



·粒子束及加速器技术·

附有高程约束的三维平差方法研究*

王小龙^{1,2,3}, 康 玲^{1,2,3}, 董 岚^{1,2}, 李 波^{1,2}, 门玲鸽^{1,2}, 罗 涛^{1,2}, 王 铜^{1,2},
梁 静^{1,2}, 何振强^{1,2}, 柯志勇^{1,2}, 马 娜^{1,2}, 卢 尚¹, 韩圆颖¹, 闫路平¹,
张露彦¹, 刘晓阳¹, 闫皓月¹, 李春华¹, 吴 蕾¹

(1. 中国科学院高能物理研究所, 北京 100049; 2. 散裂中子源科学中心, 广东 东莞 523803; 3. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘 要: 当前加速器准直主要采用激光跟踪仪进行三维空间位置测量, 三维测量数据用三维平差方法计算从理论上讲更为严密, 但在实践中却发现存在误差累积现象, 其中在高程方向的误差累积十分明显。为了控制三维平差高程方向的误差累积, 研究将大地水准面做为基准引入测量和数据处理过程之中, 获得基于大地水准面的高程测量数据, 用高程数据构建约束条件方程, 进行附有高程约束的三维平差。以激光跟踪仪为例给出了三维平差函数模型, 研究了约束方程的构建方法, 推导了附有高程约束的三维平差计算公式。研究了附有高程约束的三维平差函数模型的两种应用方法, 通过模拟计算展示了这两种方法对高程方向误差累积的控制效果。最后对一组实测数据采用多种平差方法进行计算对比, 结果显示附有高程约束的三维平差相比无高程约束的三维平差能够更有效的控制平差中高程方向的误差累积。

关键词: 加速器准直; 激光跟踪仪; 三维测量; 三维平差; 误差累积; 高程约束; 大地水准面

中图分类号: TL505

文献标志码: A

doi: 10.11884/HPLPB202234.210561

Research on three-dimensional adjustment with elevation constraints

Wang Xiaolong^{1,2,3}, Kang Ling^{1,2,3}, Dong Lan^{1,2}, Li Bo^{1,2}, Men Lingling^{1,2}, Luo Tao^{1,2}, Wang Tong^{1,2},
Liang Jing^{1,2}, He Zhenqiang^{1,2}, Ke Zhiyong^{1,2}, Ma Na^{1,2}, Lu Shang¹, Han Yuanying¹, Yan Luping¹,
Zhang Luyan¹, Liu Xiaoyang¹, Yan Haoyue¹, Li Chunhua¹, Wu Lei¹

(1. Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

2. Spallation Neutron Source Science Center, Dongguan 523803, China;

3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Laser tracker is the primary instrument used for carrying out three-dimensional position measurement in accelerator alignment. Theoretically, three-dimensional measuring data processed by three-dimensional adjustment is more rigorous, however, error accumulation is found in practice, especially in elevation direction, the error accumulation is very obvious. To control the elevation error accumulation of three-dimensional adjustment, a method using the geoid as a datum in the measurement and data processing is researched. The principle is to get the elevation measuring data based on the geoid and use the elevation data to construct the constraints equation then carry out the three-dimensional adjustment with elevation constraints. Take the laser tracker as an example, a three-dimensional adjustment function model is given, the construction method of the constraints equation is researched and the calculation formulas of the three-dimensional adjustment is derived. Two application methods of the three-dimensional adjustment function model with elevation constraints are studied and the effects in controlling the elevation error accumulation are showed by simulations. Finally, a group of measuring data are calculated and compared with various adjustment methods, the results show that the three-dimensional adjustment with elevation constraints can control the elevation error accumulation more effectively than the one without elevation constraints.

Key words: accelerator alignment, laser tracker, three-dimensional measurement, three-dimensional adjustment, error accumulation, elevation constraints, geoid

* 收稿日期: 2021-12-14; 修订日期: 2022-04-19

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目(12075264)

联系方式: 王小龙, wxl@ihep.ac.cn。

为了提高束流强度、减小束流损失,加速器物理对元件位置的准直精度提出了越来越高的要求。为了实现元件位置高精度准直,一方面要努力提高元件位置的测量精度,另一方面还要提高测量数据的处理精度。当前加速器元件位置测量普遍采用激光跟踪仪和水准仪进行三维坐标测量和水准高程测量^[1-5],测量数据处理方法采用平面和高程分开平差计算的二维加一维方法^[6]或全三维的平差计算方法^[7]。三维测量数据用三维平差方法计算从理论上讲更为严密^[8],但是在实践中却发现存在误差累积现象,随着测量长度的增加,测站数增多,三维平差结果会明显偏离合理值^[9]。

研究人员在大尺寸空间三维坐标测量和三维平差计算方面做了诸多探索工作,以期提高测量成果的精度和可靠性。美国国家同步辐射光源(NSLSII)在用跟踪仪测量环控制网三维坐标时,每一测站都依当地垂线方向建立了水平测站坐标系,应用New River Kinematics公司SA软件进行三维平差计算,在计算过程中保持了测站坐标系的水平信息,取得控制网相对点位误差平面方向0.05 mm、高程方向0.02 mm的测量成果^[10]。德国重离子研究中心(GSI)采用跟踪仪和水准仪对217 m环形加速器控制网进行了三维测量和高程测量,应用PANDA平差软件研究对比了附加高程约束的三维平差方法和考虑地球曲率的高程定向三维平差方法^[11]。张振虎^[12]研究了用跟踪仪结合全站仪测量上海软X射线自由电子激光装置控制网,将两种仪器观测数据一起做三维平差计算的方法,弥补了跟踪仪角度观测值精度不够高的问题。马下平^[13]研究了引入附加系统参数的三维平差方法,使系统误差在平差中得到自动补偿,获得更加准确、可靠的平差结果。张福民等^[14]提出了一种应用测量点拟合平面,用平面方程作为约束提高三维测边网平差精度的方法,缺点是现实中所能构建的平面基准太小,平面基准上的测量点也较少,约束效果较弱,不适合大范围测量。蔡国柱等^[15]、王巍^[16]研究了以高程网平差结果作为约束条件,用SA软件实现控制网测量数据三维平差的方法,使平差结果更为可靠。

