



·前沿技术与交叉科学·

双束等离子体尾波加速中的束流相对能散预测^{*}

王晓宁^{1,2}, 高 杰^{1,2}, 安维明³, 王 佳^{1,2}, 李大章^{1,2}, 曾 明^{1,2}, 鲁 巍⁴

(1. 中国科学院高能物理研究所, 北京 100049; 2. 中国科学院大学, 北京 100049;
3. 北京师范大学天文系, 北京 100875; 4. 清华大学工程物理系, 北京 100084)

摘 要: 针对空泡机制中的双束等离子体尾波电子加速设计, 给出了能够快速得到被加速束流在最大加速距离下的相对能散的预测公式。通过加速初始时刻束流纵向分布以及束流所处位置的纵向尾波场可得到束流最终相对能散。该预测公式不仅可应用于驱动束流与被加速束流初始能量相同的情况, 还可应用于两个束流初始能量不相同的情况。由该预测公式得到的束流相对能散与被加速束流和驱动束流的初始能量的比值有关, 而与两个束流初始能量的数值无关。利用准静态近似的粒子网格模拟程序 QuickPIC 对理论进行了模拟验证, 模拟结果与理论预期结果一致。

关键词: 等离子体尾波加速; 电子加速; 双束团; 相对能散; 粒子网格模拟

中图分类号: TF806

文献标志码: A

doi: 10.11884/HPLPB202234.210425

Predicting relative energy spread in two-bunch plasma wakefield acceleration

Wang Xiaoning^{1,2}, Gao Jie^{1,2}, An Weiming³, Wang Jia^{1,2}, Li Dazhang^{1,2}, Zeng Ming^{1,2}, Lu Wei⁴

(1. Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;
3. Department of Astronomy, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;
4. Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: We present a formula to directly obtain the final relative energy spread of a trailing beam at the maximal acceleration distance. The formula works for electron beams in a two-bunch plasma wakefield acceleration stage in the so-called nonlinear bubble regime. It only requires the longitudinal profile of the trailing beam and the longitudinal wakefield within the trailing beam at the beginning of an acceleration. This formula not only works well for drive beams and trailing beams with the same initial energies, but is also available for those beams with different initial energies. We find that the relative energy spread of the trailing beam obtained from the formula is determined by the ratio of the trailing beam's initial energy to the drive beam's initial energy rather than the specific value of their initial energies. We perform several computational simulations using the quasi-static particle-in-cell code QuickPIC, and the results agree well with that calculated from the formula.

Key words: plasma wakefield acceleration, electron acceleration, two-bunch, relative energy spread, particle-in-cell simulation

等离子体尾波加速因其超高的加速梯度(10~100 GV/m)、超小的加速结构(10~100 μm)以及产生超高品质束流的巨大潜力在加速器物理领域受到了广泛的关注。基于等离子体尾波的新加速原理首次由 Tajima 和 Dawson 在 1979 年提出^[1]。除了用激光脉冲作为驱动源, 高能带电粒子束也可以与等离子体相互作用激发尾波场来加速带电粒子。束流驱动的等离子体尾波加速(PWFA)的概念最早由 Chen 等人在 1985 年提出^[2]。20 世纪 90 年代初科学

* 收稿日期: 2021-10-10; 修订日期: 2021-12-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(12075030, 11975252); 中国科学院前沿科学重点研究计划项目(QYZDJ-SSW-SLH004); 中国科学院人才引进计划(E05153U1); 中国科学院高能物理研究所创新基金项目(Y954516)

联系方式: 王晓宁, wangxiaoning@ihep.ac.cn。

通信作者: 安维明, anweiming@bnu.edu.cn;

