



·粒子束及加速器技术·

粒子加速器局部控制网形变分析*

张旭东, 陈文军, 张小东, 孙国珍, 张斌, 王少明, 袁建东

(中国科学院近代物理研究所, 兰州 730000)

摘要: 基于泰勒展开的方法实现局部控制网的拟合, 使用卡方检验判断局部控制网中是否存在形变点。若存在形变点, 则在选权迭代的过程中找到局部控制网中所有的形变点, 并将卡方检验通过作为迭代终止条件。对哈尔滨工业大学空间地面模拟装置 2 号终端控制网的两期观测成果进行了分析, 实验表明, 将卡方检验和选权迭代法加入控制网拟合之后, 可以很好地探测出局部控制网中的形变点。在找出所有形变点之后, 可以求得更为准确的局部控制网拟合参数。

关键词: 形变分析; 控制网拟合; 选权迭代; 卡方检验; 粒子加速器

中图分类号: TL56

文献标志码: A

doi: 10.11884/HPLPB202234.210260

Analysis on deformation of partial control network of particle accelerator

Zhang Xudong, Chen Wenjun, Zhang Xiaodong, Sun Guozhen, Zhang Bin, Wang Shaoming, Yuan Jiandong

(Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China)

Abstract: The fitting of the local control network is realized based on the method of Taylor expansion, and the chi-square test is used to judge whether there is a deformation point in the local control network. If there are deformation points, find all the deformation points in the local control network in the process of weight selection iteration, repeat the above process until the chi-square test passes. The two-phase observation results of the Harbin Institute of Technology Space Environment Simulation and Research Infrastructure (SESRI) No.2 terminal control network are analyzed. The experiments show that after adding the chi-square test and the weight selection iteration method to the control network fitting, the deformation points in the local control network can be well detected. After finding all the deformation points, more accurate local control network fitting parameters can be obtained.

Key words: deformation analysis, control network fitting, weight selection iteration, chi-square test, particle accelerator

大型工程因建设周期长、现场条件复杂、干扰因素多, 最初建立的控制网会随着时间的推移而发生形变。这对后期工程建设会产生不好的影响^[1], 因此需要对控制网络进行长期监测并做必要的修正, 在工程测量中, 对水准网和平面网形变的研究较多^[1-7], 而对三维网形变的研究较少。

粒子加速器属于大型科学装置, 在其建设安装中, 三维控制网起到全局控制的作用, 三维控制网布设的合理性、精度及其稳定性对于后续准直安装十分重要^[8]。当前, 研究人员就加速器控制网的建立和平差研究较多^[9-12], 而对控制网形变的研究较少。文献 [13] 使用平均间隙法和三维控制网的灵敏度椭圆元素分析了上海光源控制网的稳定性, 但该方法没有考虑到各观测点权重不同的情形。

识别和消除不稳定参考点的影响一直是新布伦瑞克大学 (UNB) 的研究重点, Y.Q.Chen 和 A. Chrzanowski 在 UNB 提出了一种迭代加权相似变换 (IWST) 的形变分析方法^[14-15]。该方法是一个迭代过程, 根据参考点在前一次迭代中的残差来确定参考点的权因子, 并通过逐次迭代使得变形向量的第一范数最小。该技术已成功应用于多种类型的工程项目, 在加拿大大地测量工程中心开发的自动警报监测系统 ALERT 中采用 IWST 方法消除了不稳定参考站和全自动跟踪全站仪的影响^[16]。美国费米实验室采用 IWST 的方法对 Tevatron 质子加速器进行了变形分析研究^[17], Tevatron 加速器的准直控制网包含近 2000 个控制点, 而 IWST 方法取得了令人满意的效果。通用大地测

* 收稿日期: 2021-07-07; 修订日期: 2021-11-25
联系方式: 张旭东, xdzhang@impcas.ac.cn。

量计算软件 GeoLab 也采纳了 IWST 方法^[18]。IWST 方法是经典稳健方法的原型,很多稳健的方法是不同优化条件下对其的改进^[15,19]。基于此,本文提出在局部控制网拟合时加入卡方检验和选权迭代的方法,以探测出局部控制网中的形变点,进而求得更为准确的局部控制网拟合参数。

1 局部控制网拟合

在加速器准直安装中,通常采用激光跟踪仪完成局部三维控制点的测量,然后跟全局控制网进行拟合,该过程涉及到三维坐标系转换。因加速器工程的高精度特征,要求三维坐标系转换具有极高的精度与可靠性。

在测绘工程中,最常用的空间三维变换是布尔沙七参数模型^[20],但在布尔沙模型中,预设旋转角度均为小角度,将函数模型线性化后对参数进行求解。为提高三维坐标系转换的精度及可靠性,研究人员做了大量的工作^[21-27]。本文将函数模型在 7 个参数的初值处泰勒展开,且仅保留一阶项,然后对 7 个参数进行迭代求解。