受已有研究成果的启发,为了提高三维观测数据处理精度、控制误差累积,一方面可以引入更高精度测量方法;另一方面可以引入测量基准,构建约束条件方程,从而使平差参数的误差在计算过程中能够得到相应的控制。跟踪仪虽然是典型的高精度大尺寸空间测量仪器,但是其单站所能测量的范围还是十分有限,大范围搭接测量时容易形成误差累积。如果能够为仪器各站测量提供覆盖全局或大范围的测量基准,则可使该基准范围内的测站有相对于共同基准的测量值,利用相对于共同基准的测量成果构建约束条件,可为抑制误差累积问题提供一条解决途径。大地水准面是一覆盖全球的天然基准面,基于大地水准面的水准高程测量其精确性和可靠性已经得到普遍认可。应用仪器设站进行三维测量时,在各测站都相对于大地水准面置平仪器建立测站水平坐标系,可使不同测站的测量点高程观测值有共同的测量基准。本文提出了一种以大地水准面作为测量基准,附有高程约束的三维平差方法,用来解决三维平差高程方向的误差累积问题。其基本思想是用测量点的水准高差观测成果建立约束方程,根据测量点与测站坐标系的几何关系在约束方程中代入测站参数,从而实现用水准高差观测成果约束测站参数的目的。下面将分别对该方法的平差模型、应用方法、应用效果展开介绍,最后通过应用不同平差方法对同一组实测数据的对比计算对该方法进行验证。

1 附有高程约束的三维平差模型

平差模型体现了观测数据与平差参数之间的函数关系,需要根据观测数据的获取方式建立观测数据与平差参数的函数模型。针对观测对象的特点还可以利用已知条件构建含有平差参数的约束方程,提高平差的精度和可靠性。跟踪仪为当前加速器三维坐标测量的主力仪器,下面将分别介绍基于跟踪仪测量的三维平差函数模型和约束函数模型的构建方法。

1.1 三维平差函数模型

以跟踪仪测量加速器隧道控制网为例说明观测数据的获取方法和平差参数与观测数据的函数关系。如图1所示,某一加速器装置的控制网包含有 n 个控制点,采用跟踪仪转站搭接测量方法共测量了 m 站,相邻站之间有若干公共测量点。设某一控制点 i 在装置坐标系和第 k 测站坐标系中的坐标分别为 (X_i, Y_i, Z_i) 和 (X_{ki}, Y_{ki}, Z_{ki}) ,第 k 测站坐标系原点即站点在装置坐标系中的坐标为 (X_k, Y_k, Z_k) ,把装置坐标系变换到与第 k 测站坐标系坐标轴方向相同的旋转矩阵为 M , $(\theta_{xk}, \theta_{yk}, \theta_{zk})$ 为矩阵 M 的旋转变换角度参数。

跟踪仪采用球坐标测量原理,通过测量水平角 H ,垂直角 V 和斜距 S 得到控制点 i 在测站坐标系中的坐标,如图2所示。

则有如下函数关系成立

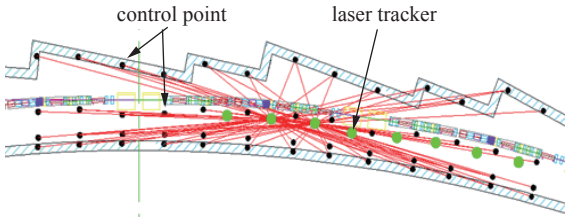


Fig. 1 Laser tracker measures the tunnel control network
图1 跟踪仪测量隧道控制网

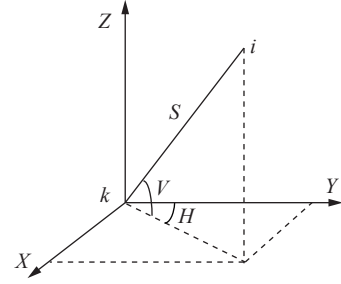


Fig. 2 Laser tracker coordinate measuring principle
图2 跟踪仪坐标测量原理

$$\begin{bmatrix} X_{ki} \\ Y_{ki} \\ Z_{ki} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} X_i - X_k \\ Y_i - Y_k \\ Z_i - Z_k \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{cases} S_{ki} = \sqrt{X_{ki}^2 + Y_{ki}^2 + Z_{ki}^2} \\ H_{ki} = \arctan\left(\frac{X_{ki}}{Y_{ki}}\right) \\ V_{ki} = \arctan\left(\frac{Z_{ki}}{\sqrt{X_{ki}^2 + Y_{ki}^2}}\right) \end{cases} \quad (2)$$

式中： S_{ki} 为站点 k 到点 i 的斜距观测值； H_{ki} 为 i 点水平角观测值； V_{ki} 为 i 点垂直角观测值。

将式(1)代入式(2)，可得第 k 测站中点 i 观测方程的待求参数：站点坐标 (X_k, Y_k, Z_k) 、矩阵 \mathbf{M} 的角度参数 $(\theta_{xk}, \theta_{yk}, \theta_{zk})$ 、控制点坐标 (X_i, Y_i, Z_i) 与观测值的函数关系。为了便于叙述，将表达测站坐标系位置和姿态的 6 个参数 (X_k, Y_k, Z_k) 和 $(\theta_{xk}, \theta_{yk}, \theta_{zk})$ 归为测站参数。