李大章, lidz@ihep.ac.cn。

家们发现了空泡机制的存在,在该机制中,驱动束流产生的空间电荷力将等离子体的电子向外排空,从而形成了一个只剩下离子的空腔,这种非线性尾波场的理论机制使获得更高品质的束流成为了可能^[3]。2006年,鲁巍等人基于空泡机制提出了自洽的非线性尾波场的理论模型^[4-5]。近20年以来科学家们利用斯坦福直线加速器中心(SLAC)的电子和正电子束流开展一系列PWFA实验,并且取得了很好的结果^[6-13],这些结果充分显示了利用PWFA高效产生高品质束流的巨大潜能。

随着未来光源和对撞机对束流品质要求的不断提高,科学家们对提高束流品质展开了积极的研究,其中束流相对能散的降低是研究热点之一。在双束PWFA初始设计中,往往需要通过完整的长距离加速模拟得到束流相对能散,但是这个过程需要耗费大量的计算资源并且通常耗时数小时。本文针对双束PWFA电子加速设计,给出了束流相对能散的预测公式,只需要通过加速初始状态中被加速束流的纵向密度分布和所处位置的纵向尾波场分布即可得到束流最终相对能散,从而节省了计算资源和时间。

1 束流相对能散预测公式

在空泡机制中,处于轴对称空腔里的束流所感受到的纵向尾波场与横向位置无关,当束流横向尺寸远小于空腔半径时,束团所有粒子在横向振荡时均处于空腔内部,那么处于空腔里的束流的能散主要受轴上纵向尾波场的影响^[4-5]。束流能量在纵向的分布则可表示为 $W(\xi, \Delta s) = \gamma_t(\xi) + \Delta s E_z(\xi)$,这里: γ_t 为被加速束流的初始能量; Δs 为加速距离; $E_z(\xi)$ 为轴上($x=0, y=0$)纵向电场强度,其中 x, y 为横向坐标; $\xi = ct - z$ 为以光速移动的纵向坐标。本文均采用归一化单位,长度使用等离子体趋肤深度 $k_p^{-1} = c/\omega_p$ 进行归一化,其中 ω_p 为电子等离子体频率, c 为光速;时间 t 使用 $1/\omega_p$ 进行归一化;速度使用光速 c 进行归一化;电场强度使用 $m_e c \omega_p / e$ 进行归一化,其中 m_e 为电子质量, e 为电子电荷量;电荷密度 ρ 使用 en_p 进行归一化;束流密度使用等离子体密度 n_p 进行归一化。

束流相对能散定义为束流绝对能散与束流中心能量的比值,则束流相对能散可表示为

$$\delta_E = \frac{\sqrt{\langle W^2 \rangle - \langle W \rangle^2}}{\langle W \rangle} = \sqrt{\frac{\int_{\xi_s}^{\xi_e} (\gamma_t(\xi) + \Delta s E_z(\xi))^2 \lambda_b(\xi) d\xi \cdot \int_{\xi_s}^{\xi_e} \lambda_b(\xi) d\xi}{\left(\int_{\xi_s}^{\xi_e} (\gamma_t(\xi) + \Delta s E_z(\xi)) \lambda_b(\xi) d\xi \right)^2} - 1} \quad (1)$$

式中: $\lambda_b(\xi) = \int_0^\infty \rho_b(x, y, \xi) dx dy$ 为束流单位长度下的归一化电荷量, ρ_b 为归一化束流电荷密度; ξ_s, ξ_e 为被加速束流头部(尾部)纵向坐标位置; $\langle W \rangle = \int_{\xi_s}^{\xi_e} (\gamma_t(\xi) + \Delta s E_z(\xi)) \lambda_b(\xi) d\xi / \int_{\xi_s}^{\xi_e} \lambda_b(\xi) d\xi$ 为束流中心能量。