两个三维坐标系的变换过程为

$$X_t = k * R * X_s + T \tag{1}$$

式中: R 为旋转矩阵; T 为平移向量; k 为缩放因子; X_t 和 X_s 分别是目标坐标和原坐标系。

如图 1 所示,为将坐标系 $o-xyz$ 变换至坐标系 $O-XYZ$,首先绕 x 轴逆时针旋转 α ,得到旋转矩阵 R_1 ;再绕新得的 y' 轴逆时针旋转 β ,得到旋转矩阵 R_2 ;然后绕新得的 z'' 轴逆时针旋转 γ ,得到旋转矩阵 R_3 。最后,将坐标系整体平移可得 $O-XYZ$ 。

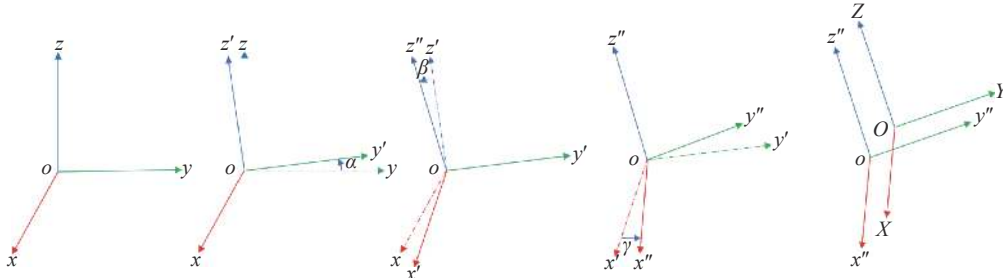


Fig. 1 Schematic diagram of three-dimensional coordinate system transformation

图 1 三维坐标系变换示意图

虽然 α, β, γ 都是逆时针旋转的角度,但绕 y' 轴的旋转与绕 x 轴和 z'' 轴的旋转不同。若将 x, y, z 认为是由小到大的轴,那么绕 x 轴和 z'' 轴的旋转都是小轴转向大轴($y \rightarrow z, x \rightarrow z$),而绕 y' 轴的旋转是大轴转向小轴($z \rightarrow x$)。

最终的旋转矩阵为: $R = R_3 * R_2 * R_1$, 即

$$R = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \tag{2}$$

1.1 函数模型与误差方程

由式(1)、式(2)可知函数模型

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_t = k * \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_s + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \tag{3}$$

即

$$\begin{cases} X_t = f_x(k, \alpha, \beta, \gamma, \Delta X, \Delta Y, \Delta Z, X_s, Y_s, Z_s) \\ Y_t = f_y(k, \alpha, \beta, \gamma, \Delta X, \Delta Y, \Delta Z, X_s, Y_s, Z_s) \\ Z_t = f_z(k, \alpha, \beta, \gamma, \Delta X, \Delta Y, \Delta Z, X_s, Y_s, Z_s) \end{cases} \tag{4}$$

将式(4)在参数初值 $X^{(0)} = (k_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \Delta X_0, \Delta Y_0, \Delta Z_0)$ 处泰勒展开,且保留一阶项,有

$$f = f(X^{(0)}) + \nabla f(X^{(0)})^T \Delta X + O(X) \tag{5}$$

其中, $\nabla f(X^{(0)}) = \left[\frac{\partial f}{\partial k} \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma} \quad \frac{\partial f}{\partial \Delta X} \quad \frac{\partial f}{\partial \Delta Y} \quad \frac{\partial f}{\partial \Delta Z} \right]_{X^{(0)}}^T$, 它是 $f(X)$ 在 $X^{(0)}$ 处的梯度。

对式 (4) 各项求导, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial f_x}{\partial k} = X'; & \frac{\partial f_y}{\partial k} = Y'; & \frac{\partial f_z}{\partial k} = Z'; & \frac{\partial f_x}{\partial \Delta X} = 1; & \frac{\partial f_y}{\partial \Delta Y} = 1; & \frac{\partial f_z}{\partial \Delta Z} = 1 \\ \frac{\partial f_x}{\partial \alpha} = k(\sin\beta Y' + \cos\beta \sin\gamma Z'); & \frac{\partial f_x}{\partial \beta} = -k \cos\gamma Z'; & \frac{\partial f_x}{\partial \gamma} = k Y' \\ \frac{\partial f_y}{\partial \alpha} = k(-\sin\beta X' + \cos\beta \cos\gamma Z'); & \frac{\partial f_y}{\partial \beta} = k \sin\gamma Z'; & \frac{\partial f_y}{\partial \gamma} = -k X' \\ \frac{\partial f_z}{\partial \alpha} = -k(\cos\beta \sin\gamma X' + \cos\beta \cos\gamma Y'); & \frac{\partial f_z}{\partial \beta} = k(\cos\gamma X' - \sin\gamma Y'); & \frac{\partial f_z}{\partial \gamma} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = R^* \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_s \quad (7)$$