对于所有测站控制点的观测值，观测方程可抽象为： $\mathbf{L} = f(\bar{\mathbf{X}}) + \mathbf{A}$ ，其中 \mathbf{L} 为观测值向量， $\bar{\mathbf{X}}$ 为装置坐标系中待求参数真值向量， \mathbf{A} 为观测误差向量。取真值 $\bar{\mathbf{X}}$ 的充分近似值 \mathbf{X}^0 ，令 $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^0 + \hat{\mathbf{x}}$ ，按泰勒公式线性化展开： $\mathbf{L} - f(\mathbf{X}^0) = \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}$ ，其中 $\mathbf{B} = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}|_{\mathbf{X}^0}$ ，得到误差方程

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \quad (3)$$

式中： \mathbf{V} 为观测值改正数向量； \mathbf{B} 为系数矩阵； $\hat{\mathbf{x}}$ 为待求参数近似值改正数向量； $\mathbf{l} = \mathbf{L} - f(\mathbf{X}^0)$ 为常数项。

1.2 高程约束平差函数模型

为了引入大地水准面作为全局测量和数据处理的基准，需要建立测量数据与大地水准面之间的几何约束关系。水准测量可以获得测量点之间基于大地水准面的高差观测值，考虑应用高差观测值建立约束函数模型。跟踪仪在做三维测量时既可以依当地大地水准面方向置平仪器在水平坐标系中测量，也可以不用置平仪器直接测量。为了获得基于大地水准面的高差观测值，需要将跟踪仪测站坐标系的高程轴调整至当地大地水准面法线方向上，建立水平测站坐标系，在水平测站坐标系中测量出测量点相对于测站坐标系原点的高差值。

假设在某一坐标系 g 中， XY 为平面方向， Z 为高程方向。 D_{gij} 为直接观测或由观测值计算得到的坐标系 g 中点 i 相对于点 j 的高差值， (X_i, Y_i, Z_i) 和 (X_j, Y_j, Z_j) 为点 i 和点 j 在装置坐标系中的坐标， $\mathbf{R}_g = [-\sin\theta_{yg} \quad \cos\theta_{yg} \quad \sin\theta_{xg} \quad \cos\theta_{xg} \quad \cos\theta_{yg} \quad \cos\theta_{xg}]$ 为由装置坐标系变换到与 g 坐标系 Z 轴方向相同的旋转矩阵中高程值 Z 对应的计算矩阵， θ_{xg}, θ_{yg} 分别为绕坐标系 X 轴和 Y 轴的旋转角度，则有如下函数关系成立

$$\mathbf{D}_{gij} = \mathbf{R}_g \begin{bmatrix} X_i - X_j \\ Y_i - Y_j \\ Z_i - Z_j \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中：待求参数为 $\theta_{xg}, \theta_{yg}, (X_i, Y_i, Z_i)$ 和 (X_j, Y_j, Z_j) 。

对于所有坐标系 $g=1, 2, \dots$ 中的高差值，函数方程可抽象为 $\mathbf{D} = f_D(\bar{\mathbf{X}}_D) + \mathbf{A}_D$ ，其中 \mathbf{D} 为高差值向量， $\bar{\mathbf{X}}_D$ 为待求参数真值向量， \mathbf{A}_D 为误差向量。线性化后可以得到高差函数方程的误差方程

$$\mathbf{V}_D = \mathbf{B}_D \hat{\mathbf{x}}_D - \mathbf{l}_D \quad (5)$$

式中: V_D 为全部高差值的改正数向量; B_D 为系数矩阵; \hat{x}_D 为全部高差函数方程待求参数的近似值改正数向量; $l_D = D - f_D(X_D^0)$ 为常数向量; X_D^0 为 \bar{X}_D 的近似值。

以高差值改正量最小作为平差约束条件建立约束方程, 即

$$V_D^T V_D = \min \quad (6)$$

对其求极值得

$$\frac{\partial V_D^T V_D}{\partial \hat{x}_D} = 2V_D^T \frac{\partial V_D}{\partial \hat{x}_D} = V_D^T B_D = 0 \quad (7)$$

转秩得

$$B_D^T V_D = 0 \quad (8)$$

式中: B_D^T 通常为行不满秩矩阵, 为了进行后面的计算需要将其变换成行满秩矩阵。设有初等行变换矩阵 p 和初等列变换矩阵 q , 有

$$pB_D^T q q^{-1} V_D = \begin{bmatrix} A & \times \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q^{-1} V_D = 0 \quad (9)$$

式中: A 为一行满秩矩阵。取式(9)不为零的行得 $\begin{bmatrix} A & \times \end{bmatrix} q^{-1} V_D = 0$, 令 $\begin{bmatrix} A & \times \end{bmatrix} q^{-1} = C'$, 得 $C' V_D = C' (B_D \hat{x}_D - l_D) = C' B_D \hat{x}_D - C' l_D = 0$ 。令 $C'' = C' B_D$, $W_D' = -C' l_D$, 得

$$C'' \hat{x}_D + W_D' = 0 \quad (10)$$

参数 \hat{x}_D 为式(3)待求参数 \hat{x} 的子集, 为了统一参数向量, 将 \hat{x}_D 替换为 \hat{x} , 并令 \hat{x}_D 中没有的参数对应的系数矩阵元素为 0, 将式(10)改写为

$$C \hat{x} + W_D = 0 \quad (11)$$

将式(3)与式(11)联立, 得到附有高程约束的三维平差函数模型

$$\begin{cases} V = B \hat{x} - l \\ C \hat{x} + W_D = 0 \end{cases} \quad (12)$$

