



·脉冲功率技术·

水中金属丝电爆炸拉氏磁流体动力学模拟方法*

刘志刚, 邹晓兵, 王新新

(清华大学 电机工程与应用电子技术系, 北京 100084)

摘 要: 基于拉格朗日描述, 建立了水中金属丝电爆炸的单温磁流体动力学模型, 并给出一种高阶混合有限元离散求解方法。拉氏可压缩流体方程组中, 速度定义在 H1 连续有限元空间, 内能定义在 L2 间断有限元空间实现物质界面的精确捕捉, 存在激波的区域引入张量人工粘性抑制数值振荡。磁扩散方程仅考虑周向磁通量密度, 简化为标量方程, 使用 H1 连续有限元方法离散求解。焦耳热和洛伦兹力作为源项引入实现磁流体方程的耦合。数值算例表明: 磁扩散求解器能够求解存在不同电导率的多介质磁扩散问题; 拉氏流体求解器能够精确追踪物质界面, 具有较好的激波分辨能力; 耦合 RLC 电路的磁流体求解器能够复现水中金属丝电爆炸加热相变、冲击波的产生与传播、放电模式转变等物理过程。

关键词: 金属丝电爆炸; 水中放电; 磁流体; 混合有限元; 放电模式

中图分类号: TM8

文献标志码: A

doi: 10.11884/HPLPB202234.210433

Lagrangian magneto-hydrodynamics simulation for underwater electrical wire explosion

Liu Zhigang, Zou Xiaobing, Wang Xinxin

(Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Based on the Lagrangian description, a single temperature magneto-hydrodynamics model of underwater electrical wire explosion is established, and a high-order mixed finite element method is used to solve this model. For the Lagrangian compressible fluid equations, velocity is discretized using the continuous high-order basis function in the H1 space, and internal energy is discretized using a L2 piecewise discontinuous high-order basis function for the precise capture of the material interface. A tensor artificial viscosity is introduced to suppress the numerical oscillation. Only the azimuthal magnetic flux density is contained in the magnetic diffusion equation, which is simplified to a scalar equation, and is discretized using continuous basis function. Joule heating and Lorentz force are introduced to couple hydrodynamics equations with magnetic field. Numerical results show that the magneto-diffusion solver can solve a multi-material magnetic diffusion problem, and the hydrodynamics solver can track the material interface and shock wave. Underwater electrical wire explosion is simulated based on the magneto-hydrodynamics solver coupled with RLC circuit, including phase transition, shock wave and different discharge modes.

Key words: electrical explosion, discharge in water, magneto-hydrodynamics, mixed finite element, discharge mode

金属丝电爆炸是指在极短时间内向细金属丝注入脉冲大电流, 使其发生快速相变, 产生高温高压气体或等离子体的过程, 该过程伴随着丰富的物理现象, 一直是脉冲功率领域的研究热点。与气体介质或真空相比, 水介质具有密度大、难压缩、击穿场强高等特点, 故水中金属丝电爆炸通常伴随着强冲击波的产生^[1]。水中金属丝电爆炸形成的可控冲击波在油气解堵^[2]、体外碎石^[3]等领域具有潜在的应用价值, 利用电爆炸冲击波的汇聚过程可以获得极端高压环境^[3], 在高能物理^[4]、温密物质^[5]、水下冲击波理论^[6]等研究中具有重要意义。

目前, 针对水中金属丝电爆炸过程已经开展了大量研究, 常用的实验诊断方法有冲击波压电传感器、激光阴

* 收稿日期: 2021-10-14; 修订日期: 2021-12-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(51777113, 51790522)

联系方式: 刘志刚, liuzg19@mails.tsinghua.edu.cn。

通信作者: 邹晓兵, juxb@tsinghua.edu.cn。

影成像、光谱诊断等,然而这些方法均存在一定的局限性。压电传感器受到量程、电磁干扰、频率响应等因素的限制,无法准确获得金属丝附近的冲击波波形^[7]。激光阴影成像结合飞行时间法可以近似地估计冲击波波后压力峰值,但无法获得完整的冲击波波形和密度分布,对金属丝爆炸产物的内部状态也无法给出清晰的图像^[8]。由于爆炸丝等离子体的高密度状态和可能存在的低温水等离子体薄层,光谱诊断方法也无法可靠地给出爆炸产物的状态演化^[9]。因此,利用数值模拟方法来获取电爆炸过程中金属丝及周围水介质的物理状态演化已经成为研究水中金属丝电爆炸现象的重要手段。与冲击波特性的数值模型主要基于流体动力学理论建立,结合光学诊断方法获得的爆炸丝边界移动轨迹,求解可压缩流体方程即可得到冲击波产生与传播过程中水介质中密度、压强等物理量的空间分布^[10]。而要获得爆炸产物的状态演化,则需要引入焦耳热和磁压效应建立磁流体动力学(MHD)模型。

磁流体动力学方程可以在不同的参考坐标系下导出,常用的形式包括以空间坐标为参考的欧拉描述和以物质坐标为参考的拉格朗日描述,其中欧拉描述是求解不同时刻某一空间位置的流体物理量,计算网格固定不变,可以求解大变形问题,但是无法精确追踪不同材料的分界面,而拉格朗日描述则是追踪某一流体质点在不同时刻的物理量变化,计算网格随流体移动,能够精确地追踪材料界面,但对于多维大变形问题可能出现网格翻转,导致计算失败。由于电爆炸过程的磁流体模拟涉及到多介质界面追踪或移动边界,故通常使用拉格朗日描述方法导出数值模型,为解决大变形问题还会引入网格重分和物理量重映过程,即多介质任意欧拉-拉格朗日方法(MMALE)^[11]。典型的可用于电爆炸模拟的磁流体程序,如 Sandia 国家实验室的 ALEGRA 程序^[12]、Livermore 实验室的 ALE3D 程序^[13]等均采用了 MMALE 方法,俄罗斯科学院用于模拟爆炸丝不稳定性的程序 Julia 则使用了 PIC 方法^[14],本质上也是一种拉氏方法。然而这些程序均不对外开放使用,常见的开源磁流体软件,如 Athena^[15]、ZEUS^[16]、Pluto^[17]等都是基于欧拉描述开发的,不具备多介质界面追踪能力。

对于水中金属丝电爆炸过程,首尔国立大学 Chung 等建立了一维磁流体自洽模型,成功复现了不同的放电模式,但该模型忽略了磁扩散过程,无法模拟金属丝较粗时的加热不均匀现象^[18],西安交通大学阴国峰等也复现了类似的模型^[19]。为了利用数值模拟方法深入研究水中金属丝电爆炸过程中丰富的物理现象,本文基于 Chung 等建立的磁流体模型,引入磁扩散方程,给出了描述电爆炸过程的通用拉氏阻性磁流体模型,并采用高阶混合有限元对方程进行离散求解。结合开源有限元框架,如 MFEM^[20]、FEniCS^[21]等,使用该离散方法可以方便地实现水中金属丝电爆炸多维度自洽模拟。

