



·蒙特卡罗方法及其应用·综述·

输运问题蒙特卡罗模拟方法回顾及展望*

邓 力

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094)

摘 要: 蒙特卡罗(MC)方法具有复杂几何处理能力强,方法通用灵活,核数据完备,模拟忠实于物理过程等特点,成为中子学数值模拟的首选方法之一。在核能领域,MC方法得益于计算机的快速发展,在辐射屏蔽、反应堆堆芯临界安全分析、乏燃料后处理、放射性废物处置、核设施退役、核事故应急、放射性石油测井、核医学等领域均有广泛应用。对MC方法及软件输运计算做简要回顾,并对未来发展进行展望。

关键词: 核工程; 粒子输运; MC方法及软件; 展望

中图分类号: O571.51

文献标志码: A doi: 10.11884/HPLPB202234.210402

Retrospect and outlook of Monte Carlo simulated methods for transport problems

Deng Li

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China)

Abstract: Monte Carlo method is becoming the first choice of particle transport simulation methods because of its strong capability of complicated geometry treatment, perfected nuclear data and universal property. Monte Carlo softwares have been rapidly developing with the development of computers and at present, they are widely used in applications sa radiation shielding, criticality safety analysis, post-treatment of spent fuel, radioactivity waste treatment, decommissioning retire of nuclear facilities, emergence of nuclear accident, nuclear well-logging and nuclear medical science, etc. This paper provides a brief introduction of the development of Monte Carlo simulations in the past and at present and perspectives about its future.

Key words: nuclear engineering; particle transport; Monte Carlo method and software; outlook

蒙特卡罗(Monte Carlo, MC)方法又称为随机模拟法(Stochastic Simulation Method)或统计实验法(Statistical Test Method),它是二战后数字电子计算机的出现及原子能科学事业的发展而成长起来的一门新兴近似计算方法。经过 70 多年的发展,方法逐渐成熟。随着计算机的快速发展,其应用领域越来越宽广。目前 MC 方法已渗透到机器学习(Machine Learning)、人工智能(AI)、神经网络(Neural Network)等前沿领域。

就粒子输运问题的求解范畴而言,MC方法通过解 Boltzmann 方程,求出通量及各种响应量(如反应率、功率、多种探测器响应等)。求解问题包括:①固定源问题;②裂变源临界本征值问题;③伴随输运问题。在辐射屏蔽方面,今天的 MC 方法和 S_N 方法软件耦合已实现全厂房中子、 γ 剂量分布的精细建模和高分辨率模拟,为某些特定核装置屏蔽优化设计提供了定量的技术支持,并服务于新型核装置设计。在反应堆全堆芯计算方面,MC 方法先后经历了单棒计算、单组件输运计算、组件均匀化全堆芯扩散计算和全堆芯精细 pin-by-pin 输运计算。当前,MC 中子学计算已实现与热工水力、燃料的核-热-力多物理、多尺度、多过程稳态、瞬态耦合计算。在核探测方面,MC 方法已用于:①X-射线荧光分析;②在线中子俘获瞬发 γ 射线分析;③基于 γ 射线光谱的脉冲中子孔隙度测井;④隐藏爆炸物及毒品探测等。在核医学方面,MC 方法已用于硼中子俘获治疗(BNCT)临床肿瘤治疗的剂量线计算。其他领域还包括:统计物理、生物医学、量子力学、分子动力学、航空航天、金融统计、人工智能等,发挥了

* 收稿日期:2021-08-31; 修订日期:2021-10-30

基金项目:国家自然科学基金项目(11805017, 12001050)

联系方式:邓 力, deng_li@iapcm.ac.cn。

重要的作用。

近年来, MC 方法在数字核能、数值装置、数值反应堆等领域作用突出。借助超算平台, MC 模拟结果分辨率不断提高, 已涵盖反应堆稳态/瞬态/事故等多种工况, 初步具备仿真各种大型实验及事故预测的能力。当前 MC 方法面临的主要挑战是能够模拟的粒子数 ($\sim 10^{12}$) 与实际的源强 ($10^{15} \sim 10^{16}$) 尚有一定差距。因此, 还需要发展一些特殊的偏倚技巧来弥补存在的差距。针对深穿透辐射屏蔽问题, 还需要发展更先进的 MC-SN 耦合算法。核-热-力多物理耦合计算中, 需要解决不同求解器之间的数据传递、动态负载平衡、跨节点大内存问题的区域分解等难题。另外, 软件方法的敏感性和不确定性分析也是应用中最关心的问题之一。

