) + \sum_n \hat{d}_n^\dagger W_n(z, t) \quad (2)$$

其中 p 和 n 分别代表正能态动量和负能态动量, $\Sigma_{p(n)}$ 代表对所有的正(负)能量的求和, $W_p(z) = \langle z|p\rangle$ ($W_n(z) = \langle z|n\rangle$)为无外场时自由粒子的正(负)能量本征态。需要注意的是, $W_p(z, t) = \langle z|p(t)\rangle$ ($W_n(z, t) = \langle z|n(t)\rangle$)是以自由粒子态为初始条件随时间演化以后的单粒子态。我们从式(2)可以得到

$$\hat{b}_p(t) = \sum_{p'} \hat{b}_{p'} U_{pp'}(t) + \sum_n \hat{d}_n^\dagger U_{pn}(t) \quad (3)$$

$$\hat{d}_n^\dagger(t) = \sum_{p'} \hat{b}_{p'} U_{np'}(t) + \sum_{n'} \hat{d}_{n'}^\dagger U_{nn'}(t) \quad (4)$$

$$\hat{b}_p^\dagger(t) = \sum_{p'} \hat{b}_{p'}^\dagger U_{pp'}^*(t) + \sum_{n'} \hat{d}_{n'} U_{pn'}^*(t) \quad (5)$$

$$\hat{d}_n(t) = \sum_{p'} \hat{b}_{p'}^\dagger U_{np'}^*(t) + \sum_{n'} \hat{d}_{n'} U_{nn'}^*(t) \quad (6)$$

其中 $U_{pp'}(t) = \langle p|\hat{U}(t)|p'\rangle$, $U_{p'n'}(t) = \langle p|\hat{U}(t)|n'\rangle$, $U_{nn'}(t) = \langle n|\hat{U}(t)|n'\rangle$, $U_{np'}(t) = \langle n|\hat{U}(t)|p'\rangle$, 时间演化算符满足 $\hat{U}(t) = \hat{T} \exp\left\{-i \int_0^t d\tau [c\alpha_z \hat{p}_z + \beta c^2 + V(z, \tau)]\right\}$ 。

在方程(2)中, 描述电子部分的场算符定义为 $\hat{\psi}_e(z, t) \equiv \sum_p \hat{b}_p(t) W_p(z)$ 。根据量子场论, 我们可以知道产生的电子的密度可以表示为

$$\rho(z, t) = \langle \text{vac} | \hat{\psi}_e^\dagger(z, t) \hat{\psi}_e(z, t) | \text{vac} \rangle = \sum_n \left| \sum_p U_{pn}(t) W_p(z) \right|^2 \quad (7)$$

通过对空间积分可得产生的电子数目

$$N(t) = \sum_p \sum_n |U_{pn}(t)|^2 \quad (8)$$

我们也可以得到产生的电子的动量谱

$$\rho_p(t) = \sum_n |U_{pn}(t)|^2 \quad (9)$$

经过以上理论推导, 我们得到了在一定场分布下真空产生粒子的几率密度和数目的具体表达式, 还可以得到产生粒子的能谱特性。在数值计算中, 我们首先用劈裂算符法对时间演化算符进行处理, 然后通过傅里叶变换和傅里叶逆变换对波函数进行演化, 最后得到我们想要的结果。

2 数值模拟与结果分析

2.1 单个振荡势阱

首先, 我们研究在单个振荡势阱中考虑非线性频率啁啾时正负电子对产生的情形。振荡势阱如下

$$V(z, t) = V_1 \sin[\omega(t)t] S(z) f(t) \quad (10)$$

其中势阱的空间结构为 $S(z) = \{\tanh[(z-D/2)/W] - \tanh[(z+D/2)/W]\}/2$, 势阱的宽度为 D , 势阱边缘的宽度为 W , 也对应着电场的宽度, 势阱深度振幅为 V_1 。势阱的振荡频率是关于时间的函数 $\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \sin[\Omega(t-t_0)]$, 啁啾频率为非线性啁啾形式, 其中 ω_0 为基频, $\Delta\omega$ 为啁啾参数, 表示频率随时间振荡的振幅, 取值范围应不大于基频, Ω 表示频率变化的快慢, t_0 为势阱打开过程所需要的时间。当 $\Omega \ll 1$ 时, 非线性啁啾退化为线性啁啾形式。时间相关的函数为 $f(t) = \sin[\pi t/2t_0] \theta(t; 0, t_0) + \theta(t; t_0, t_0+t_1) + \cos[\pi(t-t_0-t_1)/2t_0] \theta(t; t_0+t_1, 2t_0+t_1)$ 。它描述了组合势阱在 $0 \leq t < t_0$ 时缓慢开启, 在 $t_0 \leq t < t_0+t_1$ 时完全打开, 在 $t_0+t_1 \leq t < 2t_0+t_1$ 时缓慢关闭的过程。啁啾频率从 $t = t_0$ 时刻开始随时间变化。本小节中, 势阱深度振幅选取亚临界条件 $V_1 = 1.47c^2$, 势阱宽度、电场宽度、场开启时间等参数与文献 [33] 相同, 分别为 $D = 10/c$, $W = 0.3/c$, $t_0 = 5/c^2$, 场作用时间设为 $t_1 = 40\pi/c^2$, 数值模拟的空间尺寸为 $L = 2.0$, 这样就能统计到所有产生的电子。非线性啁啾参数设为 $\Omega = 0.2c^2$, 在场作用时间内选取四个频率变化周期。为了全面研究基频 ω_0 和啁啾参数 $\Delta\omega$ 对正负电子对产生过程的影响, 在下面的数值计算中, 我们对这两个参数分别选取了从 0 到临界值 $2.0c^2$, 并且 $\Delta\omega \leq \omega_0$ 。虽然在某些参数区域, 非线性频率可能超越临界频率, 但是在数值上研究超临界区域内正负电子对的产生过程也有一定的理论意义。