在PWFA中,当驱动束流内部最大纵向减速电场所对应的驱动束流部分的粒子耗散,被加速束流将进入减速相位,此时则达到最大加速距离。因此,最大加速距离为

$$\Delta s = \frac{\gamma_d}{E_{\max}^-} \quad (2)$$

式中: γ_d 为驱动束流的初始能量; E_{\max}^- 为驱动束流内部最大纵向减速电场。

将式(2)代入式(1)变换可得

$$\delta_E = \sqrt{\frac{\int_{\xi_s}^{\xi_e} \left(D + \frac{E_z(\xi)}{E_{\max}^-} \right)^2 \lambda_b(\xi) d\xi \cdot \int_{\xi_s}^{\xi_e} \lambda_b(\xi) d\xi}{\left(\int_{\xi_s}^{\xi_e} \left(D + \frac{E_z(\xi)}{E_{\max}^-} \right) \lambda_b(\xi) d\xi \right)^2} - 1} \quad (3)$$

式中: $D = \frac{\gamma_t}{\gamma_d}$ 为被加速束流初始能量 γ_t 与驱动束流初始能量 γ_d 的比值。

式(3)表达式中含有被加速束流纵向分布信息,可知其可以应用于具有不同纵向分布的被加速束流,如高斯束流、平顶束流以及梯形束流等。在等离子体尾波加速中,目前三高束流应用最广泛,本文主要展示式(3)应用于三高束流加速的效果。这里,三高束流分布满足 $\rho_b = n_b \exp(-\xi^2/2\sigma_z^2) \exp(-(x^2+y^2)/2\sigma_r^2)$,其中: n_b 为束流峰值密度, σ_z 为束流RMS束长, σ_r 为束流RMS横向尺寸。另外,式(3)还可以应用于驱动束流与被加速束流的初始能量具有不同比值的情况。这对于基于PWFA的直线对撞机(PWFA-LC)^[14]等多级PWFA加速设计中的能散的估计具有参考意义。此外,式(3)中并未考虑被加速束流的初始能散对最终结果的影响。目前传统加速器技术所能产生的束流其初始能散可小至0.1%量级,对于利用PWFA所得到的高能量的被加速束流,其初始相对能散相比加速过

程中所引入的相对能散小一个数量级,因此在被加速束流具有低初始能散的情况下,式(3)仍具有指导意义。

2 模拟论证

2.1 基于粒子网格原理的 QuickPIC

随着计算技术的蓬勃发展,数值模拟在许多科学领域发挥着越来越重要的作用。等离子体物理领域的数值模拟有流体力学模拟、动力学方程求解以及粒子网格(PIC)三种方法。针对不同的等离子体物理问题,不同的方法各有优缺点。对于等离子体尾波加速这类多维度、非线性、超快的物理问题,PIC模拟方法作为一种从第一性原理出发并可以大规模并行化的计算方法,已经成为了模拟该类问题最主要的方法。

不同于普通的三维PIC模拟软件(如OSIRIS^[15]),QuickPIC^[16-18]采用了准静态近似的PIC算法,即在所求解物理方程中使用坐标系 $(x,y,\xi=ct-z,s=z)$ 代替坐标系 (x,y,z,t) ,其中 z 为束流移动的方向,并同时假设各物理量对 s 的偏导远小于对 ξ 的偏导 $\partial_s \ll \partial_\xi$,即所谓的准静态近似。这样,描述等离子体与束流的坐标系分别为 (x,y,ξ) 和 (x,y,ξ,s) 。因此在该近似下,驱动源与等离子体的演化得以分离,在计算等离子体尾波的过程中,可假设驱动源不变而计算得到等离子体尾波,然后再计算驱动源在尾波场中的变化从而得到更新的驱动源信息,这样循环计算驱动源在等离子体尾波中的运动。由于驱动源的变化较慢,因此更新驱动源的时间步长要远大于更新等离子体中电子及离子的时间步长。因此,相比普通的PIC计算程序,在对同一问题的模拟计算中,QuickPIC的计算量会大幅减小。通常情况下,其运算速度比普通PIC程序快1000倍,非常适用于带电粒子束驱动的等离子体尾波的长距离加速问题。

2.2 模拟结果

本文中所涉及的所有模拟计算均使用QuickPIC完成。下面所有模拟均在 $8 \times 8 \times 9$ (x,y,ξ) 模拟域中使用 $1024 \times 1024 \times 512$ 网格。