1 Boltzmann 理论

如图 1 所示, 早期粒子输运理论是与分子运动论紧密相关的, 19 世纪中期 Clausius, Maxwell, Boltzmann 做了大量开创性的工作, 他们是公认的输运理论的奠基人。其重要标志是 1872 年, Boltzmann 导出反映微观粒子在介质中迁移守恒关系的粒子分布函数随时间和空间演变的微分-积分方程, 该方程被命名为 Boltzmann 方程。1910 年, 德国著名的数学家 Hilbert 论述了 Boltzmann 方程与第二类 Fredholm 积分方程的等价性, 证明了解的存在唯一性, 奠定了粒子输运理论的数学基础。1932 年, 英国实验物理学家 Chadwick 发现了中子, 由此开始了输运理论的系统性研究。

1.1 Boltzmann 方程

中子角通量密度 $\phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ 定义为: t 时刻, 在空间 \mathbf{r} 处单位体积内、能量为 E 的单位能量间隔内, 运动方向为 $\boldsymbol{\Omega}$ 的单位立体角内的中子在单位时间内所走过的总径迹长度。中子输运方程建立在中子数守恒或中子平衡条件下, 中子随时间的变化率等于产生率减去泄漏率和移出率, 即 $\partial N / \partial t = \text{产生率} - \text{泄漏率} - \text{移出率}$ 。中子输运方程有微分-积分形式和积分形式两种, 它们互为等价。

1.1.1 微分-积分形式

Boltzmann 方程的微分-积分形式为

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + \int_0^{E_{\max}} \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}) \phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) dE' d\boldsymbol{\Omega}' \quad (1)$$

式中: $\Sigma_t(\mathbf{r}, E)$ 为总截面; $\Sigma_s(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega})$ 为散射截面 (cm^{-1})

$$\Sigma_s(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}) = \Sigma_s(\mathbf{r}, E') f_s(E', \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2)$$

式中: $f_s(E', \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega})$ 为粒子碰撞后能量、方向转移 p.d.f, 又称为角分布。

$$S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = S_0(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + Q_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (3)$$

式中: $S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ 为总源项 ($\text{cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$); S_0 为外源项; Q_f 为裂变源项。

裂变源基本形式如下

$$Q_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\chi(\mathbf{r}, E)}{4\pi} \int_0^{E_{\max}} \int_{4\pi} \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') dE' d\boldsymbol{\Omega}' \quad (4)$$

式中: $\chi(\mathbf{r}, E)$ 为裂变谱; ν 为每次裂变释放出的中子数; $v = v(E)$ 为中子速度, 满足动能守恒。

式 (1) 是建立在中子守恒下的输运方程的微分-积分形式, 等号左端为中子消失率, 其中第一项为中子随时间的变化率; 第二项为中子的泄漏率, 即穿出系统的中子; 第三项为在系统内消失的中子, 即中子的吸收率。等号右端为中子产生率, 其中第一项为中子源; 第二项为散射中子产生率。式 (1) 涉及空间 \mathbf{r} 、能量 E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ 、时间 t 共 7 个变量。

1.1.2 积分形式

把式 (1) 右端的中子产生项定义为中子发射密度, 用 Q 表示有

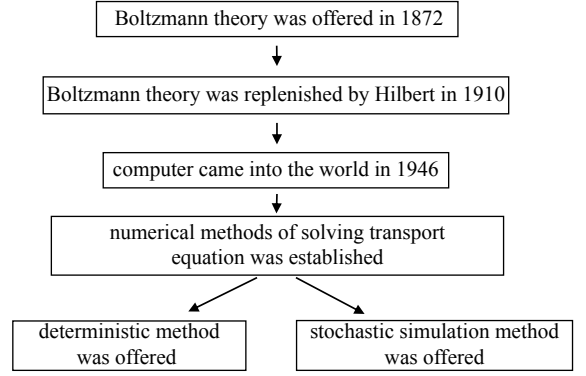


Fig. 1 Development history of transport theory

图 1 输运理论发展历程

$$Q(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + \int_0^{E_{\max}} \int_{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}) \phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) dE' d\boldsymbol{\Omega}' \quad (5)$$