1 磁流体动力学模型

水中金属丝电爆炸产生冲击波的主要物理过程包括金属丝在焦耳热作用下的相变,以及爆炸产物膨胀对周围水介质的压缩。由于水介质有难压缩的特性,能够有效地抑制金属丝的膨胀,故金属丝在电爆炸后一段时间内仍然处于密度较高的状态,电子与中性粒子碰撞频率较高,可以假设其始终满足局部热力学平衡条件。因此,水中金属丝电爆炸的整个动力学过程能够用单温磁流体方程来描述,不同时刻金属丝及水介质的热力学参数可以由对应材料的状态方程给出。在水中金属丝电爆炸磁流体动力学模型中,金属和水由不同的状态方程形式来描述,需要精确追踪两种材料的分界面。因此,本文将在拉氏框架下给出水中金属丝电爆炸的磁流体动力学模型。Sheftman 等人的研究表明, μs 级和亚 μs 级水中电爆炸过程中金属丝保持较好的轴向均匀性^[5],结合爆炸产物及其产生冲击波的柱对称性,计算模型可以简化为柱坐标系下的一维磁流体方程组。

为了模型的通用性,这里首先考虑多维度的拉氏磁流体方程^[22]。在拉氏框架下,连续介质 $\Omega(t)$ 中流体质点的空间位置可表示为该质点初始位置 $\tilde{\mathbf{x}}$ 和时间 t 的函数,即 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega}, t \geq t_0$,这里 $\tilde{\Omega} \equiv \Omega(t_0)$, t_0 为初始时刻,则流体质点相对于欧拉坐标系的移动速度

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (1)$$

对于拉氏坐标内的控制体 $U(t)$,由雷诺输运定理可得守恒量 α (质量、动量和能量)满足

$$\frac{d}{dt} \int_{U(t)} \alpha = \int_{U(t)} \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2)$$

则由质量守恒

$$\frac{d}{dt} \int_{U(t)} \rho = 0 \quad (3)$$

可得

$$\int_{U(t)} \frac{d\rho}{dt} = - \int_{U(t)} \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (4)$$

式中： ρ 为质量密度。由动量守恒可得

$$\frac{d}{dt} \int_{U(t)} \rho \mathbf{v} = \int_{\partial U(t)} \mathbf{n} \cdot \vec{T} + \int_{U(t)} \rho \mathbf{F} \quad (5)$$

可得

$$\int_{U(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \int_{U(t)} (\nabla \cdot \vec{T} + \rho \mathbf{F}) \quad (6)$$

式中： $\partial U(t)$ 为控制体边界， \mathbf{n} 为边界外法向， \vec{T} 为应力张量， \mathbf{F} 为体积力的体密度。忽略热传导效应，由能量守恒

$$\frac{d}{dt} \int_{U(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) = \int_{\partial U(t)} \mathbf{n} \cdot \vec{T} \cdot \mathbf{v} + \int_{U(t)} (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + Q) \quad (7)$$

可得

$$\int_{U(t)} \rho \frac{de}{dt} = \int_{U(t)} (\vec{T} : \nabla \mathbf{v} + Q) \quad (8)$$

式中： e 为比内能， Q 为热源的功率体密度。

上述守恒律给出了磁流体的动力学演化规律，而电磁场的演化则通常由磁扩散方程确定，在拉氏坐标下，根据麦克斯韦方程可以导出磁扩散方程的一般形式^[13]

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\nabla \times \frac{1}{\sigma} \nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (9)$$

式中： \mathbf{B} 为磁通量密度， σ 为电导率， μ 为磁导率，所有物理量均采用SI单位制。对于电阻性磁流体，电磁场对流体动力学过程的影响主要体现为焦耳热和磁压效应，其中焦耳热会增加流体的内能，作为能量守恒方程的源项引入，磁压则由洛伦兹力产生，会改变流体的动量，作为动量守恒方程的体积力引入。最终得到用于描述水中金属丝电爆炸的拉氏电阻性磁流体方程如下

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \quad (\text{运动方程}) \quad (10)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{质量守恒}) \quad (11)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \vec{T} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (\text{动量守恒}) \quad (12)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \vec{T} : \nabla \mathbf{v} + \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} - Q_{\text{rad}} \quad (\text{能量守恒}) \quad (13)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (\text{磁扩散方程}) \quad (14)$$

式中： $\mathbf{J} = (1/\mu) \nabla \times \mathbf{B}$ 为电流密度， $\eta = 1/(\mu\sigma)$ 为磁扩散系数， Q_{rad} 为辐射功率，可表示为

$$Q_{\text{rad}} = \sigma_s \frac{T^4}{l_p} \quad (15)$$

式中： T 为温度， σ_s 为斯蒂芬-玻耳兹曼常数， l_p 为材料的吸收长度，在光学薄假设下，普朗克平均吸收长度可近似地表示为

$$l_p = 2.3 \times 10^{11} \frac{T^2}{n_a Z^2} \left(\frac{k_B T}{E_i} \right) \exp \left(\frac{E_i}{k_B T} \right) \quad (16)$$

式中： k_B 为玻耳兹曼常数， n_a 为重粒子数密度， Z 为原子序数， E_i 为第一电离能^[18]。

此外，要封闭求解上述模型，还需要分别给出金属和水的状态方程及电导率数据。对于金属，本文使用修正的QEOS^[18]作为状态方程，该状态方程将压力和比内能作为温度和密度的函数，电导率则由Stephens等提出半经

验模型^[23]进行计算。对于水介质,状态方程使用表格形式的状态方程插值得到,表格数据由 NIST^[24]数据库对 AQUA 状态方程表^[25]进行了部分加密得到。实际计算采用二维 Akima 方法对数据表进行插值,该方法可以保证一阶导数的连续性,有利于计算声速、热容等需要压力和比内能导数的物理量,同时能够有效地抑制不连续点的过冲。水介质的电导率则采用常数电导率,取实验所用自来水的电导率。

金属丝负载附近的磁场主要由流过金属丝的电流产生,因此要自洽地模拟整个电爆炸过程,还需要对驱动源电路进行建模并将其与磁流体模型耦合。用于水中金属丝电爆炸的典型驱动源由储能电容、气体开关和负载腔组成,金属丝在负载腔内与驱动源连接在一起,当触发气体开关导通后,储能电容中的能量通过开关快速释放到负载丝使其电爆炸,该过程可以用 RLC 串联电路来等效,设储能电容为 C_0 ,驱动源部分的等效电感和等效电阻分别为 L_0 和 R_0 ,负载丝的等效电感和等效电阻分别为 $L_w(t)$ 和 $R_w(t)$,则外电路方程为

$$(L_0 + L_w(t)) \frac{di}{dt} + i \left(R_0 + R_w(t) + \frac{dL_w(t)}{dt} \right) + \frac{1}{C_0} \int_0^t I(\tau) d\tau = U_0 \quad (17)$$