当驱动束流激发三维非线性尾波场后,被加速束流需要加载在合适的加速相位以获得较小的能散。本文在模拟中也遵循此上述原则。此外,考虑到在实际的PWFA设计中,呈三高斯分布的束流目前应用最为广泛,我们针对驱动束流以及被加速束流均呈三高斯分布的加速进行模拟计算。本文选取 $\pm 3\sigma_{zr}$ 范围的被加速束流的粒子,运用式(3)对其相对能散进行预测,其中 σ_{zr} 为被加速束流归一化RMS束长。我们首先考虑驱动束流与被加速束流具有相同初始能量的情况。图1为 $D=1$ 时加速开始时刻以及根据式(2)所得的最大加速距离对应时刻等离子体中的尾波结构。

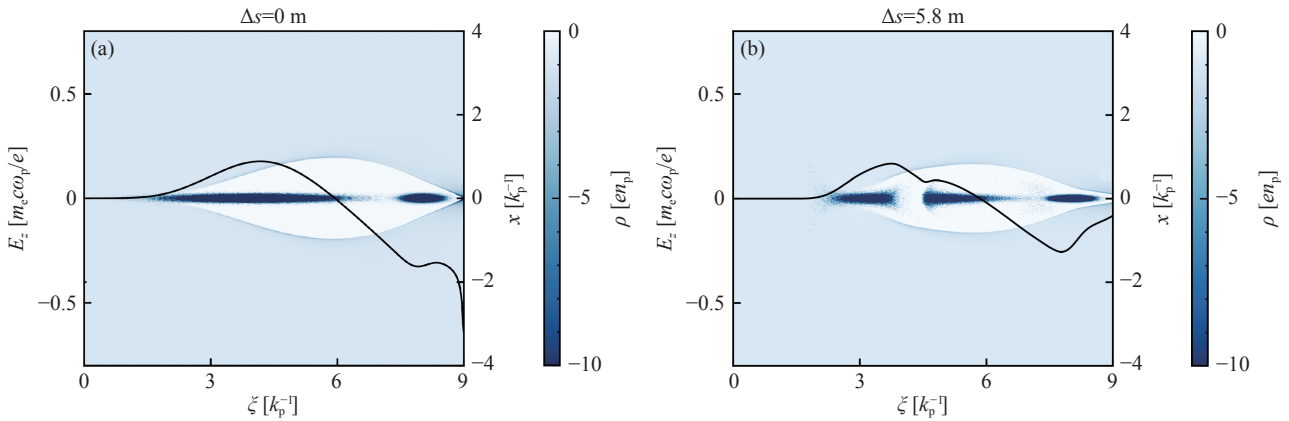


Fig. 1 Wake structure in the plasma at the beginning and at the maximal acceleration distance of an acceleration at $D=1$

图1 $D=1$ 时加速开始时刻以及达到最大加速距离时刻等离子体中的尾波结构

在该模拟中,等离子体密度 $n_p = 10^{16} \text{cm}^{-3}$,驱动束流初始能量 $W_{ds} = 10 \text{ GeV}$,被加速束流初始能量 $W_{is} = 10 \text{ GeV}$,驱动束流归一化RMS束长 $\sigma_{zd} = 1$,其归一化峰值密度 $n_{bd} = 80$,被加速束流归一化RMS束长 $\sigma_{zr} = 0.25$,其归一化峰值密度 $n_{br} = 76.36$,归一化束流间距 $d = 4$ 。为了使束流在加速过程中维持束团横向相空间分布不变,这里两束流初始状态均为匹配状态,即束流的归一化横向RMS尺寸 σ_r 和归一化发射度 ϵ_N 满足匹配公式 $\sigma_r = (2m_e \epsilon_N^2 / \gamma)^{1/4}$ ^[9],其中 γ 为粒子平均能量的洛伦兹因子。模拟中选取驱动束流的归一化横向RMS尺寸为 $\sigma_{rd} = 0.05$,其归一化发射度为 $\epsilon_{Nd} = 0.25$,被加速束流的归一化横向RMS尺寸为 $\sigma_{rr} = 0.05$,其归一化发射度为 $\epsilon_{Nr} = 0.25$ 。束流初始能散为理想状态。该PIC模拟与式(3)预测的相对能散结果如表1所示。根据式(2)可得最大加速距离 $\Delta s = 5.8 \text{ m}$,进而根据式(3)可知,当达到最大加速距离时,被加速束流相对能散为 $\delta_{Ep} = 2.36\%$ 。在模拟中,当加速距离为 5.8 m 时,被加速