按照附有限制条件的间接平差原理^[17]可解得

$$\hat{x} = (N_{BB}^{-1} - N_{BB}^{-1} C^T N_{CC}^{-1} C N_{BB}^{-1}) W - N_{BB}^{-1} C^T N_{CC}^{-1} W_D \quad (13)$$

式中: $N_{BB} = B^T P B$, $W = B^T P l$, $N_{CC} = C N_{BB}^{-1} C^T$, P 为观测值向量的权阵。

2 应用方法及仿真

以加速器准直控制网测量数据处理为例探讨附有高程约束的三维平差函数模型的应用方法和效果。由于现实中测量总是带有误差的, 因此控制网的真值无法得到。为了直观的比较控制网测量数据三维平差结果相对于控制网真值的误差, 可以采用模拟计算的方法, 比较三维平差结果相对于控制网设计值的误差。方法是按照加速器隧道网常用的布设方案设计控制点坐标, 按照跟踪仪的测量方式生成每一站的模拟观测值, 用模拟观测值做平差计算, 比较平差结果与控制点设计坐标之差。

在控制网设计方案中加入地球曲率对控制网形状的影响。控制网设计方案: 将地球表面简化成一球面, 沿球面设计一直线加速器隧道控制网。控制网沿隧道分段布设, 每段 4 个控制点如图 3 所示, 其中地面两点相距 2.5 m, 墙上两点相距 6 m, 墙上点距地面 1.8 m 高。相邻段之间距离 6 m, 一共 34 段, 总长 198 m。控制网坐标系(即装置坐标系)原点位于第一段控制网中靠近加速器设备的地面点上, 坐标系方向: 取过控制网坐标系原点与大地水准面相切的水平面为 XY 平面, 取原点处大地水准面法线方向为高程轴 Z 方向, Y 为束流方向同时也是隧道走向, X 垂直于束流方向, 右手坐标系。设计出所有控制点在控制网坐标系中的坐标。

控制网测量方案: 应用跟踪仪转站搭接测量方案, 依次在两段控制网之间设站, 设计出控制网坐标系中所有站点位置的坐标, 共测 33 站。每站依球形大地水准面建立水平测站坐标系, 前测三段后测三段控制网, 采用蒙特卡罗方法生成每站测量点的模拟测量值^[18]。根据杨凡^[19]、杨振^[20]、梁静等^[21]对跟踪仪测量精度的研究, 按照测距固定误差 0.015 mm, 测距比例误差 2 $\mu\text{m}/\text{m}$, 水平角精度 2", 垂直角精度 3" 的边角观测精度生成模拟测量值。

为了验证附有高程约束的三维平差对提高数据处理精度的效果, 用同一套模拟测量数据分别按照无高程约束

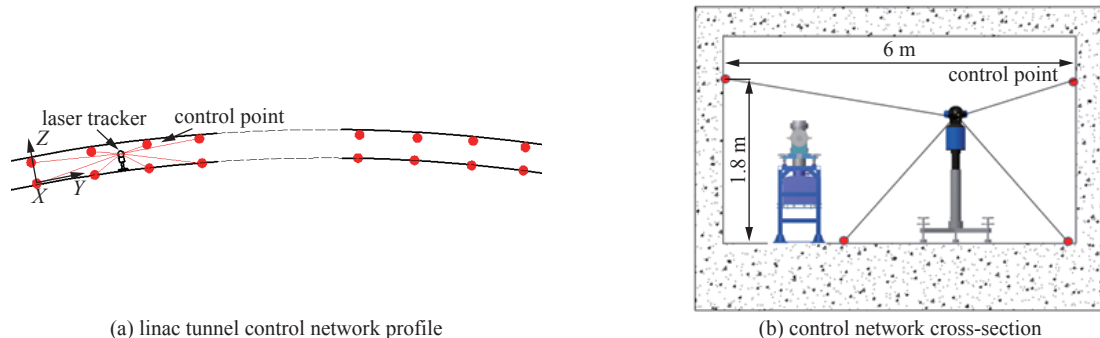


Fig. 3 Linac tunnel control network
图3 直线隧道控制网

的三维平差和附有高程约束的三维平差两种方法进行计算对比。两种平差计算都以第1段控制网中靠近设备的地面点XYZ坐标,该段中另一地面点的Z坐标和第34段控制网中靠近设备的地面点XZ坐标设计值作为起算数据。图4为采用式(3)无高程约束的三维平差方法计算时平差结果与设计坐标之差。

可以看到,对于198 m长直线加速器控制网三维平差结果,其沿束流方向的误差 ΔY 最小。由于直线控制网两端横向X和高程Z都被已知坐标约束,因此误差累积主要出现在控制网的中段,高程Z最大误差可达0.5 mm以上,横向X误差范围从-0.135 mm到0.167 mm。

采用式(12)附有高程约束的三维平差方法进行计算,首先试验了以每站测量的控制点高程观测值做约束的方法。对照式(4),取测站 $g(g=1, 2, \dots, 33)$ 测得的各个控制点 i 的高程观测值为 D_{gij} ; θ_{xg}, θ_{yg} 为由控制网坐标系变换到高程轴与测站 g 坐标系高程轴方向相同的旋转矩阵角度参数; (X_i, Y_i, Z_i) 和 (X_j, Y_j, Z_j) 分别为控制点 i 和测站坐标系原点 j 在控制网坐标系中的坐标。平差结果表明,直接以每一站的高程观测值做约束并不能控制住平差中高程方向的误差累积,这是因为虽然各站都依大地水准面垂线方向建立了水平测站坐标系,但是在平差中没能利用这种关系建立起测站之间的强约束。式(4)中由待求参数计算各站的高程观测值时需要经过旋转变换 R_g ,由于没能有效控制住各站的待求参数 θ_{xg}, θ_{yg} ,因此大地水准面在平差过程中没能发挥出约束基准的作用。