首先我们研究电子数目随啁啾参数的变化。图 1 描述了基频为 $\omega_0 = 0.5c^2$ 时单个振荡势阱下产生的正负电子对数目与啁啾参数 $\Delta\omega$ 的依赖关系。由于 $\Delta\omega \leq \omega_0$, 所以啁啾参数的取值范围从 0 到 $0.5c^2$ 。在固定频率 $\Delta\omega = 0$ 情况下, 单个振荡势阱中产生的电子数目为 0.06。随着啁啾参数 $\Delta\omega$ 的增加, 电子数目首先迅速增加, 然后振荡降低。当 $\Delta\omega = 0.33c^2$ 时, 电子数目达到最大 5.03, 比固定频率情况下增长了 83 倍。与低频振荡的势阱相比, 频率调制改变了频谱结构, 影响了产生机制, 从而促进了正负电子对的产生过程。我们把电子数

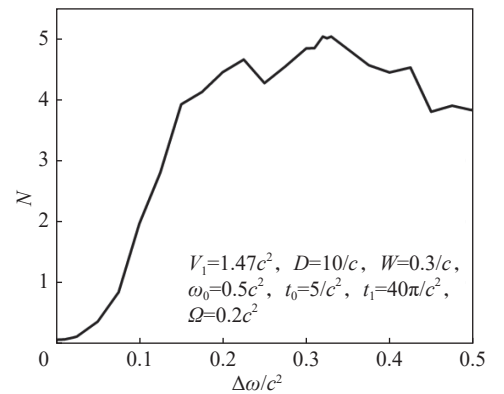


Fig. 1 Electron-positron number vs the chirp parameter in a single oscillating potential well

图 1 单个振荡势阱下正负电子对的数目与啁啾参数的依赖关系

目最大时的啁啾参数定义为最优啁啾参数 $\Delta\omega_{opt}$ 。当基频为 $0.5c^2$ 时,最优啁啾参数为 $\Delta\omega_{opt} = 0.33c^2$ 。对于不同的基频,最优啁啾参数有所不同。

在图2中我们给出了不同基频对应的最优啁啾参数,其他参数与图1相同。对于基频比较低的情况,最优啁啾参数与基频满足线性增长关系;随着基频的增加,最优啁啾参数在 $0.2c^2$ 至 $0.35c^2$ 之间波动;当基频接近临界频率时,单个振荡势阱的最优啁啾参数随着基频的增加迅速下降。在低基频条件下,正负电子对主要通过量子隧穿效应产生。隧穿率随着外加电场的降低呈指数减少,因此在亚临界条件下产生的电子数目极小。随着基频的增加,受频率调制效应影响,频谱出现低频、高频成分。其中高频部分激发多光子过程,强的低频成分与弱的高频成分则会激发动力学辅助机制。啁啾参数越大,调制后的频谱覆盖区域越大,因此低基频条件下最优啁啾参数与基频成正比。然而,过高的频率成分会对正负电子对的产生起到很强的抑制作用。因此,随着基频的增加,最优啁啾参数不仅不会继续增加,反而降低。

图3描述了单个振荡的势阱下产生的正负电子对数目随着基频变化情况,其他参数与图1相同。其中黑色曲线表示固定频率,红色曲线表示最优啁啾参数。对于固定频率的情况,在低频条件下几乎没有电子产生。这是因为亚临界条件下,量子隧穿率非常低。随着频率的增加,电子数目缓慢增长。当选取最优的啁啾参数时,随着基频的增加,电子数目首先迅速增长,然后在 $N = 5$ 附近波动。子图中采用了对数纵坐标。从子图可以发现,对于低频情况,啁啾效应可以使正负电子对数目提升4个数量级。随着频率的增加,啁啾效应对正负电子对的增强效应越来越不明显。

表1描述了单个振荡势阱中最优啁啾参数下与固定频率下产生的正负电子对的数目之比。当基频为 $0.1c^2$ 时,最优啁啾参数下产生的电子数目可以增加数个数量级。随着基频的增加,比值逐渐下降。当基频超过 $1.0c^2$ 时,非线性频率调制的增强效应迅速减弱。因此,在单个振荡势阱中,在低频情况下,非线性啁啾效应对正负电子对的增强效应更显著。

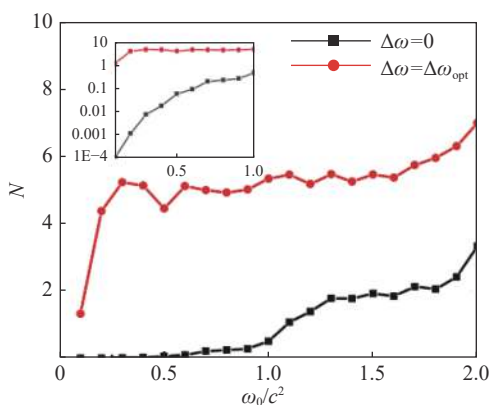


Fig. 3 Electron-positron pair number vs fundamental frequency in a single oscillating potential well

图3 单个振荡势阱下正负电子对数目随基频变化

图4描述了单个势阱下产生正负电子对数目随时间的演化。其中基频为 $\omega_0 = 0.1c^2$,其他参数与图1相同。黑色虚线代表固定频率,红色实线代表啁啾频率,啁啾参数为 $\Delta\omega = 0.1c^2$ 。在固定频率下,电子数目随着时间的增长周期性的增加和减小,最终为 $N = 0.0001$,这体现了正负电子对产生过程中的时间晶格结构。在一个慢变的亚临界势阱中,因为产生电子的能量太小而无法逃离电场区域,所以大量的正负电子对发生湮灭。在调制频率下,随着时间的增长,产生的电子数目剧烈振荡并显著增加,最终为 $N = 1.34$ 。然而,对于低频振荡情况,电子数目随着时间波动很大。考虑有效时间效应,在非线性的啁啾效应的影响下,正负电子对的产生数目依然可以提高两个数量级。