即发射密度由独立源和散射源两项组成。

经过推导,可以得到式(1)等价的积分方程

$$\phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = \int_0^{\infty} e^{-\int_0^l \Sigma_t(\mathbf{r}-l\boldsymbol{\Omega}, E) dl} Q(\mathbf{r}-l\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}, t-l/v) dl \quad (6)$$

此为中子输运方程的特征线形式。写为全空间形式为

$$\phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = \iint e^{-\int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Sigma_t(\mathbf{r}-l\boldsymbol{\Omega}, E) dl} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \delta\left(\boldsymbol{\Omega}' \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - 1\right) \delta\left(t' - \left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)\right) Q(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}', t') d\mathbf{r}' dt' \quad (7)$$

这里 $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - l\boldsymbol{\Omega}$, $t' = t - l/v$ 即为特征线方程。

1.2 Boltzmann 方程求解方法

基于中子守恒建立起来的 Boltzmann 方程没有解析解,由此诞生了确定论和随机模拟两类求解方法(如图 1 所示),经过半个多世纪的发展,确定论求解又诞生了多种简化近似方法(如图 2 右端绿色部分),而随机模拟法相对比较固定,仅在能量处理上,衍生了多群和连续两种模式(如图 2 左端黄色部分)。MC 方法求解积分形式的中子(光子)输运方程,共产生了 5 种通量估计方法,分别是:①吸收估计;②碰撞估计;③期望估计;④径迹长度估计(对应式(6));⑤点估计(对应式(7))^[1]。

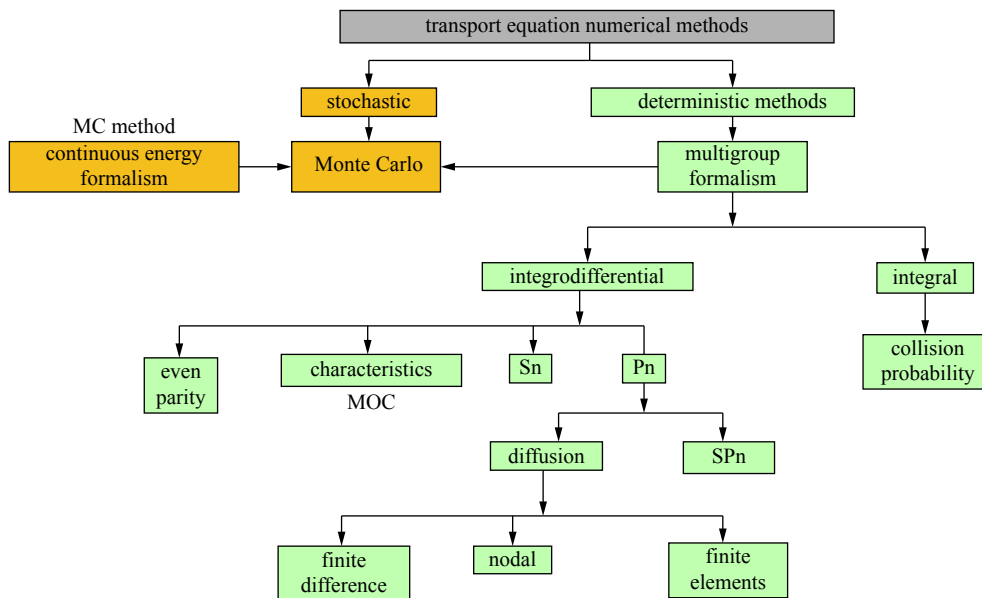


Fig. 2 Simulation methods of transport equation

图 2 Boltzmann 输运方程数值求解方法

2 输运方程的 MC 求解

20 世纪 40 年代,在美国的曼哈顿工程中,MC 方法用于模拟中子链式反应和核装置临界性。由于核武器的主要材料依赖反应堆制造。因此,MC 方法首要用于辐射屏蔽、各种研究堆及生产堆计算。根据文献记载,MC 方法在反应堆计算中大致经历了四个阶段:①60 年代的反应堆系统临界 k_{eff} 本征值计算;②70 年代精细组件功率计算;③80 年代精细二维全堆芯计算;④90 年代三维全堆芯计算。由于 MC 方法消耗的计算资源相对其他方法要大得多。早期受计算机速度、内存及费用的限制,方法主要用于确定论方法的补充和参验证,计算某些确定论方法无法计算的复杂几何、强射线效应问题。