将函数模型泰勒展开, 有

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \Delta X^0 \\ \Delta Y^0 \\ \Delta Z^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\Delta X \\ d\Delta Y \\ d\Delta Z \end{bmatrix} + k^0 R^0 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_s + R^0 dk \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_s + k^0 dR \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_s =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & k(\sin\beta Y' + \cos\beta \sin\gamma Z') & -k \cos\gamma Z' & k Y' & X' \\ 0 & 1 & 0 & k(-\sin\beta X' + \cos\beta \cos\gamma Z') & k \sin\gamma Z' & -k X' & Y' \\ 0 & 0 & 1 & -k(\cos\beta \sin\gamma X' + \cos\beta \cos\gamma Y') & k(\cos\gamma X' - \sin\gamma Y') & 0 & Z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta X \\ d\Delta Y \\ d\Delta Z \\ d\alpha \\ d\beta \\ d\gamma \\ dk \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X^0 \\ \Delta Y^0 \\ \Delta Z^0 \end{bmatrix} + k^0 R^0 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_s \quad (8)$$

令

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & k(\sin\beta Y' + \cos\beta \sin\gamma Z') & -k \cos\gamma Z' & k Y' & X' \\ 0 & 1 & 0 & k(-\sin\beta X' + \cos\beta \cos\gamma Z') & k \sin\gamma Z' & -k X' & Y' \\ 0 & 0 & 1 & -k(\cos\beta \sin\gamma X' + \cos\beta \cos\gamma Y') & k(\cos\gamma X' - \sin\gamma Y') & 0 & Z' \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$l = - \begin{bmatrix} \Delta X^0 \\ \Delta Y^0 \\ \Delta Z^0 \end{bmatrix} - k^0 R^0 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_s + \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_t \quad (10)$$

$$x = [d\Delta X \quad d\Delta Y \quad d\Delta Z \quad d\alpha \quad d\beta \quad d\gamma \quad dk]^T \quad (11)$$

则有误差方程

$$V = Bx - l \quad (12)$$

1.2 计算过程

将函数模型在 $X^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ 处泰勒展开, 有

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_s & Y_s & X_s \\ 0 & 1 & 0 & Z_s & 0 & -X_s & Y_s \\ 0 & 0 & 1 & -Y_s & X_s & 0 & Z_s \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} X_t - X_s \\ Y_t - Y_s \\ Z_t - Z_s \end{bmatrix} \quad (13)$$

根据平差准则, 为使 $V^T P V = \min$, 则: $x = (B^T P B)^{-1} B^T P l$ 。在初次求解中, 将权阵定位单位阵, 即 $P = E$ 。根据泰勒展开, 有: $X^{(0)} = X^{(0)} + x$ 。将 $X^{(0)}$ 作为初始值, 代入误差方程继续求解, 直到 $\text{MAX}(d\Delta X, d\Delta Y, d\Delta Z, d\alpha, d\beta, d\gamma, dk) < 10^{-8}$ 。最终, 求得的 $X^{(0)}$ 为待求参数向量。

2 假设检验

在经典测量平差理论中, 观测值服从正态分布, 单位权方差的估值为: $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{f}$, f 为多余观测数。因此, 可

使用卡方检验判断局部控制网中是否存在形变点。卡方检验需要知道母体方差 σ_0^2 , σ_0 一般根据测量仪器的标称精度确定。

AT402 激光跟踪仪的测点不确定度 $U_{x,y,z}$ 为最大允许误差 (MPE), 其值为: $15 \mu\text{m}+6 \mu\text{m}/\text{m}$ 。根据 ASME B89.4.19-2006 和 ISO 10360-10 标准及文献 [28], 可知 $U_{x,y,z} = 2\sigma_0$ 。故在实际观测中, AT402 的测点中误差为

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \left(15 + 6 * \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (S_i) \right) \mu\text{m} \quad (14)$$

式中: S_i 为第*i*个点的观测距离, 单位为 m; m 为观测点数。

因此, 可作原假设 $H_0 : E(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2$, 此时局部控制网中不存在形变点; 备选假设 $H_1 : E(\hat{\sigma}_0^2) \neq \sigma_0^2$, 局部控制网中存在形变点。构造统计量

$$Z = \frac{r * \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_\alpha^2(r) \quad (15)$$

式中: r 为多余观测量, 取显著性 $\alpha = 0.05$, 进行右尾检验, 当 $Z < \chi_\alpha^2(r)$ 时接受原假设, 认为此时局部控制网中不存在形变点。