图5描述了单个振荡势阱的瞬时束缚态与时间依赖关系,其他参数与图4相同。图5(a)对应固定频率,图5(b)对应啁啾频率。对于固定频率情况,随着时间的增长,瞬时束缚态有两个振荡周期。在每个振荡周期中,离散的束

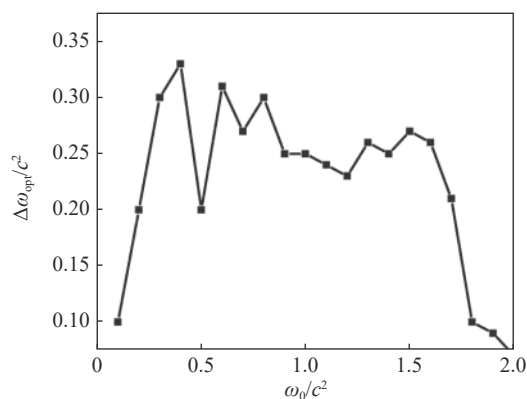


Fig. 2 Optimal chirp parameter vs fundamental frequency in a single oscillating potential well

图2 单个振荡势阱下最优啁啾参数与基频的依赖关系

表1 单个振荡势阱中最优啁啾参数下与固定频率下产生正负电子对数目的比值

Table 1 The ratio of electron-positron number created at the optimal chirp parameter to that at the fixed frequency in a single oscillating potential well

ω_0/c^2	R	ω_0/c^2	R
0.1	13 200	1.0	11.0
0.2	698	1.2	3.74
0.4	281	1.5	2.77
0.5	82.9	1.8	2.80
0.7	23.0	2.0	1.81

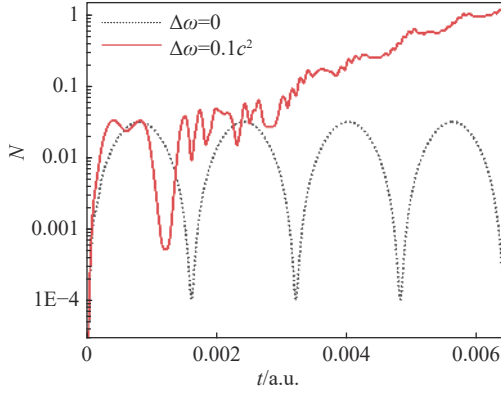


Fig. 4 Electron-positron pair number vs time in a single oscillating potential well

图 4 单个振荡势阱下正负电子对数目与时间依赖关系

束缚态先后从正和负能连续态中出来, 然后回到连续态中。与图 4 的黑色虚线进行对比, 可以发现束缚态能级掉入能带的期间, 势阱中产生的正负电子对数目会突然增加, 并且一旦离散束缚态消失, 已经产生的电子也随之消失了, 这是由于电子和正电子之间发生了湮灭。对于啁啾频率情况, 随着时间的增长, 瞬时束缚态随着时间变化时快时慢。对应于图 4 红色实线, 在束缚态缓慢变化期间, 电子数目不变; 当束缚态交替非常剧烈时, 电子数目随时间呈阶梯形增长。这是因为经过调制后的频谱中的高频成分促进了多光子过程。电子获得更高的能量后逃离势阱, 降低了与正电子之间的湮灭率, 因此粒子数迅速增长。

2.2 静态和动态的组合势阱

接下来我们研究静态和动态的组合势阱中正负电子对的产生问题。组合势阱的形式是

$$V(z, t) = V_1 \sin[\omega(t)t] S(z) f(t) + V_2 S(z) f(t) \quad (11)$$

其中势阱的空间结构 $S(z)$ 、时间相关的函数 $f(t)$ 、非线性啁啾频率函数 $\omega(t)$ 均与上一小节相同。静态势阱深度为 $V_2 = 1.47c^2$, 其他参数均与 2.1 节相同。

图 6 是组合势阱下正负电子对的产生数目与啁啾参数 $\Delta\omega$ 的依赖关系。当啁啾参数为 $\Delta\omega = 0$ 时, 振荡势阱的振荡频率恒为 $\omega_0 = 0.5c^2$, 产生的电子数目为 2.4。随着啁啾参数 $\Delta\omega$ 的增加, 电子数目先快速增加, 然后缓慢降低。当 $\Delta\omega = 0.2c^2$ 时, 电子数目达到最大值 6.4, 大约是固定频率下产生电子数目的 2.7 倍。与图 1 类似, 啁啾参数存在一个最优值。对于组合势阱, 当基频为 $0.5c^2$ 时, 最优啁啾参数为 $\Delta\omega_{\text{opt}} = 0.2c^2$, 小于单个振荡势阱的 $0.33c^2$ 。结果表明通过选择适当的啁啾参数, 啁啾效应可以促进正负电子对的产生。然而, 最终产生的电子数目不会随着啁啾参数 $\Delta\omega$ 的增加而单调增长。这是因为频率随着时间的变化会影响正负电子对的产生机制。

在图 7 中我们给出了不同基频对应的最优啁啾参数, 其他参数同图 6。对于基频比较低的情况, 最优啁啾参数与基频满足线性增长关系, 这个结论与单个振荡势阱的相同。随着基频的增加, 最优啁啾参数在 $0.25c^2$ 附近振荡并缓慢减小。在低基频条件下, 正负电子对主要通过量子隧穿效应产生的。隧穿率随着外加电场的降低呈指数减

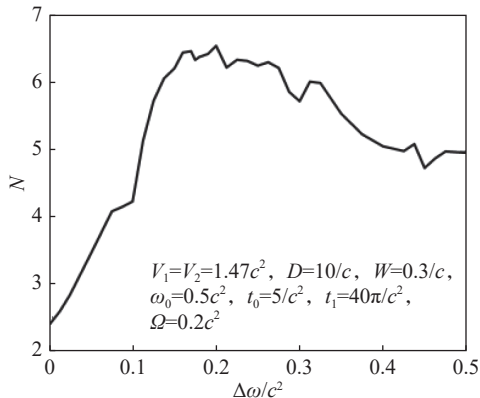


Fig. 6 Electron-positron number vs the chirp parameter in combined potential wells