式中: U_0 为电容初始电压, i 为回路电流,即流过负载的总电流。在柱坐标系内,设磁流体模型计算域的径向外边界在 r_0 处,仅考虑周向磁场 B_θ ,则外边界处的磁通量密度可以由安培环路定律得到,即 $B_\theta = \mu i / (2\pi r_0)$,该公式可以作为磁扩散方程的边界条件引入,电路模型中负载丝的等效时变电阻和时变电感则分别由磁流体模型中的总焦耳热功率和总磁能计算得到,从而实现了负载磁流体模型和驱动源电路模型的双向耦合。

综合公式(10)~(14)、(17)及相关材料的状态方程和电导率模型即可得到完整的水中金属丝电爆炸磁流体自洽模型,该模型不依赖于任何实验数据,可以描述电爆炸的全部物理过程,包括加热相变、冲击波的产生与传播等。

2 数值求解方法

本文建立的水中金属丝电爆炸模型在数值求解时可以大致分为四个模块:电路求解器、材料参数求解器、拉氏流体求解器和磁场求解器。其中材料参数的计算仅涉及简单的数值计算方法,如插值、非线性代数方程求根等,在本文开发的 UEWE1D 程序中,插值算法主要采用 Akima 方法,包括一维版本和二维版本,求根算法则采用 Brent 方法,算法的具体原理在文献 [26-27] 中给出。电路方程则为一组常微分方程,这里选用隐式欧拉法进行数值求解,其时间步长的选择不受稳定性条件限制。拉氏流体方程和磁场方程均为偏微分方程,涉及到空间区域的离散,求解较为复杂。拉氏可压缩流体方程的解在激波波前位置及物质界面位置存在物理量间断,必须选择合适的数值算法,否则可能出现非物理振荡,甚至导致数值不稳定。为了获得较高的计算精度,本文使用 Dobrev 等提出的高阶混合有限方法对流体方程进行离散,该方法引入张量人工粘性来抑制非物理振荡^[22]。磁扩散方程求解的主要难点在于时间方向的推进,对于不导电或弱导电的材料,磁扩散系数非常大,若采用显式时间推进,则稳定性条件要求的时间步长会非常小,因此本文采用全隐的后向欧拉法进行时间推进,空间离散仍采用有限元方法,有效地增大了计算中的时间步长,使其仅受到流体求解器 CFL 条件的限制,加快了计算速度。下面将具体给出拉氏流体方程和磁场方程的离散方法。

2.1 拉氏可压缩流体方程的离散

水中金属丝电爆炸具有轴对称性,可以在柱坐标下简化为二维或一维问题,这里考虑二维轴对称坐标($r-z$ 坐标)下的离散,给定柱坐标下的计算域 $\Omega(t) = \{(r, \theta, z) : (r, z) \in \Gamma(t)\}$,其中 Γ 为简化后的二维轴对称计算域,初始计算域设为 $\Omega_0 \equiv \Omega(t_0)$ 。混合有限元离散的基本思路是在初始计算域(拉氏坐标)内定义两个不同的有限元空间分别用于运动量和热力学量的离散。由于流场内存在激波、物质界面等间断面,应该使用间断有限元方法实现间断面的高精度捕捉,故定义有限元空间 $E \in L^2(\Omega_0)$ 用于离散热力学物理量,包括密度、温度、比内能、压强等,设基函数为 $\{\phi_j\}$,则比内能可离散为

$$e(\vec{x}, t) = \sum_j e_j(t) \phi_j(\vec{x}) = \mathbf{e}(t)^T \boldsymbol{\phi}(\vec{x}) \quad (18)$$

而速度、空间位置等运动相关的矢量决定了网格移动,不应该有间断,否则网格将出现断裂,因此将其定义在有限元空间 $\mathcal{V} \in [H^1(\Omega_0)]^2$ 内,设基函数为 $\{w_i\}$,则空间位置及流体速度可分别离散为

$$\mathbf{x}(\vec{x}, t) = \sum_i \mathbf{x}_i(t) w_i(\vec{x}) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{w}(\vec{x}) \quad (19)$$

$$\mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \sum_i \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}(t) w_i(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{v}(t)^T \mathbf{w}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (20)$$

定义映射 $\Phi_z(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ 将有限元标准单元 $\hat{\Gamma}_z$ 映射到计算域 Γ 内的拉氏单元 Γ_z ，设映射 $\Phi_z(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ 的雅克比矩阵为 $J_z = \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \Phi_z$ ，则由二维轴对称坐标下的质量守恒

$$2\pi \int_{\Gamma_z(t)} r\rho(t) = 2\pi \int_{\Gamma_z(t_0)} r\rho(t_0) \quad (21)$$

可以导出强质量守恒关系

$$r(t)\rho(t)|J_z(t)| = r(t_0)\rho(t_0)|J_z(t_0)| \quad (22)$$

在拉氏框架下，不需要显式地求解式(11)给出的质量守恒定律，用式(22)可以直接计算得到密度，且质量守恒自动满足。对于动量守恒方程，采用经典的伽辽金方法，即令试函数为 w_j ，方程(12)两边同乘试函数并分部积分得到如下形式

$$2\pi \int_{\Gamma_z(t)} r\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot w_j = -2\pi \int_{\Gamma_z(t)} r\ddot{T}_{rz} : \nabla_{rz} w_j + 2\pi \int_{\Gamma_z(t)} r\rho \mathbf{F} \cdot w_j \quad (23)$$

定义质量矩阵 $\mathbf{M}_v = \int_{\Gamma_z(t)} r\rho \mathbf{w} \mathbf{w}^T$ ，代入式(23)可得半离散形式的动量方程

$$\mathbf{M}_v \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \int_{\Gamma_z(t)} r\ddot{T}_{rz} : \nabla_{rz} \mathbf{w} + \int_{\Gamma_z(t)} r\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \quad (24)$$

对于能量守恒方程，取试函数为 ϕ_i ，方程(13)两边同乘试函数并分部积分可得到弱形式

$$2\pi \int_{\Gamma_z(t)} r \left(\rho \frac{de}{dt} \right) \phi_i = 2\pi \int_{\Gamma_z(t)} r \left(\ddot{T}_{rz} : \nabla_{rz} v \right) \phi_i + 2\pi \int_{\Gamma_z(t)} r Q \phi_i \quad (25)$$

定义质量矩阵 $\mathbf{M}_E = \int_{\Gamma_z(t)} r\rho \phi \phi^T$ ，代入式(25)可得半离散形式的能量方程

$$\mathbf{M}_E \cdot \frac{de}{dt} = \int_{\Gamma_z(t)} r \left(\ddot{T}_{rz} : \nabla_{rz} v \right) \phi + \int_{\Gamma_z(t)} r Q \phi \quad (26)$$