3 选权迭代

若在卡方检验中, 原假设未能通过, 则局部控制网中存在形变点, 需要将形变点找出再进行控制网拟合。在前文 1.2 节中, 认为所有的观测点具有相同的精度, 因此在计算中, 所有的观测点都取单位权。但这通常不符合客观事实, 因为形变的随机性与不可预测性, 控制网点存在不同程度的形变。为了计算出准确的拟合参数和分析控制网点的稳定性, 需要根据初次平差结果, 对观测点重新进行定权。

研究人员已经提出了多种定权方法, 包括最小二乘法、绝对和极小法、Huber 方案法^[29]、Fair 函数法、丹麦法。本文采用文献 [30] 的等价权方法, 即 IGG 权因子。该方法主要依据残差进行定权, 其做法是: 残差在 1.5 倍中误差内的, 权定为 1; 2.5 倍中误差外的, 权定为 0, 即舍去观测; 残差在 1.5 倍中误差和 2.5 倍中误差之间的, 根据绝对和极小取权因子, 权

$$p_i = \frac{1}{v_i} k * \sigma_0 \quad (16)$$

式中: v_i 为第*i*个点的残差。

4 算例分析

4.1 算例一

使用模拟值验证泰勒展开三维坐标系转换的精度。如表 1 所示, 总共做了 6 次模拟计算, 在每次计算中, 模拟值在上, 计算值在下。由表 1 可知, 采用泰勒展开的七参数解算具有极高的精度。

表 1 模拟计算

Table 1 Simulation calculation

calculations	translation factor/mm			rotation factor/(°)			factor	number of iterations
	ΔX	ΔY	ΔZ	α	β	γ	k	
1	0	0	0	0	0	0	1	1
	0	0	0	0	0	0	1	
2	5	5	5	5	5	5	1.002	947
	5	5	5	5	4.999 999	5	1.002	
3	10	10	10	10	10	10	1.001	1005
	10	10	10	10	9.999 999	10	1.001	
4	20	20	20	20	20	20	0.999	1085
	20	20	20	20	20	20	0.999	
5	40	40	40	40	40	40	0.998	1521
	40	40	39.999 999	40	40	40	0.998	
6	60	60	60	60	60	60	0.997	1068
	60	60	60	59.999 999	60	60	0.997	

4.2 算例二

表 2 为哈尔滨工业大学空间地面模拟装置 (SESRI) 实验终端 2 的两期观测值。

表 2 SESRI 实验终端 2 的两期观测值
Table 2 Two-phase observations of SESRI Experimental Terminal 2

point	the first phase (2021.4)			the second phase (2021.6)		
	X/mm	Y/mm	Z/mm	X/mm	Y/mm	Z/mm
L55	-5092.17	879.62	14895.65	6286.72	-15526.63	821.79
L57	-2261.04	879.28	17717.09	2815.70	-17509.32	822.15
L59	-3120.62	879.22	21412.56	-520.04	-15701.26	822.40
L60	-4107.95	-821.72	24779.41	-3505.58	-13857.21	-878.36
L61	-4107.01	877.20	24777.54	-3503.76	-13858.44	820.70
L62	-4074.18	-817.67	27037.53	-5692.02	-13291.53	-874.05
L63	-4077.77	876.91	27033.99	-5687.46	-13288.83	820.64
L64	-6897.19	-773.87	29870.60	-7676.14	-9818.57	-830.23
L65	-6897.30	880.72	29867.91	-7673.23	-9819.01	824.42
L67	-9746.56	894.02	32716.15	-9665.07	-6316.66	837.73
L68	-13217.29	-822.38	31985.43	-8041.08	-3163.51	-879.28
L69	-13215.11	879.59	31991.11	-8046.88	-3164.01	822.76
L70	-16050.40	-820.92	29166.76	-4572.37	-1178.27	-878.59
L71	-16047.74	874.53	29165.73	-4571.81	-1180.86	816.96
L72	-18878.70	-809.52	26339.60	-1096.73	800.14	-867.90
L73	-18879.30	879.65	26340.53	-1097.19	801.22	821.38
L74	-21711.32	-841.15	23519.47	2373.33	2784.62	-900.23
L75	-21710.28	846.76	23519.11	2373.62	2783.72	787.79
L76	-23062.45	-815.86	20935.80	5222.75	3403.02	-875.45
L77	-23061.11	882.09	20947.33	5211.70	3405.02	822.63
L78	-22368.90	-818.96	19093.13	6816.01	2245.99	-878.70
L79	-22309.74	883.25	19037.43	6854.43	2174.44	823.70
L80	-19511.28	-781.72	16233.69	8816.34	-1267.34	-841.25
L81	-19509.35	875.00	16238.17	8811.89	-1267.75	815.53
L82	-16684.40	-808.82	13405.92	10794.26	-4742.76	-868.25
L83	-16690.55	881.77	13407.80	10794.50	-4735.99	822.43

图 2 是 SESRI 实验终端 2 的控制网点分布情况。其中红绿蓝三条线段分别代表了三维坐标系中的 x, y, z 轴, 红色点是墙面上较低位置的靶标点, 蓝色点是墙面上较高位置的靶标点。