图 6 组合势阱下正负电子对的数目与啁啾参数的依赖关系

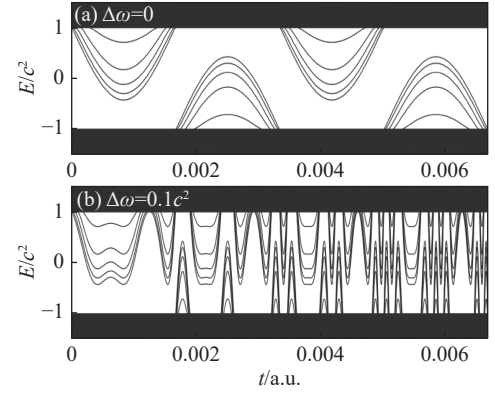


Fig. 5 Instantaneous bound states vs time in a single oscillating potential well

图 5 单个振荡势阱下瞬时束缚态与时间依赖关系

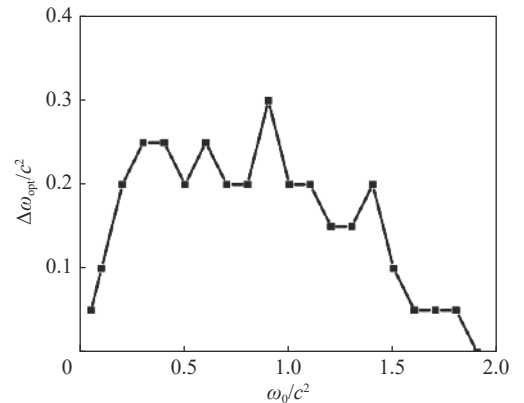


Fig. 7 Optimal chirp parameter vs fundamental frequency in combined potential wells

图 7 组合势阱下最优啁啾参数与基频的依赖关系

少,因此在亚临界条件下产生的电子数目极小。但是对于组合势阱,束缚态为正负电子对的产生提供桥梁。潜在负能连续态的束缚态能级提高隧穿率。因此组合势阱比单个振荡势阱在低频下产生的电子数目高。随着基频的增加,受频率调制效应影响,频谱出现低频、高频成分。其中高频部分激发多光子过程,强的低频成分与弱的高频成分则会激发动力学辅助机制。在本文后面我们详细分析了啁啾效应对频谱的影响。啁啾参数越大,调制后的频谱覆盖区域越大,因此低基频条件下最优啁啾参数与基频成正比。然而,过高的频率成分会对正负电子对的产生起到很强的抑制作用。因此,随着基频的增加,最优啁啾参数不仅不会继续增加,反而降低。

图 8 描述了固定频率和最优啁啾参数下组合势阱中产生的正负电子对数目与基频的依赖关系。对于固定频率情况,最终产生的电子数目在频率小于 $\omega_0 = 1.1c^2$ 的区域缓慢变化,此时 Schwinger 机制占主导地位。随着频率继续增长,电子数目的变化比较剧烈,这是因为多光子过程越来越强。在考虑频率啁啾情况下,当选择最优啁啾参数时,随着基频的增长,最终的电子数目在超低频区域迅速增加,然后缓慢增长。从图 8 可以看出啁啾效应对正负电子对的增量在低基频时比较大。当基频接近临界频率时,啁啾效应对正负电子对产生过程几乎没有增强作用。与图 3 相比,当不考虑频率啁啾效应时,组合势阱优于单个振荡势阱。尤其在低频区域,单个振荡势阱下的电子数目比组合势阱下的低好几个量级。然而,在最优啁啾参数下,这两种势阱模型产生的电子数目在一个数量级。结果表明,频率啁啾效应对单个振荡的势阱的影响更大。

表 2 展示了组合势阱中最优啁啾参数下与固定频率下产生的正负电子对的数目之比。当基频比较低时,啁啾效应可以使电子数目增长 2 至 3 倍。由于非线性啁啾频率随时间周期性振荡,所以啁啾参数 $\Delta\omega$ 不能大于基频 ω_0 。对于基频过小的情况,频率调制后频谱分布在低频区,对粒子的产生的增强作用不明显。但是当基频很高时,调制后的频谱覆盖到超高频区域,从而抑制了正负电子对的产生。因此随着基频的增加,频率调制对粒子数目提高的倍数逐渐减小。由于组合势阱在固定频率下产生的电子数目相对比较大,如图 8 所示,在低频时大于 2,所以频率调制效应没有使电子数目达到量级的增长。在后面部分我们研究了单个振荡势阱下啁啾效应的影响,发现相对于组合势阱,啁啾效应对单个振荡的势阱更加敏感。

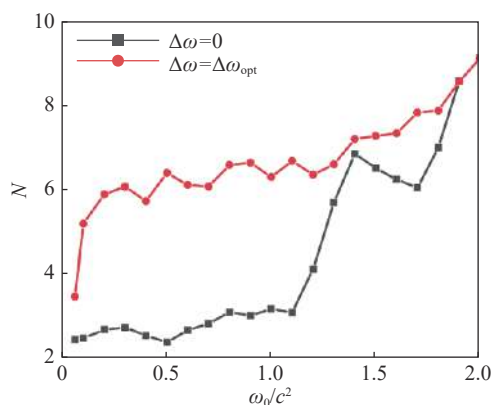


Fig. 8 Electron-positron number vs fundamental frequency in combined potential wells

图 8 组合势阱下正负电子对的数目与基频的依赖关系

表 2 组合势阱中最优啁啾参数下与固定频率下产生正负电子对数目的比值

Table 2 The ratio of electron-positron number created at the optimal chirp parameter to that at the fixed frequency in combined potential wells

ω_0/c^2	R	ω_0/c^2	R
0.06	1.42	1.0	1.99
0.1	2.09	1.2	1.54
0.3	2.22	1.5	1.12
0.5	2.68	1.8	1.12
0.7	2.15	2.0	1.00