20 世纪 50 年代末至 60 年代末是 MC 方法蓬勃发展的鼎盛时期。1958 年,Goertzel 与 Kalos^[2] 从理论上肯定了用统计估计模拟跟踪粒子历史,为方法的应用奠定了理论基础。这一时期,由于引入了伪散射^[3-5] 和伴随估计量跟踪模拟计算,由此产生各种偏倚抽样技巧^[6-7]。进入 1970 年代,计算几何在机械工程中的成功应用,MC 几何处理借鉴机械工程中采用的法则,用组合几何布尔运算,实现了复杂几何描述和粒子径迹计算,针对 Boltzmann 方程求解,发展了多种通量估计方法。针对自然界中存在的某些重复几何体,如反应堆堆芯组件,发展了重复结构几何描

述,从而大大降低了大型复杂装置建模的复杂度。在广泛实践基础上,各具特色的专著大量出现^[8-10],其中,最具代表的专著为 Carter 和 Cashwell 撰写的《Particle-transport Simulation with the Monte Carlo Method》^[11],书中系统介绍了 MC 方法应用于 Boltzmann 输运方程求解的理论基础及算法,介绍多种通量计算方法和若干降低方差技巧,成为 MC 方法学习最有价值的参考书之一。这些专著从不同角度对过去工作进行了总结,预示着方法的渐趋成熟。随着统计误差理论的提出^[12-15],MC 方法的理论研究工作有了新的突破,以方差为标准,合理选取提高估计量精度和效率的算法不断推出。

进入 21 世纪后,随着高性能并行计算机的推出和计算机运行成本的大幅下降,MC 方法模拟各种大型复杂装置辐射屏蔽及反应堆全堆芯精细 pin-by-pin 模型成为可能,除研究中子行为外,光子及各种带电粒子的模拟也成为可能。

2.1 MC 方法奠基人

回顾 MC 方法的发展历史,四位国际公认的方法奠基人分别是 Ulam, Metropolis, von Neumann 和 Kolmogorov (如图 3 所示)。他们对 MC 方法做出过开创性贡献,提出的理论和方法在 20 世纪产生了巨大而深远的影响,成为后来 MC 方法发展的理论基础。其中 Ulam(1909~1984)被认为是 MC 方法的首要创始人,他首次提出用统计抽样求解系列数学问题^[16-17]。Metropolis(1915~1999)是最早把 MC 方法应用到统计物理领域的学者,他提出的算法至今影响深远,被誉为 20 世纪科学和工程计算领域十大算法之一。另一位美籍匈牙利数学家、计算机科学家、物理学家 von Neumann(1903~1957),他在计算数学方面影响巨大,MC 方法方面取得的成就仅是他一生研究取得的成就的一部分,他在爆轰流体力学和核子输运方法方面的成就同样影响深远。Kolmogorov(1903~1987)是苏联 20 世纪最杰出的数学家,他的研究遍及数学的所有领域,MC 方法是他开创性研究工作的一部分,他把轮盘赌方法上升到理论,成为 MC 方法的理论精髓。



Fig. 3 Four founders of Monte Carlo method

图 3 MC 方法的四位奠基人

2.2 随机抽样

随机抽样技巧(Random Sampling Technique)是 MC 方法求解数学期望类积分中引入的一些加速收敛措施,除了增大统计样本数之外,随机抽样技巧是降低统计误差的最行之有效的手段。由于微分和微分可以互相转换。因此,MC 方法可求解的问题种类很多,只要能够表示成为数学期望形式的积分,均可用 MC 方法进行求解。MC 方法的基本特点是利用各种概率密度函数或分布函数,通过随机抽样,计算得到估计量的近似值,用统计平均值作为估计量的解。MC 方法的理论基础是概率论和数理统计,其中大数定律和中心极限定理是 MC 方法的理论基础。与其他确定论方法相比,MC 方法获得的解存在一定的随机性和统计不确定性,近似解的精度是在一定概率置信度下保证的。由于随机性,MC 方法获得的解不唯一。

2.3 MC 粒子输运程序现状

针对 Boltzmann 方程的求解,诞生了两类求解方法:1)确定论方法;2)MC 方法。确定论方法计算成本较小,但是需要对空间、能量、方向、时间进行离散,需要较大的内存,受计算机存储影响,不同时期诞生了不同的近似计算方法(见图 2)。MC 方法对空间、能量、方向、时间采用精确描述,方法比较固定,存在主要不足是计算成本较高。随着计算机速度和存储的提高,MC 方法的优势越发突出。