式(24)、(26)中的右边项可以用矩阵 $[\mathbf{F}]$ 统一给出，定义矩阵元素

$$\mathbf{F}_{ij} = \int_{\Gamma_z(t)} r \left(\ddot{T}_{rz} : \nabla_{rz} w_i \right) \phi_j \quad (27)$$

在实际计算中，将微分算子转换到笛卡尔坐标系下

$$\mathbf{F}_{ij} = \int_{\Gamma_z(t)} \left\{ r \left(\ddot{T}_{2d} : \nabla_{2d} w_j \right) + T_{\theta\theta}(w_j)_r \right\} \phi_j \quad (28)$$

式中：下标“2d”表示将 r, z 坐标当作笛卡尔坐标 x, y 进行运算。综合上述离散过程，可以得到拉氏可压缩流体方程完整的半离散格式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = [\mathbf{v}] \quad (29)$$

$$\mathbf{M}_v \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -[\mathbf{F}] \cdot [\mathbf{I}] + [\mathbf{f}] \quad (30)$$

$$\mathbf{M}_E \cdot \frac{de}{dt} = [\mathbf{F}]^T \cdot [\mathbf{v}] + [\mathbf{q}] \quad (31)$$

其中 $[\mathbf{I}]$ 表示在有限元空间 E 中常数 1 对应的系数向量， $[\mathbf{f}]$ 和 $[\mathbf{q}]$ 分别为体积力和热源功率的离散向量，在磁流体模型中，二者需要利用磁场求解器中的磁通量密度和电流密度进行计算，然后投影到相应的有限元空间内。

另外，对于流场中存在激波的问题（如水中金属丝电爆炸），需要引入人工粘性来抑制数值振荡，保证计算的稳定性，本文采用文献 [22] 中给出的张量人工粘性，由于离散力矩阵 $[\mathbf{F}]$ 中的压力项已表示为应力张量形式，故只需要在其中加入对应的人工粘性分量即可。式(29)~(31)给出的半离散格式为一组常微分方程，可以使用常规的任意阶 Runge-Kutta 方法进行显式推进，为了保证离散格式的能量守恒性，本文采用文献 [22] 中修正后的二阶中点 Runge-Kutta 格式进行时间积分，时间步长根据 CFL 条件进行自适应调整。

2.2 磁扩散方程的离散

微秒级水中金属丝电爆炸过程中爆炸产物通常呈均匀的柱形结构, 负载电流产生的磁场主要为周向分量, 故本文的模型仅考虑周向磁通量密度, 则拉氏坐标下矢量形式的磁扩散方程可以简化为如下的标量方程

$$\frac{dB_\theta}{dt} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta \frac{\partial r B_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \right) \quad (32)$$

为了方便将其转换为弱形式, 引入变量代换 $\tilde{B} = rB_\theta$ 可得方程

$$\frac{1}{r} \frac{d\tilde{B}}{dt} = \nabla_{2d} \cdot \left(\frac{\eta}{r} \nabla_{2d} \tilde{B} \right) \quad (33)$$

上式中的微分算子已全部转换到笛卡尔坐标系下, 故可以按二维笛卡尔坐标将其转换为弱形式。定义有限元空间 $\mathcal{B} \in H^1(\Omega_0)$ 用于离散磁场变量 \tilde{B} , 设其基函数为 $\{v_i\}$, 仅考虑 Dirichlet 边界和齐次 Neumann 边界, 导出磁扩散方程的弱形式为

$$\int_{\Gamma_s(t)} \frac{1}{r} \frac{d\tilde{B}}{dt} v_i = - \int_{\Gamma_s(t)} \frac{\eta}{r} \nabla \tilde{B} \cdot \nabla v_i \quad (34)$$

定义质量矩阵 $\mathbf{M}_B = \int_{\Gamma_s(t)} \frac{1}{r} \mathbf{v} \mathbf{v}^T$, 用于离散式(34)的左边项, 而右边项为典型的扩散算子, 引入刚度矩阵 $[\mathbf{K}]$ 进行离散, 其矩阵元素表示为

$$K_{ij} = \int_{\Gamma_s(t)} \frac{\eta}{r} \nabla v_i \cdot \nabla v_j \quad (35)$$

将上述系数矩阵的定义代入式(34)即可得到拉氏坐标下磁扩散方程的半离散形式

$$\mathbf{M}_B \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} = -[\mathbf{K}] \cdot [\mathbf{b}] \quad (36)$$

由于水介质区域的电导率很小, 磁扩散速度非常快, 使用常规的显式时间积分方法受到稳定性条件限制, 必须使用非常小的时间步长, 因此对于磁扩散方程我们使用隐式方法进行时间积分, 为了方便引入隐式时间积分方法, 式(36)可进一步改写为

$$(\mathbf{M}_B + \Delta t [\mathbf{K}]) \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} = -[\mathbf{K}] \cdot [\mathbf{b}]_n \quad (37)$$

求解该线性方程组得到 $d\mathbf{b}/dt$ 向量, 采用公式 $[\mathbf{b}]_{n+1} = [\mathbf{b}]_n + \Delta t (d\mathbf{b}/dt)$ 进行推进即为后向欧拉法, 具有无条件稳定的性质, 可以有效地增大计算时间步长, 加快计算速度, 式(37)结合 Runge-Kutta 方法可以进一步构造高阶的隐式时间推进格式。

2.3 软件框架与计算流程

基于上述离散格式, 本文开发了一套多介质拉格朗日磁流体计算程序, 用于模拟水中金属丝电爆炸的物理全过程。该计算程序运用模块化设计方法, 由 C++ 面向对象程序设计语言实现, 程序框架如图 1 所示, 整体可划分为 3 个层次: 算法层、应用层和耦合层。其中算法层提供了底层的数学运算, 与物理无关, 包括 LLNL 开发的轻量级有限元运算库 MFEM 和高性能线性求解器 HYPRE, 以及自行开发的用于状态方程和输运系数计算的数值算法工具库, 包括 Akima 插值算法、Brent 求根算法等。

应用层则提供了一系列与物理问题相关的通用求解器, 即根据式(29)~(31)及式(37)所示的数值离散格式对 MFEM 提供的微分算子离散函数进行组合, 将用于描述物理问题的偏微分方程转化为线性代数方程组, 再调用 HYPRE 库的高性能预处理器和求解器得到最终的数值解。应用层的每一个模块均可独立运行, 包括求解 RLC 串联放电电路的 CIRCUIT 求解器、求解拉氏框架下 Euler 方程的 LAGHOS 求解器、求解暂态磁扩散问题的 MAGNE 求解器以及计算宽温度密度范围状态方程和输运系数的 MATERIAL 求解器。耦合层根据式(10)~(14)给出的拉氏磁流体模型将这些独立的求解器进行耦合, 得到用于模拟水中金属丝电爆炸实际问题的多物理场求解程序。其中电路求解器和磁场求解器通过负载电阻、负载电感及磁场边界实现双向耦合, 磁场求解器和拉氏流体求解器主要通过焦耳热和洛伦兹力进行耦合。状态方程与输运系数模块提供了温度、压力、电导率等物理量的计算, 在上述所有的耦合环节中均会被调用。