下面我们举例研究非线性啁啾效应对产生的电子的密度和能量的影响,并对啁啾效应作用下的频谱进行分析。首先,我们在图 9 中描述了组合势阱产生的电子数目随时间的变化,其中势阱宽度为 $D = 4/c$,基频为 $\omega_0 = 1.5c^2$,其他参数与图 6 相同。在这个基频条件下,多光子过程在正负电子对产生过程中占主要地位。当 $\Delta\omega = 0$ 时,组合势阱的振荡频率是固定不变的,电子数目随着时间阶梯上升,上升的斜率随着时间的增长趋于稳定。当 $\Delta\omega = 0.05c^2$ 时,对于频率啁啾情况,电子数目随着时间的增长忽快忽慢,平均增长率大于固定频率下的平均增长率。这里势阱宽度选取更小的值,束缚态数目减少到只有三条,这样更方便分析能谱。

图 10 描述了组合势阱下产生的电子数目的时间空间分布情况。相关参数与图 9 相同。时间刻度选择为 $t_k = k \times 1.4 \times 10^{-4}$ a.u. ($k = 1, 2, 3, \dots, 50$)等 50 个时间间隔。在组合势阱内,静态势阱提供稳定的束缚态能级。位于负能连续态的粒子可以先占据离散的束缚态,再通过吸收光子跃迁到正能连续态上,进而形成一对正负电子对。在图 10(a)中,当振荡频率固定时,组合势阱产生的电子全部被束缚在势阱内部。由于束缚态能级是有限的,所以当粒子占据所有的束缚态,而又没有来得及跃迁到正能连续态上时,泡利阻塞效应就会增加;当频率调制时,如

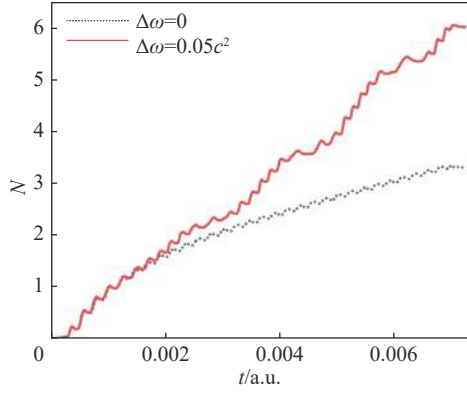


Fig. 9 Electron-positron number varies with time in combined potential wells

图 9 组合势阱下正负电子对的数目随时间的演化

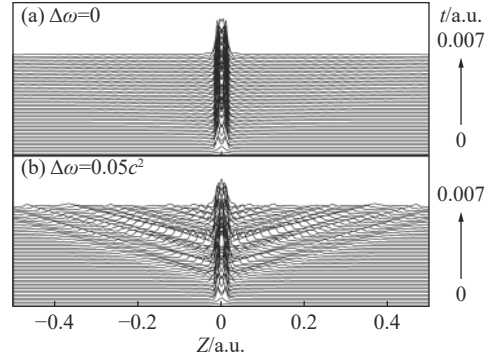


Fig. 10 Temporal and spatial distribution of the number of electrons created under combined potential wells

图 10 组合势阱下产生电子数目的时间空间分布

图 10(b), 随着时间的增长, 产生的电子不断地从势阱内逃出, 降低了泡利阻塞效应, 从而有利于正负电子对的产生。

图 11 描述了固定频率和啁啾频率下组合势阱中产生电子的能谱。其中黑色虚线表示固定频率, 红色实线代表啁啾频率。相关参数与图 9 相同。在此静态势阱条件下, 能带中有三个束缚态能级, 分别是 $E_1 = -0.263 1c^2$, $E_2 = 0.176 2c^2$, $E_3 = 0.669 8c^2$ 。在图 11(a) 中, 黑色虚线周期性出现少量离散的峰。这些峰分别对应着不同的多光子过程。在图 11(b), (c), (d) 中分别详细分析了单光子、双光子、三光子过程中能谱的变化。如图 11(b) 所示, 对于固定频率情况, 三个峰分别位于 $E_{p1} = 1.24c^2$, $E_{p2} = 1.74c^2$, $E_{p3} = 2.21c^2$ 。峰对应的能量与束缚态能级的关系满足 $E_{pi} = E_i + \omega_0 (i = 1, 2, 3)$ 。对于调制频率情况, 峰数目变多, 并且峰间差距不那么明显。此时吸收的光子的能量不再单一。例如, 峰值 $1.47c^2$, $1.95c^2$, $2.42c^2$ 分别对应着 $E_i + (\omega_0 + 0.2c^2)$, 其中 $i = 1, 2, 3$ 。由此可以分析, 吸收的单光子能量为 $\omega'_1 = \omega_0 + 0.2c^2$ 。此外, 由其他的峰 $1.66c^2$, $2.13c^2$ 可以发现还有其他更高能量的光子, 如 $\omega'_2 = \omega_0 + 0.4c^2$, 被吸收。对于双光子过程, 在图 11(c) 中, 固定频率情况下粒子能量的峰位于 $E_{pi} = E_i + 2\omega_0 (i = 1, 2, 3)$; 当考虑频率调制时, 峰 $2.90c^2$, $3.43c^2$ 分别对应 $E'_{pi} = E_i + \omega_0 + \omega'_1 (i = 1, 2)$, 说明通过吸收两个不同能量的光子产生了正负电子对。对于多光子过程, 吸收光子的组合更多, 峰变得更多, 并且峰值间差异很小。因此对于三光子过程, 如图 11(d) 频率啁啾情况下的能谱趋于光滑。