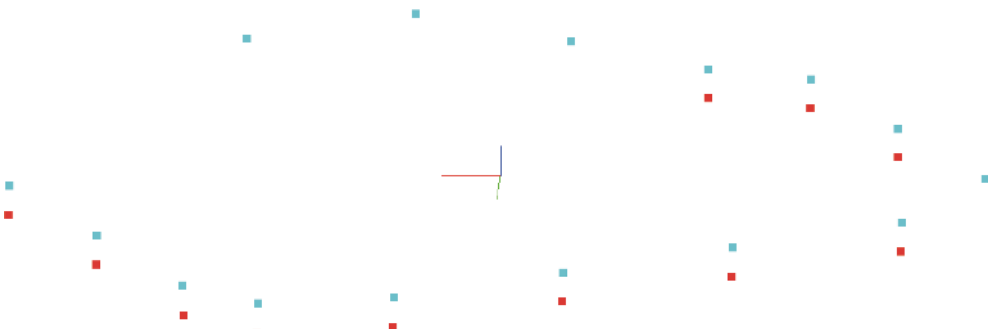


Fig. 2 SESRI Experimental Terminal 2 Control Network

图 2 SESRI 实验终端 2 控制网

控制点的平均观测距离为 9.640 6 m, 由式(14)可知, 测点中误差为 $\sigma_0 = 0.036 4 \text{ mm}$ 。多余观测数 $r = 3 * m - 7$ 。在初次平差及检验中, 自由度 $r=71$ 。初次平差后的单位权中误差估值 $\hat{\sigma}_0 = 0.063 8 \text{ mm}$ 。此时进行卡方检验, 由式(15)可知, $Z=217.804 4$, 查阅卡方检验临界表可知: $\chi_{0.05}^2(71) = 91.670$ 。 $Z > \chi_{0.05}^2(71)$, 卡方检验未通过, 观测点中存在形变点。

此时可基于残差进行选权迭代, 图 3 为初次平差后的各点残差。图 3 可知, L57, L82 为形变点。根据 IGG 定权准则, 将 L57、L82 的权定为 0; 根据式(16)对 L55, L59, L65, L68, L76, L77, L78, L79, L80, L83 定权; 其余各点的权仍然为 1。