除了上述三个核心部分外, UEWE1D 程序还实现了相应的前后处理模块, 包括 MFEM 格式非均匀网格生成模块、求解器参数输入模块、GLVis 实时可视化接口、ParaView 后处理数据输出接口等。分层模块化的设计框架使

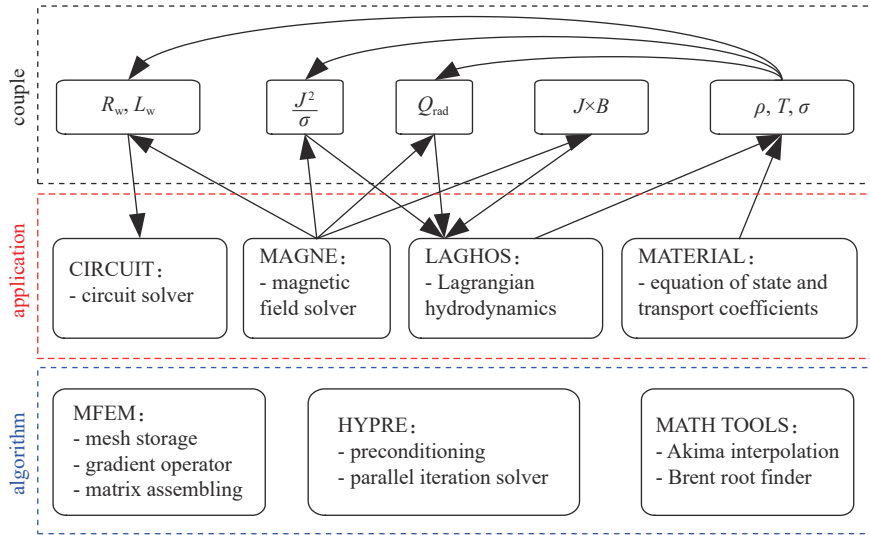


Fig. 1 Technical outline of the UWEID program

图1 UWEID 程序实现框架

本文开发的多介质拉氏磁流体程序具有较好的扩展性和通用性,通过简单修改输入参数即可实现高阶精度有限元计算格式。

3 算例验证与分析

3.1 多介质磁扩散算例

考虑浸没于水介质中的金属丝通入阶跃电流后的磁扩散问题,取金属丝直径为 $20\ \mu\text{m}$,电导率为 $10^8\ \text{S/m}$,水介质区电导率设为 $0.1\ \text{S/m}$,阶跃电流稳态值为 $1\ \text{kA}$ 。利用商业软件 Comsol 的磁场模块和 UWEID 程序同时求解该问题,为保证 Comsol 求解器收敛,阶跃电流设置 $4\ \text{ns}$ 宽的过渡区,求解结果如图 2 所示。

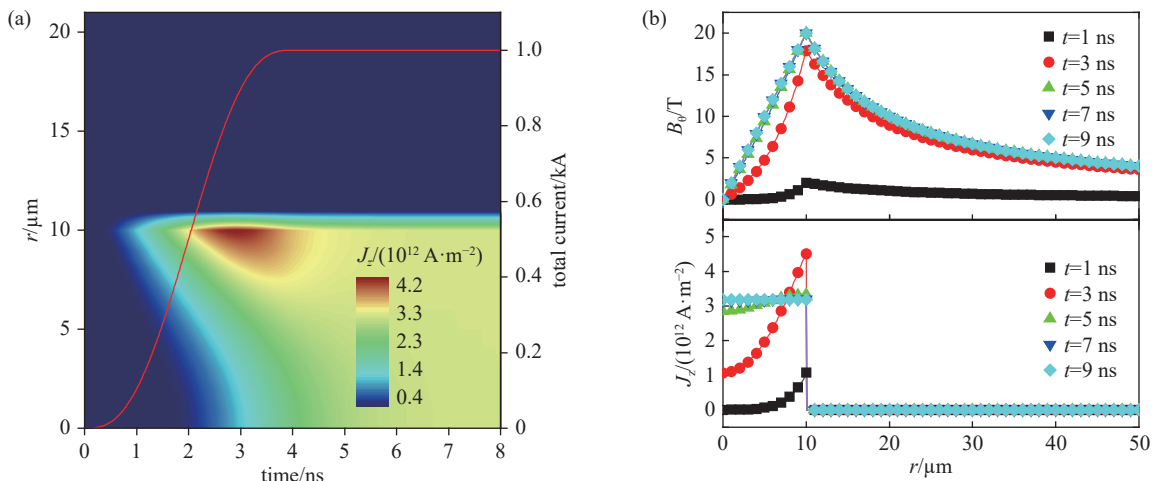


Fig. 2 Numerical results of the multi-material magnetic diffusion problem

图2 多介质磁扩散问题模拟结果

图 2(a)给出了总电流波形及电流密度分布的演化过程,可以看到电流上升阶段,金属丝内的电流密度分布不均匀,表现出明显的趋肤效应,电流稳定一段时间后,电流密度分布逐渐趋于均匀。图 2(b)则具体给出了几个时刻的磁通量密度分布和电流密度分布,其中散点图为 Comsol 计算结果,实线为 UWEID 程序计算结果,二者基本一致,验证了本文所开发的程序具有准确计算多介质磁扩散问题的能力,可以用于水中金属丝电爆炸模拟中磁场及电流分布的求解。

3.2 柱坐标系 Sod 激波管算例

为了验证拉氏流体求解器的物质界面追踪及激波捕捉能力,考虑柱坐标系下的一维 Sod 激波管算例,初始条件设定为^[28]

$$(\rho, v_r, p) = \begin{cases} (1.0, 0, 1.0), & r \leq 0.4 \\ (0.125, 0, 0.1), & r > 0.4 \end{cases} \quad (38)$$

计算区域为 $[0, 1]$, 划分为 160 个均匀网格, 求解器的速度离散设为二阶有限元, 内能离散设为一阶间断有限元, 求解得到 $t = 0.25$ 时刻的密度、压力、速度分布如图 3(a)~3(c) 所示。