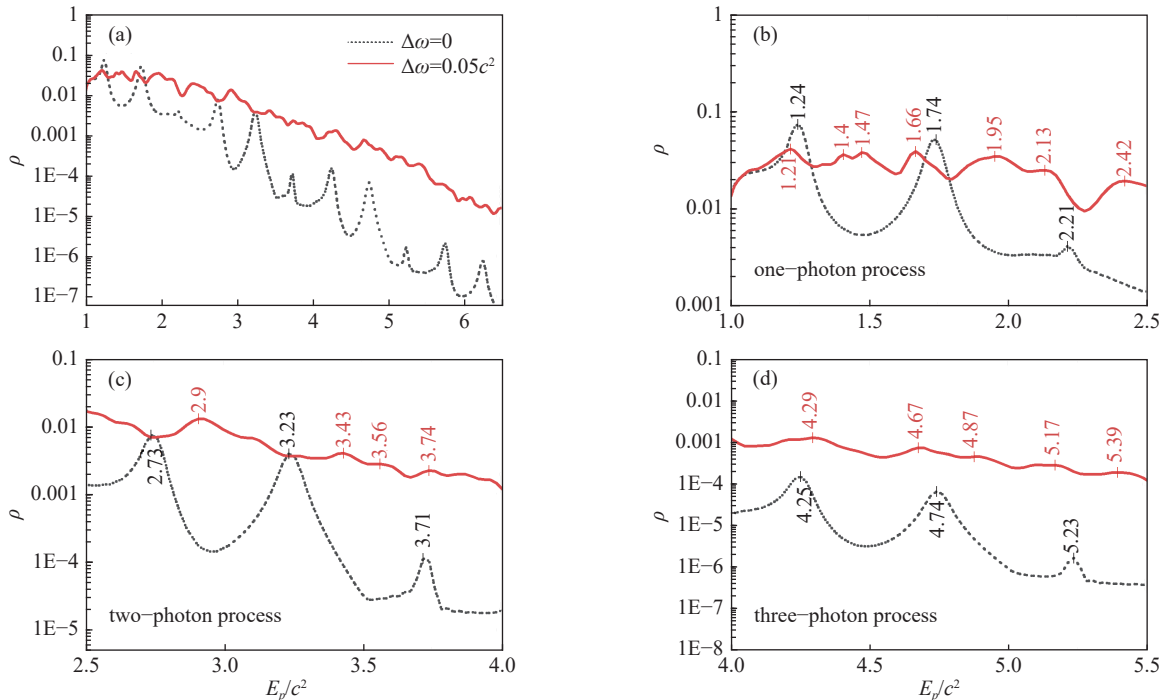


Fig. 11 Energy spectra of electrons created in combined potential wells

图 11 组合势阱下产生电子的能谱

图 12 展示了不同的基频下非线性频谱。啁啾参数为 $\Delta\omega = 0.05c^2$, 其他参数与图 9 相同。图 12(a) 中的频谱从 $\omega_0 = 1.5c^2$ 展开, 分别向左和向右每隔 $0.2c^2$ 出现次阶频率成分。其中, 频率 $1.7c^2, 1.9c^2$ 促进了多光子过程, 分别对应上一段能谱分析中多光子过程吸收的光子能量 ω'_1 和 ω'_2 。更高能量的频率成分, 如 $\omega_0 = 2.1c^2, 2.3c^2, 2.5c^2$ 等对正负电子对的增长并没有贡献, 甚至抑制正负电子对的产生。这也解释了为什么啁啾效应对高频下正负电子对产生的增长效果不大。同时, 啁啾效应减小基频 $\omega_0 = 1.5c^2$ 的幅值, 在一定程度上也减弱了多光子吸收, 这一点在图 11(b) 中体现在红色实线低于黑色虚线的能量区域。从图 12(b) 中可以发现, 对于低基频情况, 非线性啁啾使频谱从单一的低频率变成具有多个高次阶频率的组合频率。在低的固定频率下, 多光子过程发生概率极低。啁啾效应为多光子过程提供了多种频率的高频光子, 促进了多光子过程。其中高频成分的幅度随着频率的增大依次减小。强的低频成分和相对较弱的高频成分促进了动力学辅助机制。因此, 啁啾效应对低基频条件比较敏感。

3 结论与展望

本文用计算量子场论方法研究了非线性频率调制对单个振荡势阱和组合势阱中正负电子对产生的增强效应。通过数值计算, 我们得到了不同的啁啾参数下产生电子的数目、能谱以及密度等性质的时间空间演化。我们详细研究了不同势阱下瞬时束缚态的时间依赖关系, 结合啁啾频率下的频谱分析, 得到以下几条结论:

- (1) 对由静态势阱和动态势阱组成的组合势阱, 啁啾效应对正负电子对的产生具有增强作用。在一些合适的啁啾参数下, 产生的正负电子对数目可以提高 2 到 3 倍。
- (2) 对单个振荡的势阱, 对于不同的啁啾参数, 啁啾效应对正负电子对的产生数目有不同程度的提高。对于低频区域, 啁啾效应可以使正负电子对数目提高多个量级。
- (3) 与组合势阱相比, 在单个振荡的势阱中非线性频率啁啾效应对正负电子对的提高效应更强。
- (4) 最优啁啾参数与基频有关。随着基频的增高, 最优啁啾参数首先线性增加, 然后在一定范围内波动, 最后减小。

考虑频率调制, 势阱深度随时间的演化就会从周期均匀变为非均匀的。这就促发了势阱内部产生的电子逃出势阱的束缚, 泡利阻塞效应降低, 从而产生泵浦电子。在低频振荡的亚临界势阱中, 量子隧穿效应起主导作用, 并且正负电子对产生率非常低。非线性频率调制效应使频谱出现了相对弱的高频成分。这些高频成分激发多光子过程, 同时强低频成分和弱高频成分的组合也加强了动力学辅助机制。所以, 非线性频率调制效应大大促进了正负电子对的产生, 甚至使粒子数目达到多个量级的增长。对于高频情况, 非线性频率调制削弱了高频成分的强度, 降低了多光子过程。虽然增加了超高频成分, 但是这些新增的超高频成分又对正负电子对的产生具有抑制效应。因此, 非线性频率调制效应对高频情况的增长较弱, 甚至会抑制正负电子对的产生。