为了引入大地水准面作为约束基准,研究了两种实现方法:第一种是根据测站所在位置的大地水准面法线方向确定公式(4)中 θ_{xg}, θ_{yg} 的角度值,这里简称其为高程定向法。第二种是先获得控制点基于某起算点的水准高程值,建立起控制点之间以大地水准面为基准的高程方向的固定关系,然后为满足平差模型中高程约束值的形式要求,将其转换成某空间直角坐标系中的高程值,这里简称其为水准高程转换法。下面将分别介绍这两种方法的具体实施方案和平差效果。

2.1 高程定向法

对于高程定向法,当大地水准面在控制网坐标系中的模型已知时,根据站点的近似坐标可以计算出站点处垂线矢量的近似方向。由于模型误差、仪器置平误差等原因,计算出的垂线矢量方向与水平测站坐标系高程轴方向不相同。如图5所示,假设计算出的垂线矢量方向 Z' 与测站坐标系 $O-XYZ$ 高程轴 Z 有一微小误差角度 α ,垂线矢量在测站坐标系 XY 平面投影与测站坐标系 X 轴夹角为 β ,将测站坐标系先绕 Z 轴旋转角度 β 再绕旋转后的 Y 轴旋转角度 α ,得到高程轴与垂线矢量重合的坐标系 $O-X'Y'Z'$ 。对于测站中任意一点 i ,设其在测站坐标系中的坐标为 (X_i, Y_i, Z_i) ,在 $O-X'Y'Z'$ 坐标系

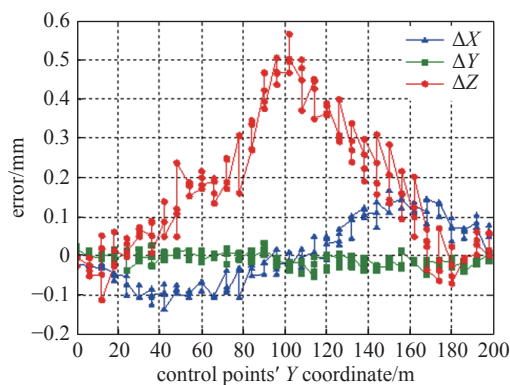


Fig. 4 Result of 3D adjustment without height constraints
图4 无高程约束的三维平差结果

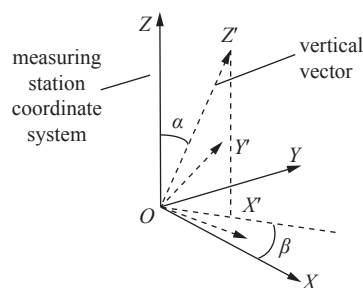


Fig. 5 Measuring station coordinate system and vertical coordinate system
图5 测站坐标系与垂线坐标系

中的坐标为 (X'_i, Y'_i, Z'_i) , 则有如下函数关系

$$\begin{bmatrix} X'_i \\ Y'_i \\ Z'_i \end{bmatrix} = \mathbf{M}_Y \mathbf{M}_Z \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中: $\mathbf{M}_Z = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为绕 Z 轴旋转 β 角度的旋转矩阵; $\mathbf{M}_Y = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$ 为绕 Y 轴旋转 α 角度的

旋转矩阵。得到 $Z'_i = Z \cos\alpha - X \cos\beta \sin\alpha + Y \sin\alpha \sin\beta$, 点 i 在两套坐标系中高程坐标的差值为 $\Delta Z = Z'_i - Z = Z(\cos\alpha - 1) - X \cos\beta \sin\alpha + Y \sin\alpha \sin\beta$ 。当 α 为微小角度时 $\sin\alpha \approx 0, \cos\alpha \approx 1$, 有 $\Delta Z \approx 0$ 。因此当计算出的站点垂线方向与测站坐标系高程轴方向误差很小时, 用计算出的垂线方向代替测站坐标系高程轴方向给测站观测值的高程坐标带来的误差很小, 可以考虑用计算出的测站垂线方向来计算式(4)中 θ_{xg}, θ_{yg} 的角度值, 将计算得到的 θ_{xg}, θ_{yg} 作为已知值代入式(4), 进行附有高程约束的三维平差。

根据本文模拟控制网的设计方案和测站设计方案, 计算出每一站的 θ_{xg}, θ_{yg} , 取每一站测得的全部控制点的高程观测值为 D_{gij} , 采用式(12)附有高程约束的三维平差方法计算模拟观测数据, 所得结果与设计值之差如图 6 所示。可以看到高程方向绝大多数点的位置误差都在 $-0.1 \sim 0.2$ mm 之内, 误差累积现象得到明显抑制。横向和纵向点位误差相比无高程约束的三维平差基本保持不变。

2.2 水准高程转换法

对于水准高程转换法, 加速器控制网的水准高程值一般可以通过两种途径获得, 一是用水准仪或静力水准系统进行测量, 观测值经平差计算后得到控制点基于起算点的水准高程值; 二是直接用跟踪仪在水平测站坐标系中观测, 得到控制点在测站坐标系中的高程观测值, 用高程观测值进行平差计算, 得到控制点基于起算点的水准高程值。考虑到模拟观测数据的生成方式, 在本文中采用第二种途径, 选取控制网坐标系原点的高程设计坐标作为起算数据, 应用国际知名平差软件 Starnet 的水准平差功能, 计算所有测站控制点的模拟高程观测值, 得到全部控制点基于控制网坐标系原点的水准高程值。水准高程值是一种相对于大地水准面的高程值, 如图 7 所示大地水准面是一不规则曲面, 与平差模型所用的空间直角坐标系的 XY 平面几何形状并不相同。