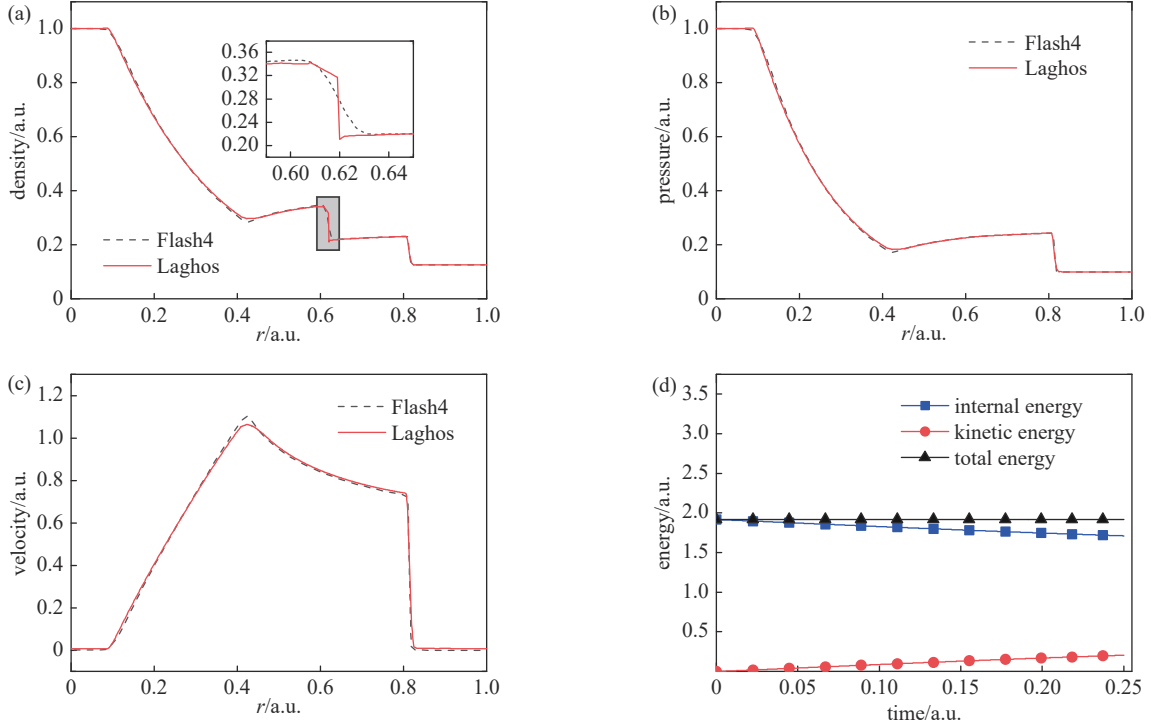


Fig. 3 Numerical results of one-dimensional cylindrical Sod shock tube

图 3 一维柱形 Sod 激波管模拟结果

图 3 同时给出了欧拉磁流体程序 FLASH 的计算结果, 该程序在欧拉坐标下使用 PPM 格式进行激波捕捉^[29], 可以看到 UEWE1D 的计算结果与 FLASH 基本一致, 说明本文所用的算法具有良好的激波分辨能力。从图 3(a) 给出的密度分布可以看到, 以 FLASH 为代表的欧拉算法即使采用自适应网格加密技术, 在接触间断附近仍有耗散, 而本文所用的拉氏混合有限元算法则可以精确地追踪接触间断或物质界面。图 3(d) 给出了 UEWE1D 程序求解过程中内能、动能及总能量变化曲线, 总能量在求解过程中保持不变, 验证了本文所用离散格式的守恒性。

3.3 水中铜丝电爆炸算例

以 Chung 等给出的驱动源及爆炸丝参数为例^[18], 考虑水中铜丝电爆炸过程。设置驱动源的储能电容为 $5.22 \mu\text{F}$, 回路等效电感为 $2.7 \mu\text{H}$, 等效内阻为 $58.5 \text{ m}\Omega$, 储能电容初始充电电压设为 13 kV , 爆炸丝长度固定为 4 cm , 支撑结构(包括在电压测量回路内)的等效电感和等效电阻分别为 $0.35 \mu\text{H}$ 和 $6.95 \text{ m}\Omega$ 。对于直径 $200 \mu\text{m}$ 的铜丝, 设置初始密度为 8960 kg/m^3 , 初始温度为 300 K , UEWE1D 求解结果如图 4 所示。图 4(a) 中的实线为本文 UEWE1D 程序模拟得到的结果, 虚线为 Chung 等的实验结果^[18], 二者符合较好, 图中的电压电流波形反映了典型的水中金属丝电爆炸过程: 初始状态下金属电导率较高, 金属丝等效电阻较小, 回路电流表现为欠阻尼放电, 金属丝两端的电压主要为电感性电压, 在焦耳热作用下金属丝温度快速上升并发生相变, 电导率急剧减小, 负载丝电阻增大, 超过放电回路临界阻尼, 回路电流开始快速下降, 由于回路电感的作用, 流过负载丝的电流不会立即衰减, 这导致高阻值负载丝两端的电压可能达到初始充电电压的几倍, 随后高温高密度的金属丝蒸汽快速膨胀, 截面积增大, 金属丝电阻减小, 同时当部分电离的金属蒸汽密度减小到一定值后, 电导率会随着密度减小而增大, 金属丝电阻进一步减小, 最终回路电流又转变为欠阻尼放电形式。图 4(a) 中的散点图同时给出了 Chung 等的磁流体模拟结果, 与本文模拟结果类似, 在后期的等离子体欠阻尼放电阶段, 放电电流与实验结果出现较大偏差, 这可能是模型所用状态方程及电导率数据不准确造成的。

图 4(b)~4(d) 给出了爆炸丝的膨胀过程及其热力学状态演化。计算网格节点的运动轨迹给出平滑的流线, 说明本文所用的求解算法不会引入明显的非物理振荡。在电爆炸早期阶段, 金属丝内部各点的温度密度基本一致,