在本研究中, 选取的非线性啁啾形式可以通过不同强度的不同频率组合而成。如果换用其他的调频函数, 或许会有更丰富的结果。虽然实验中正负电子对的产生依然面临有很多问题, 但是采用强低频电场和弱高频电场的组合电场, 通过促进动力学辅助机制来增强正负电子对的产生, 这是一个很有前景的方向。频率调制对低频区域更加敏感, 这意味着在实验上可能通过频率调制观测到粒子对产生。

致谢 感谢北师大强场物理研究组的全体老师和同学。

参考文献:

- [1] Dirac P A M. The quantum theory of the electron. Part II[J]. Proc R Soc Lond A Math Phys Sci, 1928, 118(779): 351-361.
- [2] Anderson C D. The positive electron[J]. Phys Rev, 1933, 43(6): 491-494.
- [3] Sauter F. Über das verhalten eines elektrons im homogenen elektrischen feld nach der relativistischen theorie Diracs[J]. Z Phys, 1931, 69(11/12): 742-764.
- [4] Heisenberg W, Euler H. Folgerungen aus der Diracschen theorie des positrons[J]. Z Phys, 1936, 98(11): 714-732.

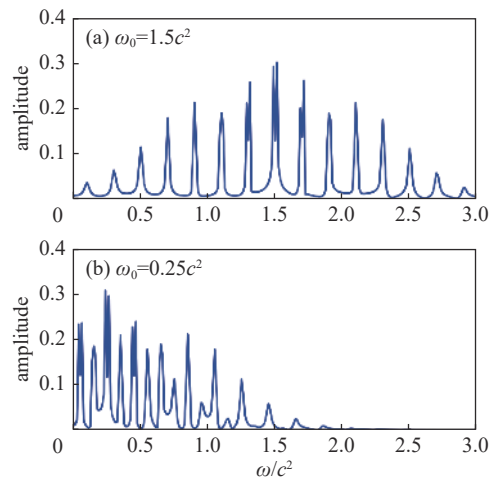


Fig. 12 Frequency spectra under nonlinear chirp

图 12 非线性啁啾下的频谱

- [5] Schwinger J. On gauge invariance and vacuum polarization[J]. *Phys Rev*, 1951, 82(5): 664-679.
- [6] Gies H, Klingmüller K. Pair production in inhomogeneous fields[J]. *Phys Rev D*, 2005, 72: 065001.
- [7] Dunne G, Wang Qinghai, Gies H, et al. Worldline instantons and the fluctuation prefactor[J]. *Phys Rev D*, 2006, 73: 065028.
- [8] Xie Baisong, Mohamedsedik M, Dulat S. Electron-positron pair production in an elliptic polarized time varying field[J]. *Chin Phys Lett*, 2012, 29: 021102.
- [9] Schneider C, Schützhold R. Dynamically assisted Sauter-Schwinger effect in inhomogeneous electric fields[J]. *J High Energy Phys*, 2016, 2016: 164.
- [10] Kluger Y, Eisenberg J M, Svetitsky B, et al. Pair production in a strong electric field[J]. *Phys Rev Lett*, 1991, 67(18): 2427-2430.
- [11] Alkofer R, Hecht M B, Roberts C D, et al. Pair creation and an X-ray free electron laser[J]. *Phys Rev Lett*, 2001, 87: 193902.
- [12] Abdukerim N, Li Z L, Xie B S. Enhanced electron-positron pair production by frequency chirping in one- and two-color laser pulse fields[J]. *Chin Phys B*, 2017, 26: 020301.
- [13] Krekora P, Cooley K, Su Q, et al. Creation dynamics of bound states in supercritical fields[J]. *Phys Rev Lett*, 2005, 95: 070403.
- [14] Lv Q Z, Liu Y, Li Y J, et al. Noncompeting channel approach to pair creation in supercritical fields[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, 111: 183204.
- [15] Wang Li, Wu Binbing, Xie Baisong. Electron-positron pair production in an oscillating Sauter potential[J]. *Phys Rev A*, 2019, 100: 022127.
- [16] Hebenstreit F, Alkofer R, Gies H. Particle self-bunching in the Schwinger effect in spacetime-dependent electric fields[J]. *Phys Rev Lett*, 2011, 107: 180403.
- [17] Kohlfürst C. Electron-positron pair production in inhomogeneous electromagnetic fields[D]. Graz: Universität Graz, 2015.
- [18] Xie Baisong, Li Ziliang, Tang Suo. Electron-positron pair production in ultrastrong laser fields[J]. *Matter Radiat Extremes*, 2017, 2(5): 225-242.
- [19] Kohlfürst C, Alkofer R. Ponderomotive effects in multiphoton pair production[J]. *Phys Rev D*, 2018, 97: 036026.
- [20] Ababekri M, Dulat S, Xie B S, et al. Chirp effects on pair production in oscillating electric fields with spatial inhomogeneity[J]. *Phys Lett B*, 2020, 810: 135815.
- [21] Kohlfürst C. Effect of time-dependent inhomogeneous magnetic fields on the particle momentum spectrum in electron-positron pair production[J]. *Phys Rev D*, 2020, 101: 096003.
- [22] Bialynicki-Birula I, Bialynicka-Birula Z. Time crystals made of electron-positron pairs[J]. *Phys Rev A*, 2021, 104: 022203.
- [23] Aleksandrov I A, Kohlfürst C. Pair production in temporally and spatially oscillating fields[J]. *Phys Rev D*, 2020, 101: 096009.
- [24] 任娜, 王加祥, 李安康, 等. 强激光场中真空极化效应[J]. *强激光与粒子束*, 2011, 23(1): 217-220. (Ren Na, Wang Jiaxiang, Li Ankang, et al. Vacuum polarization effect in intense laser fields[J]. *High Power Laser Part Beams*, 2011, 23(1): 217-220)
- [25] Yanovsky V, Chvykov V, Kalinchenko G, et al. Ultra-high intensity- 300-TW laser at 0.1 Hz repetition rate[J]. *Opt Express*, 2008, 16(3): 2109-2114.
- [26] ELI BEAMLINES[DB/OL]. <https://www.eli-beams.eu/>.
- [27] Exawatt Center for Extreme Light Studies[DB/OL]. <https://xcels.iapas.ru/news.html>.
- [28] Hubbell J H. Electron-positron pair production by photons: a historical overview[J]. *Radiat Phys Chem*, 2006, 75(6): 614-623.