表 1 PIC 模拟和式 (3) 得到的相对能散

Table 1 Relative energy spread from PIC simulations and equation (3)

D	drive beam						d/k_p^{-1}	trailing beam					$\Delta s/m$	$\delta_{Er}/\%$	$\delta_{Ep}/\%$
	W_{ds}/GeV	σ_{zd}/k_p^{-1}	n_{bd}/n_p	$\varepsilon_{Nd}/k_p^{-1}$	σ_{rd}/k_p^{-1}	W_{ts}/GeV		σ_{zt}/k_p^{-1}	n_{bt}/n_p	$\varepsilon_{Nt}/k_p^{-1}$	σ_{rt}/k_p^{-1}				
1	10	1	80	0.25	0.05	4	10	0.25	76.36	0.25	0.05	5.8	2.33	2.36	
2	10	1	80	0.25	0.05	4	20	0.25	76.36	0.35	0.05	5.8	1.72	1.74	
2	5	1	80	0.17	0.05	4	10	0.25	76.36	0.25	0.05	2.9	1.72	1.74	

束流能量增益为 18.3 GeV, 对应相对能散为 $\delta_{Er} = 2.33\%$, 这与公式(3)得到的相对能散的预测结果极为接近。实际模拟中所能达到的最大加速距离为 6.0 m, 这比由式(2)得到的最大加速距离略长, 这是由驱动束流中粒子丢失引起的减速电场变小造成的, 该加速距离下对应的束流相对能散为 2.34%。但在实际等离子体尾波加速器中, 为了避免被加速束流品质下降或粒子丢失, 会在驱动束流耗散前停止加速, 因此由式(3)得到的最大加速距离时刻的被加速束流的相对能散更有意义。

基于 PWFA 的直线对撞机 (PWFA-LC) 方案利用多级级联的方式, 可以在保持驱动束流初始能量不变的情况下, 让被加速束流获得更高的能量增益, 此时驱动束流与被加速束流初始能量不同, 即 $D \neq 1$ 。这里将上述模拟的被加速束流的初始能量变为 $W_{ts} = 20 \text{ GeV}$, 即以 $D = 2$ 为例。模拟参数如表 1 所示, 除发射度参数外被加速束流其他初始参数不变, 此时在匹配条件下的被加速束流归一化发射度为 $\varepsilon_{Nt} = 0.35$, 根据式(3)所得到的被加速束流最终能散为 1.74%, 对于同样的驱动束流, 模拟中所能达到的最大加速距离应与上个例子相同, 也为 5.8 m, 该时刻下等离子体尾波结构如图 2(a) 所示, 此时束流相对能散为 1.72%, 这与式(3)预测结果基本一致。接下来, 保持 $D = 2$, 将驱动束流的初始能量变为 $W_{ds} = 5 \text{ GeV}$, 模拟参数如表 1 所示, 除发射度参数外驱动束流其他初始参数不变, 初始束流仍为匹配状态。由式(2)可知, 此时最大加速距离变为原来的一半 (2.9 m), 该模拟中得到的相对能散与前一种情况相同, 与理论预期一致, 其等离子体尾波结构如图 2(b) 所示。由此验证了式(3)对于被加速束流最终相对能散的预测与驱动束流和被加速束流初始能量的比值有关, 而与两个束流初始能量的数值无关。