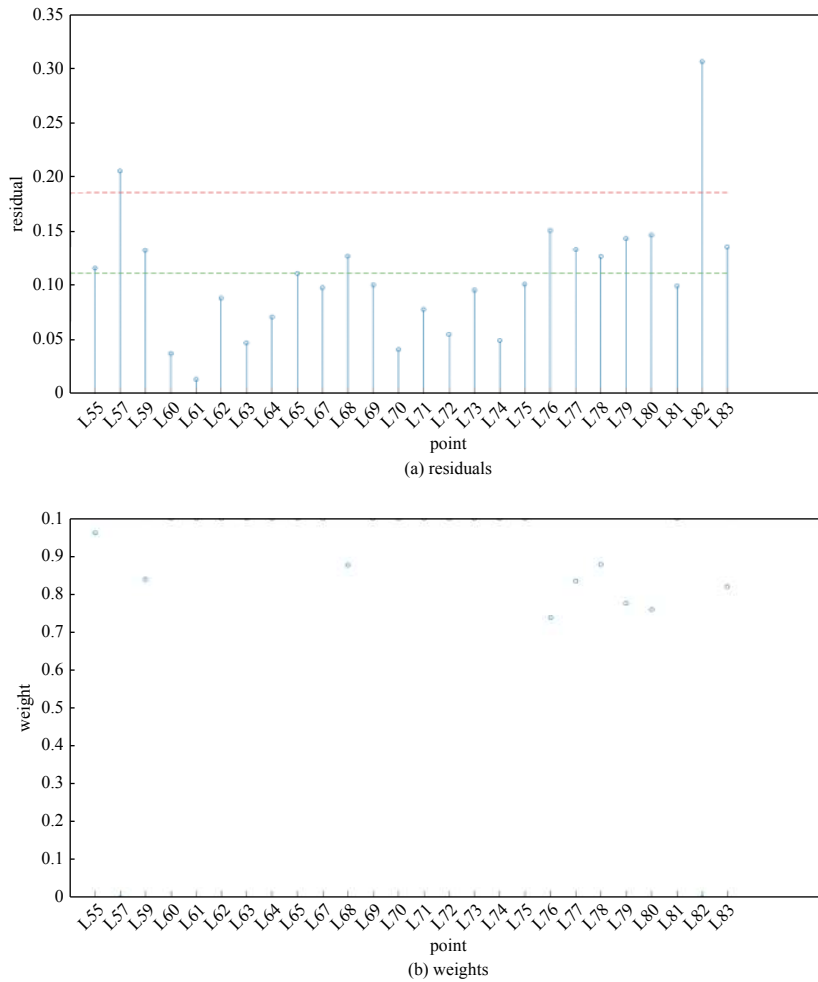


Fig. 3 Residuals and weights of each point after the initial adjustment

图 3 初次平差后各点残差和权

根据新得到的权进行控制网拟合, 进行假设检验。此时, 自由度 $r=65$, 单位权中误差估值 $\hat{\sigma}_0 = 0.0481 \text{ mm}$ 。 $Z=113.509$, $\chi_{0.05}^2(65) = 84.821$ 。 $Z > \chi_{0.05}^2(65)$, 卡方检验仍未通过, 观测点中仍存在形变点。

图 4 为二次平差后各点的残差与权。由图 4 可知, 形变点为 L55, L57, L76, L80, L82, L83。继续根据 IGG 准则定权, 进行控制网拟合, 进行假设检验。此时, 自由度 $r=53$, 单位权中误差估值 $\hat{\sigma}_0 = 0.038 1 \text{ mm}$ 。 $Z=57.846$, $\chi_{0.05}^2(53) = 70.993$ 。 $Z < \chi_{0.05}^2(53)$, 卡方检验通过, 所有的形变点都已找出。表 3 为将上述形变点剔除后使用 SA 软件求得的三维坐标系拟合参数和本文方法得到的三维坐标系拟合参数, 两者十分接近。

5 结 论

本文提出将假设检验和选权迭代法加入到局部控制网拟合中, 取得了两个方面的成效: (1)能逐站探测粒子加速器控制网中的形变点; (2)可求得更为准确的三维坐标系转换参数, 有助于后续准直安装。当前, 工作人员根据经验与 SA 软件中的残差来剔除粗差点并进行局部控制网拟合, 与之相比, 本文方法使用了数学工具来判定形变点, 也在平差过程中考虑到了各观测点权不同的情形, 计算结果与 SA 软件基本一致, 验证了本文方法的可行性。

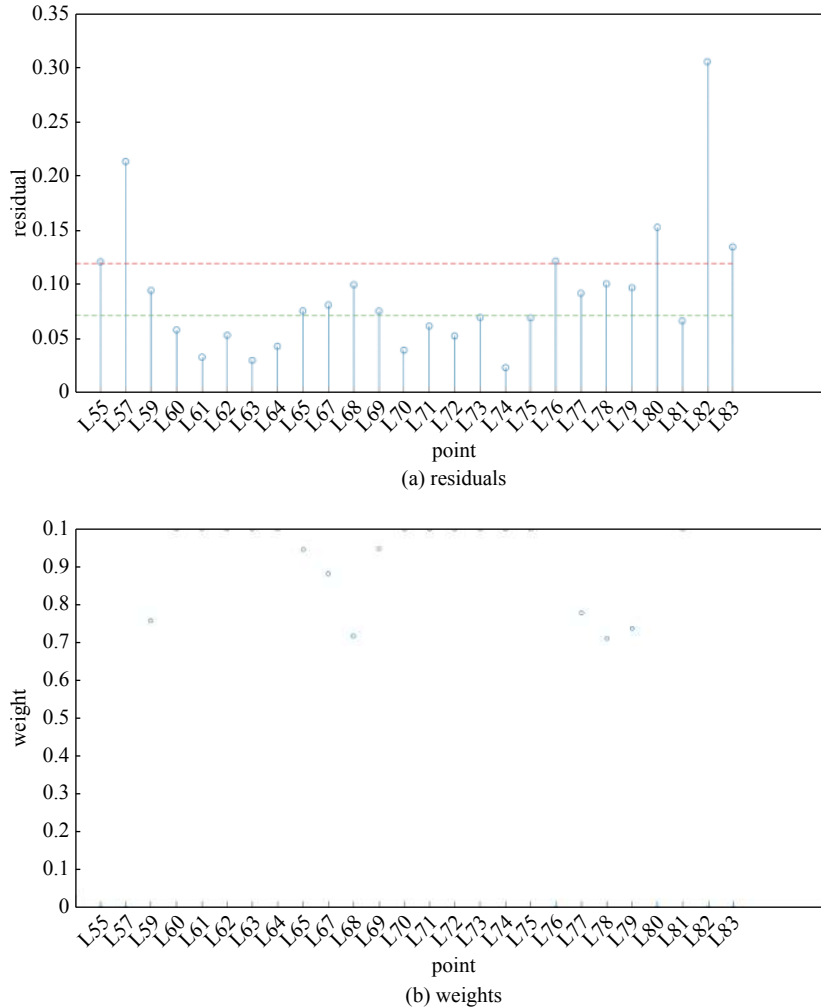


Fig. 4 Residuals and weights of each point after the second adjustment

图 4 二次平差后各点残差与权

表 3 两种方法求得的拟合参数

Table 3 Fitting parameters obtained by two methods

calculation	translation factor/mm			rotation factor/(°)			factor
	ΔX	ΔY	ΔZ	α	β	γ	k
SA	-18 397.56	58.4	25 070.31	89.974 03	74.637 72	179.967 5	0.999 926
this article	-18 397.55	58.40	25 070.31	89.974 3	74.637 71	179.967 8	0.999 926
difference	0.009 4	-0.001 5	0.000 3	0.000 27	-0.000 01	0.000 234	-0.000 000 4