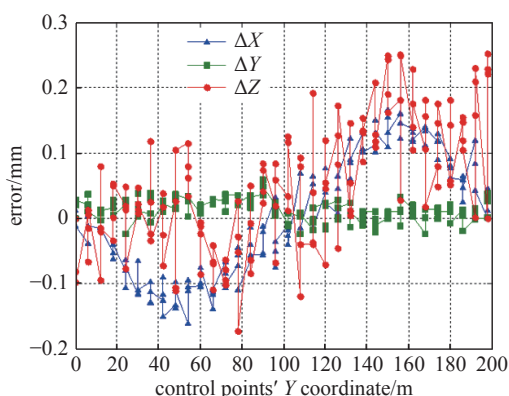


Fig. 6 Vertical orientation 3D adjustment result
图 6 高程定向法三维平差结果

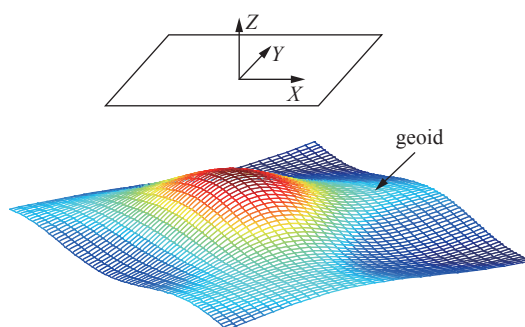


Fig. 7 Cartesian coordinate system and the geoid
图 7 空间直角坐标系和大地水准面

为了将水准高程值转换成平差需要的空间直角坐标系中的高程值, 需要对水准高程值按照大地水准面模型进行改正, 将其改正成相对于某一几何平面的高程值。以此几何平面为平面方向建立空间直角坐标系, 得到控制点在该空间直角坐标系中的高程值。在没有建立起大地水准面模型的情况下, 对于几十 m 范围内的小型加速器可以将大地水准面简化成一水平面, 水准高程值就是以这一水平面为平面方向的空间直角坐标系中的高程值。对于大型加速器, 通常将大地水准面简化成一球面, 根据控制点到水平面与水准面切点的距离进行改正^[22]。如图 8 所示, A 为水平面与大地水准面的切点, S 为弧线 AB 的长度, h 为点 P 相对于水平面的高程, PB 为点 P 相对于大地水准面的水准高, 则 $h \approx PB - BC$, 其中 $BC \approx S^2/2R$ 。

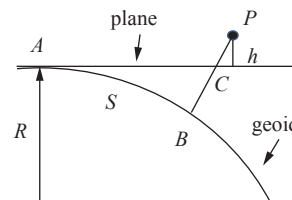


Fig. 8 Elevation correction
图 8 高程值改正

根据本文模拟控制网的设计方案,选取过控制网坐标系原点的水平面,即控制网坐标系的XY平面作为水准高程值修正的参考平面,取修正后的控制点在控制网坐标系中的高程值为 D_{gij} 。由于用于做约束的高程值所在坐标系和装置坐标系相同,因此公式(4)中的 $\theta_{xg} = \theta_{yg} = 0$ 。当用于做约束的高程值所在坐标系和装置坐标系不同时,需要根据实际情况计算 θ_{x0} 和 θ_{y0} 的近似值,代入公式对参数进行平差计算。模拟数据采用式(12)附有高程约束的三维平差方法计算结果与控制点设计值之差如图9所示,可以看到高程Z方向的误差累积得到了有效抑制,绝大多数高程点位误差都在 $-0.05 \sim 0.25$ mm之内,横向X点位误差局部略有增大,纵向Y点位误差几乎没有受到影响。将控制网的三维平差结果与由水准高程值修正后得到的高程约束数据相比较可以发现控制网的三维平差高程值与对应的高程约束数据几乎相同,这说明高程约束数据起到了强约束的作用,提高高程约束数据精度就可以提高附有高程约束的三维平差方法的高程平差精度。

3 验证

以北京正负电子对撞机(BEPCII)直线加速器实测数据为例,验证附有高程约束的三维平差方法。BEPCII直线加速器隧道长约230 m宽约4 m,沿隧道方向按8 m间距布设了29段控制点,形式如图3所示。直线装置坐标系的XY平面为水平面方向,其中Y为束流方向,Z为高程方向。直线加速器位于隧道内一侧,距墙约1 m,主体由40多根加速管和磁铁等设备组成。2021年暑期,用跟踪仪对BEPCII直线加速器控制网和设备上的基准点进行了测量,共测量了29站,每一站都建立了水平测站坐标系,用水准仪对部分地面控制点进行了水准测量。

用跟踪仪测量数据进行平差计算。首先按照传统的二维加一维(2D+1D)平差方法进行了平面和高程平差计算,平面方向跟踪仪测量数据采用Vector软件进行平差,起算数据为直线首端一控制网点的X坐标和直线末端一控制网点的XY坐标。高程方向跟踪仪测量数据采用清华山维软件平差,起算数据为平面平差所用两起算点的水准高程值。高程平差完成后进行坐标修正,将高程方向平差结果以球形大地水准面模型为基准,按测量点距装置坐标系原点距离将水准平差结果修正成装置坐标系中测量点的高程坐标。将平面平差坐标和高程平差修正坐标作为测量点的最终三维坐标成果。