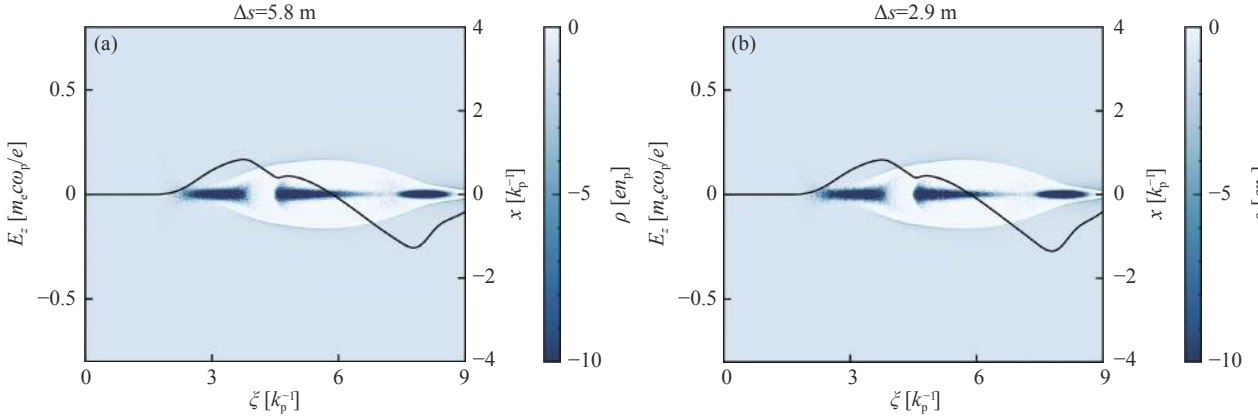


Fig. 2 Wake structure in the plasma for (a) drive beam's initial energy is 10 GeV and (b) drive beam's initial energy is 5 GeV at the maximal acceleration distance of an acceleration at $D = 2$

图 2 $D = 2$ 时在最大加速距离时刻 (a) 驱动束流初始能量为 10 GeV 和 (b) 驱动束流初始能量为 5 GeV 的等离子体中的尾波结构

2.3 分析与讨论

通过上述模拟结果可知, 在双束 PWFA 设计中, 当使用两个三高斯束流进行加速时, 无论驱动束流与被加速束流初始能量是否相同, 式(3)都可以对被加速束流的最终相对能散进行很好的预测。这主要是由于当使用三高斯束流作为驱动束流时, 驱动束流内部最大的减速电场在加速过程中相对稳定, 由式(2)得到的最大加速距离相比模拟中的最大加速距离差别较小, 从而由式(3)得到的被加速束流的最终相对能散与模拟结果基本一致。

由式(3)可知, 其还可应用于平顶分布、梯形分布等任意纵向分布的被加速束流。但是对于驱动束流是非三高斯分布的情况, 式(3)并不是总能得到很好的预测效果。比如对于纵向呈三角形分布^[20]的驱动束流, 由于其头部密度较低, 不足以激发非线性尾波场, 横向聚焦力相对较弱, 因此在加速过程中, 驱动束流头部的粒子易耗散, 从而使驱动束流内部的最大减速电场变化。在这种情况下, 实际最大加速距离与式(2)得到的结果相差较大, 从而

导致相对能散理论预期的误差增大。不过目前在 PWFA 实际应用中, 三高斯束流应用更为广泛, 对此式(3)仍具有重要的指导意义。

3 结 论

本文针对双束 PWFA 电子加速设计, 通过预估最大加速距离, 给出了被加速束流最终相对能散的理论预测公式。该公式不受被加速束流的纵向分布的限制, 也不要求驱动束流与被加速束流初始能量相同, 广泛适用于多种 PWFA 应用场景。通过粒子模拟程序, 我们对目前应用最广泛的三高斯束流进行了模拟, 模拟结果与理论预测一致。由于我们的预测公式仅与初始束流的纵向分布和纵向尾波场分布有关, 无需进行大量的长距离加速的模拟, 因此可以大幅减少计算资源和时间, 为设计、优化等离子体尾波加速器提供了帮助。