参考文献:

[1] 王岩, 岳建平, 周保兴, 等. 工程控制网点位稳定性分析方法的研究[J]. 测绘通报, 2004(8): 12-14. (Wang Yan, Yue Jianping, Zhou Baoxing, et al. Research on the stability analysis method of engineering control network points[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2004(8): 12-14)

[2] 周江文, 欧吉坤. 名次法及拟稳点的选定[J]. 测绘学报, 1987(2): 10-16. (Zhou Jiangwen, Ou Jikun. Ranking method and selection of pseudo-stable points[J]. Journal of Surveying and Mapping, 1987(2): 10-16)

[3] 周江文, 欧吉坤. 拟稳点的更换——兼论自由网平差若干问题[J]. 测绘学报, 1984(3): 3-12. (Zhou Jiangwen, Ou Jikun. Replacement of pseudo-stable points—Also on some problems of free network adjustment[J]. Journal of Surveying and Mapping, 1984(3): 3-12)

[4] 张广伟, 李鹏, 宫辉. 城市地铁控制网稳定性分析及应用[J]. 测绘科学, 2008, 33(4): 98-99. (Zhang Guangwei, Li Peng, Gong Hui. Stability analysis and application of urban subway control network[J]. Science of Surveying and Mapping, 2008, 33(4): 98-99)

[5] 孙丕川, 黄声享, 李冠青. 港珠澳大桥岛隧工程GPS控制点稳定性研究[J]. 测绘通报, 2014(S2): 58-59. (Sun Pichuan, Huang Shengxiang, Li Guanqing. Research on GPS control point stability of Hong Kong-Zhuhai-Macao Bridge Island Tunnel Project[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2014(S2): 58-59)

[6] 崔家武, 张兴福, 周波阳, 等. 改进的GNSS/水准点优化选择的逐步剔除法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2019, 44(10): 1505-1510. (Cui Jiawu, Zhang