然后采用Starnet平差软件对跟踪仪测量数据进行了三维平差计算,起算点同2D+1D平差,起算点的坐标数据用2D+1D平差的坐标成果。将Starnet平差所得测量点坐标减去2D+1D平差所得对应点坐标,结果如图10所示。

可见对同一组观测数据,虽然采用相同的起算数据,但是由于平差方法不同,所得结果会有很大不同,其中在高程方向,三维平差结果与水准平差修正结果相差尤为明显。用2D+1D平差所得测量点的高程坐标成果数据作为高程约束值,采用相同的起算数据,对跟踪仪测量数据进行本文式(12)所述的附有高程约束的三维平差,将平差所得测量点坐标减去2D+1D平差所得对应点坐标,结果如图11所示。

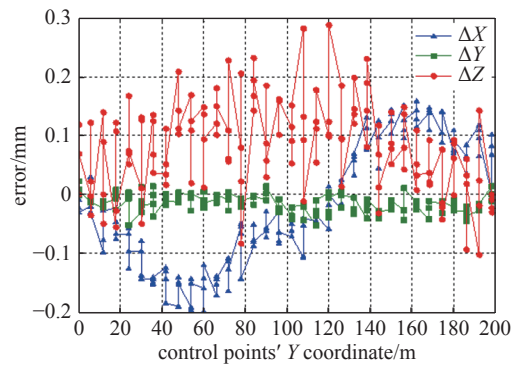


Fig. 9 3D adjustment result of Level elevation transformation method
图9 水准高程转换法三维平差结果

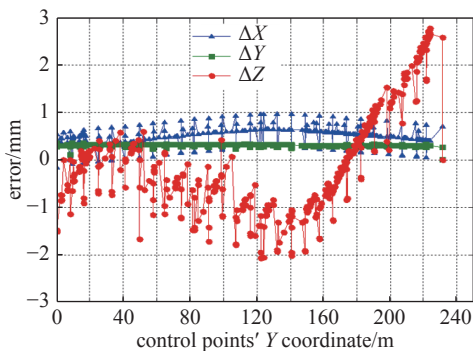


Fig. 10 Difference of Starnet adjustment result and 2D+1D adjustment result
图10 Starnet平差结果与2D+1D平差结果之差

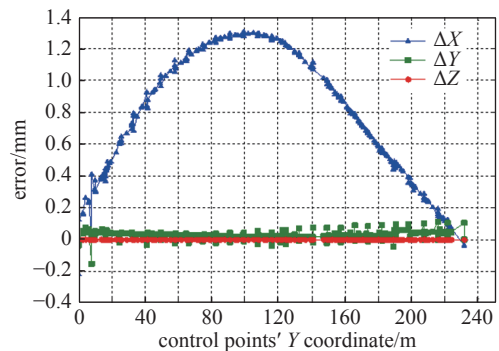


Fig. 11 Difference of 3D adjustment with elevation constraints result and 2D+1D adjustment result
图11 附有高程约束的三维平差结果与2D+1D平差结果之差

两种平差方法所得的 Z 向高程坐标数据完全相同, Y 向坐标差的标准偏差为 0.036 mm 。 X 向坐标差为一光滑抛物线,其形状和方向类似于Starnet与 $2D+1D$ 平差结果之差,但是幅度更大,最大值位于加速器中部达到 1.3 mm 。该结果说明,应用本文所述方法可以使三维平差结果的高程数据与水准平差修正结果相符。由于没有测量点的真值坐标,所以无法展示哪种平差方法与真值更为接近,但是水准测量和平差作为一种传统的高程数据获取方法,其有效性和可靠性已经得到广泛认可^[23],应用水准平差修正数据作约束有利于保证三维平差在高程方向的可靠性,抑制误差累积。

4 结 论

将大地水准面作为基准引入加速器准直测量和数据处理,可以为解决三维平差中高程方向误差累积问题提供一条途径。应用大地水准面作为数据处理基准,需要获得基于大地水准面的观测数据,建立起测站之间基于大地水准面的强约束关系。针对本文提出的附有高程约束的三维平差模型,研究了两种建立强约束关系的方法。模拟仿真计算结果表明,基于该平差模型的两种约束方法都可实现对高程方向误差累积的有效控制。所给的平差模型和推导过程,可以为相关数据处理软件的开发提供借鉴。以BEPCCII直线加速器测量数据为例,对比了平面加高程平差、三维平差和本文所述平差三种方法的数据处理结果。相比于无高程约束的三维平差,本文所述方法可以灵活有效的实现平差过程中高程误差累积控制。对比结果也显示,在平面方向中垂直于束流的横向上三种平差方法所得结果仍有不小的差异,因此横向误差的控制也是一个需要解决的问题,按照本文提供的研究思路,今后可以从控制测量方法、构建约束方程等方面对此进行相应研究。

参考文献:

- [1] Penicka J M, Collins J, Doose C, et al. Alignment strategy for APS upgrade[C]//14th International Workshop on Accelerator Alignment. 2016.
- [2] Vikas, Sahu R K. A review on application of laser tracker in precision positioning metrology of particle accelerators[J]. *Precision Engineering*, 2021, 71: 232-249.
- [3] Leão R J, Baldo C R, da Costa Reis M L C, et al. Engineering survey planning for the alignment of a particle accelerator: part II. Design of a reference network and measurement strategy[J]. *Measurement Science and Technology*, 2018, 29: 034007.
- [4] Martin D. Review of accelerator alignment[C]//Facing the Challenges – Building the Capacity. 2010.
- [5] 袁建东, 马力祯, 何源, 等. 超导直线加速器准直方案设计[J]. 北京测绘, 2019, 33(3): 285-290. (Yuan Jiandong, Ma Lizhen, He Yuan, et al. Design of alignment scheme for superconducting linear accelerator[J]. *Beijing Surveying and Mapping*, 2019, 33(3): 285-290)
- [6] 柯志勇, 何振强, 董岚, 等. BEPCCII储存环准直测量点位误差分析[J]. 核技术, 2015, 38(1): 3-8. (Ke Zhiyong, He Zhenqiang, Dong Lan, et al. Analysis on alignment position error of BEPCC II storage ring[J]. *Nuclear Techniques*, 2015, 38(1): 3-8)
- [7] 王铜, 董岚, 梁静, 等. 中国散裂中子源准直控制网数据处理方法[J]. 强激光与粒子束, 2021, 33: 104002. (Wang Tong, Dong Lan, Liang Jing, et al. Adjustment method of control network for alignment in CSNS[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2021, 33: 104002)
- [8] 薄志鹏. 三维大地测量概论[J]. 武测资料, 1981(s1): 31-44. (Bo Zhipeng. Introduction to three-dimensional geodesy[J]. *Journal of Geomatics*, 1981(s1): 31-44)
- [9] 郭迎钢, 李宗春, 赵文斌, 等. 激光跟踪仪三维导线在加速器控制网测量中的应用[C]//第六届全国粒子加速器准直安装及机械设计学术研讨会. 2019. (Guo Yinggang, Li Zongchun, Zhao Wenbin, et al. Application of laser tracker three-dimensional traverse in measurement of accelerator control network[C]//The 6th National Symposium on Alignment Installation and Mechanical Design of Particle Accelerators. 2019)
- [10] Yu C, Karl F, Ilardo M, et al. The storage ring control network of NSLS-II[C]//13th International Workshop on Accelerator Alignment. 2014.
- [11] Miertsch T. New approaches in the use of laser trackers for measurements of geodetic networks[C]//14th International Workshop on Accelerator Alignment. 2016.
- [12] 张振虎. 激光跟踪仪结合全站仪的三维控制网测量及其精度分析[J]. 北京测绘, 2019, 33(6): 708-712. (Zhang Zhenhu. Survey and accuracy analysis for three-dimensional control network using laser tracker and total station[J]. *Beijing Surveying and Mapping*, 2019, 33(6): 708-712)
- [13] 马下平. 附加系统参数平差在三维控制网平差中的应用[J]. 工程勘察, 2013, 41(7): 58-62. (Ma Xiaping. The application in three-dimensional control network adjustment with additional system parameters adjustment[J]. *Geotechnical Investigation & Surveying*, 2013, 41(7): 58-62)
- [14] Zhang Fumin, Zhang Huadi, Qu Xinghua. A multilateral laser-tracking three-dimensional coordinate measuring system based on plane constraint[J]. *Measurement Science and Technology*, 2020, 31(1): 015205.
- [15] 蔡国柱, 满开第, 张小奇, 等. 兰州重离子医疗装置同步环安装控制网设计[J]. 强激光与粒子束, 2014, 26: 015104. (Cai Guozhu, Man Kaidi, Zhang Xiaoqi, et al. Survey network design of synchrotron in heavy ion medical machine in Lanzhou[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2014, 26: 015104)
- [16] 王巍. 合肥光源升级改造测量准直及测量精度的研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2016. (Wang Wei. Survey and alignment of the HLS II upgrade project and study of the measurement precision[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2016)
- [17] 武汉大学测绘学院测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础[M]. 2版. 武汉: 武汉大学出版社, 2009. (Surveying and Adjustment Team in School of Geodesy and Geomatics of Wuhan University. Error theory and fundation of surveying adjustment[M]. 2nd ed. Wuhan: Wuhan University Press, 2009)

- [18] 黄维彬. 近代平差理论及其应用[M]. 北京: 解放军出版社, 1992. (Huang Weibin. Modern adjustment theory and its application[M]. Beijing: Publishing House of PLA, 1992)
- [19] 杨凡. 高能粒子加速器工程精密测量研究[D]. 郑州: 解放军信息工程大学, 2011. (Yang Fan. Research on precise survey of high energy particle accelerator project[D]. Zhengzhou: PLA Information Engineering University, 2011)
- [20] 杨振. 激光跟踪仪高精度位姿测量技术研究[D]. 郑州: 战略支援部队信息工程大学, 2018. (Yang Zhen. Study of high-precision position & pose measurement technique based on laser tracker[D]. Zhengzhou: PLA Strategic Support Force Information Engineering University, 2018)
- [21] 梁静, 董岚, 罗涛, 等. BEPCII储存环激光跟踪仪测量精度统计及先验误差的确定[J]. 测绘科学, 2013, 38(6): 182-184. (Liang Jing, Dong Lan, Luo Tao, et al. Precision statistics of laser tracker in BEPCII storage ring and calculation of mean square error of unit weight[J]. Science of Surveying and Mapping, 2013, 38(6): 182-184)
- [22] Gerassate H, Rovigatti G, Leão R, et al. Establishing a metrological reference network for the alignment of Sirius[C]//12th International Particle Accelerator Conference. Campinas, SP, Brazil, 2021.
- [23] 周得洋, 何晓业, 高飞. 加速器准直中激光跟踪仪和水准仪的测量结果比较[J]. 城市勘测, 2013(1): 152-155. (Zhou Deyang, He Xiaoye, Gao Fei. The comparing of measurement results between laser tracker and level in accelerator collimating[J]. Urban Geotechnical Investigation & Surveying, 2013(1): 152-155)