参考文献:

- [1] Tajima T, Dawson J M. Laser electron accelerator[J]. *Physical Review Letters*, 1979, 43(4): 267-270.
- [2] Chen P, Dawson J M, Huff R W, et al. Acceleration of electrons by the interaction of a bunched electron beam with a plasma[J]. *Physical Review Letters*, 1985, 54(7): 693-696.
- [3] Rosenzweig J B, Breizman B, Katsouleas T, et al. Acceleration and focusing of electrons in two-dimensional nonlinear plasma wake fields[J]. *Physical Review A*, 1991, 44(10): R6189-R6192.
- [4] Lu Wei, Huang Chengkun, Zhou Miaomiao, et al. Nonlinear theory for relativistic plasma wakefields in the blowout regime[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96: 165002.
- [5] Lu Wei, Huang Chengkun, Zhou Miaomiao, et al. A nonlinear theory for multidimensional relativistic plasma wave wakefields[J]. *Physics of Plasmas*, 2006, 13: 056709.
- [6] Hogan M J, Assmann R, Decker F J, et al. E-157: a 1.4-m-long plasma wake field acceleration experiment using a 30 GeV electron beam from the Stanford Linear Accelerator Center Linac[J]. *Physics of Plasmas*, 2000, 7(5): 2241-2248.
- [7] Muggli P, Lee S, Katsouleas T, et al. Collective refraction of a beam of electrons at a plasma-gas interface[J]. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 2001, 4: 091301.
- [8] Clayton C E, Blue B E, Dodd E S, et al. Transverse envelope dynamics of a 28.5-GeV electron beam in a long plasma[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 88: 154801.
- [9] Hogan M J, Clayton C E, Huang Chengkun, et al. Ultrarelativistic-positron-beam transport through meter-scale plasmas[J]. *Physical Review Letters*, 2003, 90: 205002.
- [10] Blue B E, Clayton C E, O'Connell C L, et al. Plasma-wakefield acceleration of an intense positron beam[J]. *Physical Review Letters*, 2003, 90: 214801.
- [11] Muggli P, Blue B E, Clayton C E, et al. Meter-scale plasma-wakefield accelerator driven by a matched electron beam[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93: 014802.
- [12] Litos M, Adli E, An Weiming, et al. High-efficiency acceleration of an electron beam in a plasma wakefield accelerator[J]. *Nature*, 2014, 515(7525): 92-95.
- [13] Corde S, Adli E, Allen J M, et al. Multi-gigaelectronvolt acceleration of positrons in a self-loaded plasma wakefield[J]. *Nature*, 2015, 524(7566): 442-445.
- [14] Seryi A, Hogan M, Pei Shilun, et al. A concept of plasma wake field acceleration linear collider (PWFA-LC)[R]. SLAC-PUB-13766, 2009.
- [15] Fonseca R A, Silva L O, Tsung F S, et al. OSIRIS: a three-dimensional, fully relativistic particle in cell code for modeling plasma based accelerators[C]//Proceedings of International Conference on Computational Science. Amsterdam: Springer, 2002: 342-351.
- [16] Huang Chengkun, Decyk V K, Ren C, et al. QUICKPIC: a highly efficient particle-in-cell code for modeling wakefield acceleration in plasmas[J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 217(2): 658-679.
- [17] An Weiming, Decyk V K, Mori W B, et al. An improved iteration loop for the three dimensional quasi-static particle-in-cell algorithm: QuickPIC[J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 250: 165-177.
- [18] <https://gitee.com/bnu-plasma-astrophysics-sg/quick-pic-open-source.git>.
- [19] Joshi C, Blue B, Clayton C E, et al. High energy density plasma science with an ultrarelativistic electron beam[J]. *Physics of Plasmas*, 2002, 9(5): 1845-1855.
- [20] Bane K L F, Chen P, Wilson P B. On collinear wake field acceleration[J]. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 1985, 32(5): 3524-3526.