- Xingfu, Zhou Boyang, et al. Stepwise elimination method for improved GNSS/leveling point optimization selection[J]. Journal of Wuhan University (Information Science Edition), 2019, 44(10): 1505-1510
- [7] 吴迪军, 熊伟, 何婵军. 港珠澳大桥首级控制网四期测量成果比较与分析[J]. 测绘科学, 2013, 38(4): 83-85. (Wu Dijun, Xiong Wei, He Chanjun. Comparison and analysis of the fourth-phase control survey results of the first-level control network of the Hong Kong-Zhuhai-Macao Bridge[J]. Science of Surveying and Mapping, 2013, 38(4): 83-85)
- [8] 陈文军. 重离子治疗装置的准直关键技术研究与应用[D]. 兰州: 中国科学院大学(中国科学院近代物理研究所), 2020: 22-24. (Chen Wenjun. Research and application of the key technology of heavy ion therapy device alignment[D]. Lanzhou: University of Chinese Academy of Sciences (Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences), 2020: 22-24)
- [9] 郭迎钢, 李宗春, 李广云, 等. 粒子加速器工程控制网研究进展与展望[J]. 测绘通报, 2020(1): 136-141. (Guo Yinggang, Li Zongchun, Li Guangyun, et al. Research progress and prospects of particle accelerator engineering control network[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2020(1): 136-141)
- [10] Guo Yinggang, Li Zongchun. A sectional control method to decrease the accumulated survey error of tunnel installation control network[J]. American Journal of Modern Physics, 2021, 10(1): 7.
- [11] 李方, 邹进贵, 王铜, 等. 粒子直线加速器精密三维控制网研究[J]. 地理空间信息, 2018, 16(2): 87-89,110. (Li Fang, Zou Jingui, Wang Tong, et al. Research on precision three-dimensional control network of particle linear accelerator[J]. Geospatial Information, 2018, 16(2): 87-89,110)
- [12] 马娜, 董岚, 梁静, 等. 基于加速器控制网的GPS绝对测量精度探讨[J]. 北京测绘, 2014(6): 23-27,43. (Ma Na, Dong Lan, Liang Jing, et al. Discussion on GPS absolute measurement accuracy based on accelerator control network[J]. Beijing Surveying and Mapping, 2014(6): 23-27,43)
- [13] 郭迎钢, 李宗春, 刘忠贺, 等. 加速器隧道控制网变形可监测性及稳定性分析[J]. 原子能科学技术, 2019, 53(9): 1634-1642. (Guo Yinggang, Li Zongchun, Liu Zhonghe, et al. Deformation monitoring and stability analysis of accelerator tunnel control network[J]. Atomic Energy Science and Technology, 2019, 53(9): 1634-1642)
- [14] Chen Y Q, Chrzanowski A, Secord J M. A strategy for the analysis of the stability of reference points in deformation surveys[J]. CISM Journal ACSGC, 1990, 44(2): 141-149.
- [15] Nowel K, Kaminski W. Robust estimation of deformation from observation differences for free control networks[J]. Journal of Geodesy, 2014, 88(8): 749-764.
- [16] Wilkins R, Bastin G, Chrzanowski A. ALERT: A fully automated real time monitoring system[C]//Proceedings of the 11th FIG Symposium on Deformation Measurements. 2003.
- [17] Bocean V, Coppola G, Ford R, et al. Status report on the survey and alignment activities at Fermilab[C]//Proceedings of the 9th International Workshop on Accelerator Alignment. 2006.
- [18] Nowel K. Squared M split(q) S-transformation of control network deformations[J]. Journal of Geodesy, 2019, 93(7): 1025-1044.
- [19] Nowel K. Specification of deformation congruence models using combinatorial iterative DIA testing procedure[J]. Journal of Geodesy, 2020, 94(12): 1-23.
- [20] 武汉大学测绘学院测量平差学科组编著. 误差理论与测量平差基础[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2003: 173-176. (Edited by the Surveying Adjustment Discipline Group, School of Surveying and Mapping, Wuhan University. Error theory and the foundation of surveying adjustment[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2003: 173-176)
- [21] 曾文宪, 陶本藻. 三维坐标转换的非线性模型[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2003(5): 566-568. (Zeng Wenxian, Tao Benzao. Non-linear model of three-dimensional coordinate transformation[J]. Journal of Wuhan University (Information Science Edition), 2003(5): 566-568)
- [22] 陈义, 沈云中, 刘大杰. 适用于大旋转角的三维基准转换的一种简便模型[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2004, 29(12): 1101-1105. (Chen Yi, Shen Yunzhong, Liu Dajie. A simple model of three-dimensional datum conversion with large rotation angle[J]. Journal of Wuhan University (Information Science Edition), 2004, 29(12): 1101-1105)
- [23] 姚吉利, 韩保民, 杨元喜. 罗德里格矩阵在三维坐标转换严密解算中的应用[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2006, 31(12): 1094-1096,1119. (Yao Jili, Han Baomin, Yang Yuanxi. The application of Rodriguez matrix in the rigorous calculation of three-dimensional coordinate transformation[J]. Journal of Wuhan University (Information Science Edition), 2006, 31(12): 1094-1096,1119)
- [24] 陆珏, 陈义, 郑波. 总体最小二乘法在三维坐标转换中的应用[J]. 大地测量与地球动力学, 2008(5): 77-81. (Lu Jue, Chen Yi, Zheng Bo. The application of total least square method in three-dimensional coordinate transformation[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2008(5): 77-81)
- [25] 姚宜斌, 黄承猛, 李程春, 等. 一种适用于大角度的三维坐标转换参数求解算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2012, 37(3): 253-256. (Yao Yibin, Huang Chengmeng, Li Chengchun, et al. A three-dimensional coordinate conversion parameter solving algorithm suitable for large angles[J]. Journal of Wuhan University (Information Science Edition), 2012, 37(3): 253-256)
- [26] 陈义, 陆珏. 以三维坐标转换为例解算稳健总体最小二乘法[J]. 测绘学报, 2012, 41(5): 715-722. (Chen Yi, Lu Jue. Taking three-dimensional coordinate transformation as an example to solve the robust total least squares method[J]. Journal of Surveying and Mapping, 2012, 41(5): 715-722)
- [27] 方兴, 曾文宪, 刘经南, 等. 三维坐标转换的通用整体最小二乘算法[J]. 测绘学报, 2014, 43(11): 1139-1143. (Fang Xing, Zeng Wenxian, Liu Jingnan, et al. General least squares algorithm for three-dimensional coordinate transformation[J]. Journal of Surveying and Mapping, 2014, 43(11): 1139-1143)
- [28] 李仕东. 工程测量[M]. 北京: 人民交通出版社, 2005: 20-24. (Li Shidong. Engineering Surveying[M]. Beijing: People's Communications Press, 2005: 20-24)
- [29] Huber P J. Robust statistics[M]. New York: Wiley, 1981: 10-15.
- [30] 周江文. 经典误差理论与抗差估计[J]. 测绘学报, 1989(2): 115-120. (Zhou Jiangwen. Classical error theory and robust estimation[J]. Acta Geomatica Survey and Mapping, 1989(2): 115-120)