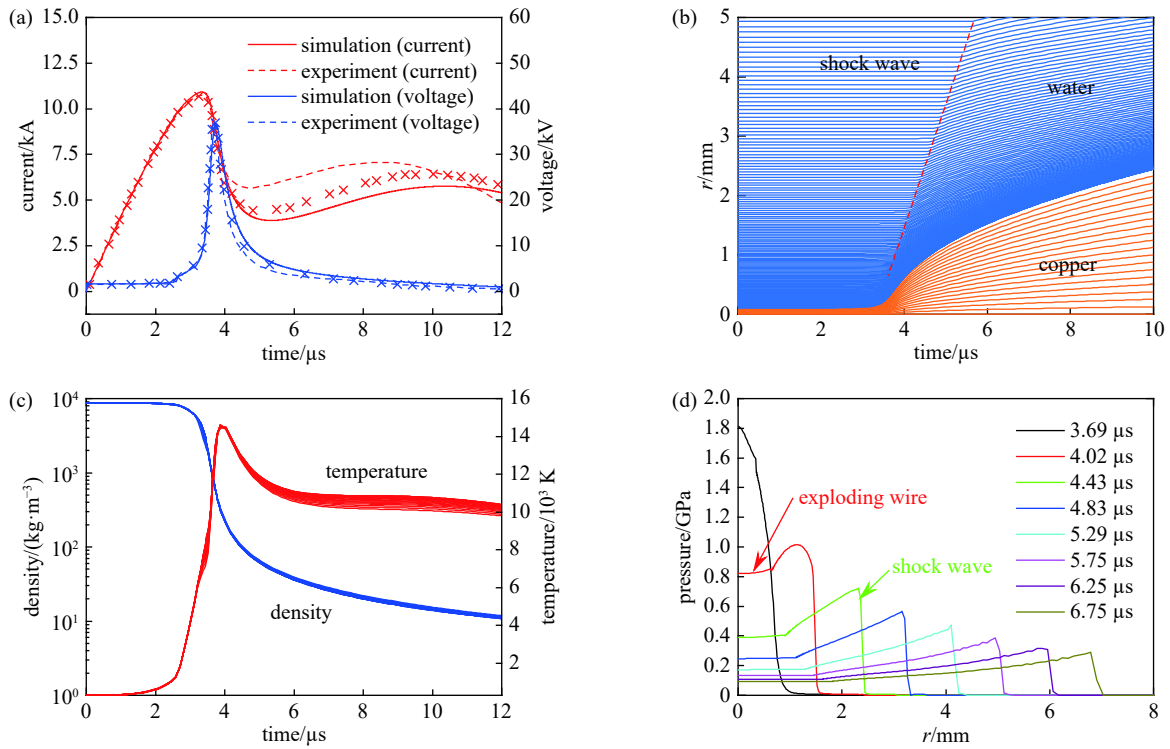


Fig. 4 Simulation results of underwater electrical explosion of a copper wire with 0.2 mm diameter

图4 直径0.2 mm铜丝水中电爆炸数值模拟结果

金属丝保持良好的径向均匀性,到后期等离子体阶段,由于金属等离子体直径较大,且电导率较高,磁扩散过程发挥作用,金属丝温度出现比较明显的径向不均匀。从图4(d)的压力分布演化可以直观地看到水中冲击波的形成过程,在电压尖峰附近,金属丝焦耳热功率极高,这使得金属丝内部温度和压力急剧上升,同时挤压附近水介质,形成高达几 GPa 的压缩层,该压缩区以波的形式沿径向传播,演化为冲击波的陡峭波前,随着爆炸产物的膨胀,其内部压力逐渐降低,其附近水介质压力随之降低,形成压力逐渐衰减的冲击波波尾。电爆炸后期等离子体阶段的能量注入对冲击波幅值贡献不大,但是可以有效减缓爆炸产物内部压力的降低,使冲击波波尾衰减更慢,这与文献 [30] 中的实验结果是一致的。

进一步考虑不同直径的金属丝电爆炸过程,在初始充电电压为 13 kV 的条件下,分别对直径为 0.1 mm、0.2 mm、0.3 mm 的铜丝电爆炸过程进行模拟,结果如图 5 所示。从图 5(a) 的电压电流波形来看,随着金属丝直径的增加,电压尖峰及等离子体欠阻尼放电出现的时刻逐渐后移,直径增加至 0.3 mm 时不再出现后期的欠阻尼放电过程,即达到“匹配模式”。

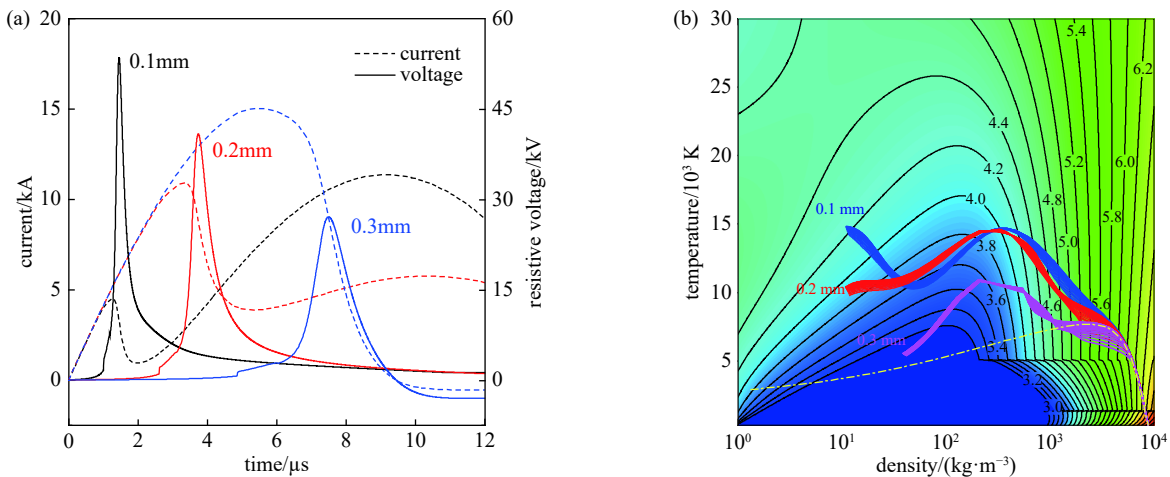


Fig. 5 Simulation results of underwater electrical explosion of a copper wire with different diameter

图5 不同直径铜丝水中电爆炸模拟结果

图 5(b)给出了铜电导率(取对数 $\log_{10}\sigma$)随温度、密度的变化规律,同时给出了不同直径金属丝内部各点热力学状态在 $\rho-T$ 相图中的演化曲线,图中点划线给出了金属铜的液气相变线(双节线)。从图中可以看到,在电爆炸早期阶段,不同直径的金属丝加热过程基本相同,沿双节线的液相分支逐渐升温,在临界点附近,金属丝内部会出现明显的径向不均匀,随后不同直径的金属丝热力学演化轨迹出现差异。对于直径 0.1 mm 和 0.2 mm 的铜丝,电压尖峰附近的高沉积功率会将其加热到较高的温度,随后金属丝开始快速膨胀,但其热力学状态仍处于 $\partial\sigma/\partial\rho > 0$ 的区域,电导率仍在减小,但温度较高时, $|\partial\sigma/\partial\rho|$ 较小,同时伴随着截面积的快速增大,金属丝总电阻并不会达到非常大(通常为几 Ω ~十几 Ω)便开始减小,即回路电流不会被截断。当爆炸产物密度减小至 $\partial\sigma/\partial\rho < 0$ 的区域时,电阻会快速下降,开始欠阻尼放电过程,此后注入的能量可能使爆炸产物温度再次升高。而对于直径 0.3 mm 的金属丝,电压尖峰附近的能量沉积过程无法将其加热到较高温度(仍在临界温度附近),此区域 $|\partial\sigma/\partial\rho|$ 较大,金属丝膨胀过程中电阻仍在持续增加,直至电流被截断,若此时电容中储能基本被耗尽,则放电过程完全结束,放电电流呈现非周期形式。此外,对于较细的金属丝,在电流上升沿较低的位置达到电压尖峰,此时回路电感储能较少,同样可能不足以将其加热到较高温度而出现截流,此时电容中的残余电压较高,随着金属丝膨胀进入 $\partial\sigma/\partial\rho < 0$ 区域,可能会再次出现欠阻尼放电过程,即重燃模式,这是 Chung 等^[18]基于磁流体模型复现重燃模式的基本原理,但有关重燃过程的具体机制目前仍有争议,此处不再详细讨论。