- [29] Brezin E, Itzykson C. Pair production in vacuum by an alternating field[J]. *Phys Rev D*, 1970, 2(7): 1191-1199.
- [30] Schützhold R, Gies H, Dunne G. Dynamically assisted Schwinger mechanism[J]. *Phys Rev Lett*, 2008, 101: 130404.
- [31] Li Z L, Lu D, Xie B S, et al. Enhanced pair production in strong fields by multiple-slit interference effect with dynamically assisted Schwinger mechanism[J]. *Phys Rev D*, 2014, 89: 093011.
- [32] Nuriman A, Xie Baisong, Li Ziliang, et al. Enhanced electron-positron pair creation by dynamically assisted combinational fields[J]. *Phys Lett B*, 2012, 717(4/5): 465-469.
- [33] Burke D L, Field R C, Horton-Smith G, et al. Positron production in multiphoton light-by-light scattering[J]. *Phys Rev Lett*, 1997, 79(9): 1626-1629.
- [34] 李昂, 余金清, 陈玉清, 等. 光子对撞机产生正负电子对的数值方法[J]. *物理学报*, 2020, 69: 019501. (Li Ang, Yu Jinqing, Chen Yuqing, et al. Numerical method of electron-positron pairs generation in photon-photon collider[J]. *Acta Phys Sin*, 2020, 69: 019501)
- [35] Abdukerim N, Li Ziliang, Xie Baisong. Effects of laser pulse shape and carrier envelope phase on pair production[J]. *Phys Lett B*, 2013, 726(4/5): 820-826.
- [36] 吴广智, 王强, 周沧涛, 等. 双势阱产生正负电子对过程中的正电子波干涉与克莱因隧穿现象[J]. *物理学报*, 2017, 66: 070301. (Wu Guangzhi, Wang Qiang, Zhou Cangtao, et al. Positron wave interference and Klein tunnel during the production of pairs in the double-well potential[J]. *Acta Phys Sin*, 2017, 66: 070301)
- [37] Gong C, Li Z L, Li Y J. Enhanced pair creation by an oscillating potential with multiple well-barrier structures in space[J]. *Phys Rev A*, 2018, 98: 043424.
- [38] Sawut A, Dulat S, Xie B S. Pair production in asymmetric Sauter potential well[J]. *Phys Scr*, 2021, 96: 055305.
- [39] Su D D, Li Y T, Lv Q Z, et al. Enhancement of pair creation due to locality in bound-continuum interactions[J]. *Phys Rev D*, 2020, 101: 054501.
- [40] Jiang M, Lv Q Z, Sheng Z M, et al. Enhancement of electron-positron pair creation due to transient excitation of field-induced bound states[J]. *Phys Rev A*, 2013, 87: 042503.
- [41] Tang Suo, Xie Baisong, Lu Ding, et al. Electron-positron pair creation and correlation between momentum and energy level in a symmetric potential well[J]. *Phys Rev A*, 2013, 88: 012106.
- [42] Strickland D, Mourou G. Compression of amplified chirped optical pulses[J]. *Opt Commun*, 1985, 56(3): 219-221.
- [43] 林宏兔, 隋展, 王建军, 等. 啁啾脉冲堆积用于光脉冲整形[J]. *光学学报*, 2007, 27(3): 466-470. (Lin Honghuan, Sui Zhan, Wang Jianjun, et al. Optical pulse shaping by chirped pulse stacking[J]. *Acta Opt Sin*, 2007, 27(3): 466-470)
- [44] 王友文, 陈列尊, 章礼富, 等. 啁啾脉冲堆积宽带激光非线性传输时域调制特性[J]. *强激光与粒子束*, 2010, 22(8): 1823-1828. (Wang Youwen, Chen Liezun, Zhang Lifu, et al. Characteristics of temporal modulation in nonlinear propagation of broad-band lasers stacked by chirped pulses[J]. *High Power Laser*

[Part Beams](#), 2010, 22(8): 1823-1828)

- [45] 黄小东, 张小民, 李桂秋, 等. 啁啾脉冲堆积及其放大特性[J]. *强激光与粒子束*, 2009, 21(1): 71-75. (Huang Xiaodong, Zhang Xiaomin, Li Guiqiu, et al. Characteristic and amplification of stacked chirped pulse[J]. *High Power Laser Part Beams*, 2009, 21(1): 71-75)
- [46] 胡素兴, 徐志展, 韩申生, 等. 一维势场中电子对强激光场的非线性散射[J]. *强激光与粒子束*, 1996, 8(4): 535-540. (Hu Suxing, Xu Zhizhan, Han Shenshen, et al. Nonlinear scatter of intense laser pulse by the electron bound in one-dimensional potential[J]. *High Power Laser Part Beams*, 1996, 8(4): 535-540)
- [47] Olugh O, Li Z L, Xie B S, et al. Pair production in differently polarized electric fields with frequency chirps[J]. *Phys Rev D*, 2019, 99: 036003.
- [48] Gong C, Li Z L, Xie B S, et al. Electron-positron pair production in frequency modulated laser fields[J]. *Phys Rev D*, 2020, 101: 016008.
- [49] Li L J, Mohamedsedik M, Xie B S. Enhanced dynamically assisted pair production in spatial inhomogeneous electric fields with the frequency chirping[J]. *Phys Rev D*, 2021, 104: 036015.
- [50] Mohamedsedik M, Li L J, Xie B S. Schwinger pair production in inhomogeneous electric fields with symmetrical frequency chirp[J]. *Phys Rev D*, 2021, 104: 016009.
- [51] Dumlu C K. Schwinger vacuum pair production in chirped laser pulses[J]. *Phys Rev D*, 2010, 82: 045007.