4 结 论

本文基于混合有限元方法给出了多维度拉氏阻性磁流体方程组的一种数值求解方法,并通过经典的数值算例验证了该离散方法具有较好的多介质界面追踪能力和激波分辨能力。利用本文给出的数值模拟方法对水中铜丝电爆炸过程进行了一维自洽模拟,模拟结果表明,电压尖峰附近的能量沉积会影响爆炸产物的温度和压强,进而决定了不同放电模式的出现及产生冲击波的幅值,不同的放电模式实际上是电爆炸产物热力学状态超过临界点之后在 $\rho-T$ 相图中演化轨迹不同导致的。

参考文献:

- [1] Ben-Dor G. Shock wave reflection phenomena[M]. 2nd ed. Heidelberg: Springer, 2007.
- [2] Liu Qiaojue, Ding Weidong, Han Ruoyu, et al. Fracturing effect of electrohydraulic shock waves generated by plasma-ignited energetic materials explosion[J]. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2017, 45(3): 423-431.
- [3] Takayama K. Application of underwater shock wave focusing to the development of extracorporeal shock wave lithotripsy[J]. *Japanese Journal of Applied Physics*, 1993, 32(5S): 2192-2198.
- [4] Antonov O, Gilburd L, Efimov S, et al. Generation of extreme state of water by spherical wire array underwater electrical explosion[J]. *Physics of Plasmas*, 2012, 19: 102702.
- [5] Sheftman D, Krasik Y E. Investigation of electrical conductivity and equations of state of non-ideal plasma through underwater electrical wire explosion[J]. *Physics of Plasmas*, 2010, 17: 112702.
- [6] Gurovich V T, Grinenko A, Krasik Y E. Semianalytical solution of the problem of converging shock waves[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99: 124503.
- [7] Grinenko A, Gurovich V T, Krasik Y E, et al. Analysis of shock wave measurements in water by a piezoelectric pressure probe[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2004, 75(1): 240-244.
- [8] Sayapin A, Grinenko A, Efimov S, et al. Comparison of different methods of measurement of pressure of underwater shock waves generated by electrical discharge[J]. *Shock Waves*, 2006, 15(2): 73-80.
- [9] Grinenko A, Efimov S, Fedotov A, et al. Addressing the problem of plasma shell formation around an exploding wire in water[J]. *Physics of Plasmas*, 2006, 13: 052703.
- [10] Grinenko A, Sayapin A, Gurovich V T, et al. Underwater electrical explosion of a Cu wire[J]. *Journal of Applied Physics*, 2005, 97: 023303.
- [11] 贾祖朋, 张树道, 蔚喜军. 多介质流体动力学计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 2014. (Jia Zupeng, Zhang Shudao, Yu Xijun. Computational method of multi-material hydrodynamics[M]. Beijing: Science Press, 2014)
- [12] Robinson A C, Brunner T A, Carroll S, et al. ALEGRA: an arbitrary Lagrangian-Eulerian multimaterial, multiphysics code[C]//46th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit. 2008.
- [13] Rieben R N, White D A, Wallin B K, et al. An arbitrary Lagrangian-Eulerian discretization of MHD on 3D unstructured grids[J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 226(1): 534-570.
- [14] Oreshkin V I, Chaikovskiy S A, Datsko I M, et al. MHD instabilities developing in a conductor exploding in the skin effect mode[J]. *Physics of Plasmas*, 2016, 23: 122107.
- [15] Stone J M, Tomida K, White C J, et al. The Athena++ adaptive mesh refinement framework: design and magnetohydrodynamic solvers[J]. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2020, 249: 4.

- [16] Stone J M, Norman M L. ZEUS-2D: a radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. II. The magnetohydrodynamic algorithms and tests[J]. *Astrophysical Journal*, 1992, 80(2): 791-818.
- [17] Vaidya B, Mignone A, Bodo G, et al. Astrophysical fluid simulations of thermally ideal gases with non-constant adiabatic index: numerical implementation[J]. *Astronomy & Astrophysics*, 2015, 580: A110.
- [18] Chung K J, Lee K, Hwang Y S, et al. Numerical model for electrical explosion of copper wires in water[J]. *Journal of Applied Physics*, 2016, 120: 203301.
- [19] Yin Guofeng, Shi Huantong, Fan Yunfei, et al. Numerical investigation of shock wave characteristics at microsecond underwater electrical explosion of Cu wires[J]. *Journal of Physics D:Applied Physics*, 2019, 52: 374002.
- [20] Anderson R, Andrej J, Barker A, et al. MFEM: a modular finite element methods library[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2021, 81: 42-74.
- [21] Logg A, Mardal K A, Wells G. Automated solution of differential equations by the finite element method: the FEniCS book[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2012.
- [22] Dobrev V A, Ellis T E, Kolev T V, et al. High-order curvilinear finite elements for axisymmetric Lagrangian hydrodynamics[J]. *Computers & Fluids*, 2013, 83: 58-69.
- [23] Stephens J, Dickens J, Neuber A. Semiempirical wide-range conductivity model with exploding wire verification[J]. *Physical Review E*, 2014, 89: 053102.
- [24] Lemmon E W, Huber M L, McLinden M O. NIST standard reference database 23: reference fluid thermodynamic and transport properties-REFPROP. 9.0[M]. NIST NSRDS, 2010.
- [25] Haldemann J, Alibert Y, Mordasini C, et al. AQUA: a collection of H₂O equations of state for planetary models[J]. *Astronomy & Astrophysics*, 2020, 643: A105.
- [26] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, et al. Numerical recipes in C: the art of scientific computing, 2nd ed[J]. *IEEE Concurrency*, 1993, 6(4): 79.
- [27] Akima H. A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting based on local procedures[J]. *Communications of the ACM*, 1974, 17(1): 18-20.
- [28] Sod G A. A numerical study of a converging cylindrical shock[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1977, 83(4): 785-794.
- [29] Tzeferacos P, Fatenejad M, Flocke N, et al. FLASH magnetohydrodynamic simulations of shock-generated magnetic field experiments[J]. *High Energy Density Physics*, 2012, 8(4): 322-328.
- [30] Han Ruoyu, Zhou Haibin, Wu Jiawei, et al. Experimental verification of the vaporization's contribution to the shock waves generated by underwater electrical wire explosion under micro-second timescale pulsed discharge[J]. *Physics of Plasmas*, 2017, 24: 063511.