基于 MC 方法,国际上开发了众多 MC 粒子输运程序,代表有 MCNP, KENO, MC21, Mercury, FLUKA, GEANT4,

MONK, TRIPLI, PRIZMA, MVP, Serpent, OpenMC, McCARD, RMC, SuperMC, JMCT 等。下面仅对其中有代表性的几个 MC 程序予以简介。

2.3.1 MCNP 程序^[18]

MCNP 程序由美国洛斯阿拉莫斯国家实验室(LANL)研制,是目前国际上发展历史最长、知名度最高和用户最多的通用型多粒子输运 MC 程序。MCNP 程序配备的精细截面数据和详细的物理数学处理,是公认的计算精度最高的程序之一。国际上后续发展的 MC 程序和确定论程序均选择 MCNP 程序作为自身程序精度的验证工具。MCNP 程序始于 1963 年,1973 年通过模拟中子反应的 MCN 程序^[19]和模拟高能光子的 MCG 程序^[20]的合并,诞生了中子-光子耦合输运 MC 程序 MCNG,1977 年 MCNG 与模拟低能光子的 MCP 程序^[20]合并,取名 MCNP 程序^[21]。MCNP 程序最新版本为 MCNP6,可求解包括中子、光子、电子、质子等 37 种粒子的输运问题,具有在线多普勒温度展宽等多种功能。早期程序版本平均每 2~3 年更新一次,随着程序规模的不断扩大,更新速度有所放慢。2012 年推出 MCNP6 Beta 1 版本,之后又陆续推出了 Beta 2, Beta 3, 6.1, 6.2, 6.3 系列子版本。

2.3.2 GEANT4 程序^[22]

由欧洲核子研究组织(CERN)等多家研究机构联合开发,程序预留了很多工具箱接口,用户可根据需求,选择工具箱进行组装。工具箱包括中子、光子、电子、 μ 子等粒子,可用于探测器响应计算。GEANT4 程序的优势在于带电粒子输运的模拟。

2.3.3 Serpent 程序^[23]

由芬兰国家技术研究中心研发的三维中子-光子输运 MC 程序,主要针对裂变压水堆中子学计算,具有燃耗、考虑温度效应等功能,实现了与热工水力的耦合,可以进行反应堆全堆计算,Serpent 程序发展了多种提升计算效率的算法,经济适用性较好。

2.3.4 OpenMC 程序^[24]

OpenMC 程序由美国麻省理工学院(MIT)开发的中子-光子输运 MC 程序,程序开发始于 2011 年,采用 ACE 格式连续点截面和实体组合几何,可计算复杂几何的临界问题和固定源屏蔽问题。可进行中子、光子及中子-光子耦合计算,其他功能还包括燃耗计算、在线多普勒温度展宽、MPI 和 OpenMP 并行计算等,可运行在 Linux, Mac OS 和 Windows 系统下,程序采用哈希表存储和搜索,计算速度优于 MCNP 程序。目前程序对外开源,借助全球用户,也帮助程序发现了多个 BUG。

2.3.5 JMCT 程序^[25-26]

JMCT(J Monte Carlo Transport)软件是由中物院高性能计算软件中心粒子输运团队研制的一个大型多功能、通用型高分辨率多粒子输运 MC 软件,经过多年的发展和完善,成熟度较高。目前已服务于核能开发的众多领域,屏蔽实现了行业覆盖。2013 年推出中子-光子输运 JMCT1.0 版本^[25],2017 年推出中子-光子-电子输运 JMCT2.0 版本^[26]。近年 JMCT 针对复杂屏蔽深穿透问题,发展了多种算法和技巧,大幅提高了模拟计算精度和效率^[27-29]。此外,还耦合了热工水力和燃料,能够进行反应堆全堆芯多种工况稳态、瞬态模拟。JMCT 通过了能源局专项课题“CAP1400 数值反应堆关键技术研究”验收,实现了对 VERA 的验证、AP1000 的确认和 CAP1400 启动物理试验的预测,展现了其高分辨率、高精度和强大的模拟能力。

3 总 结

MC 方法起源于第二次世界大战期间美国对核武器的研制过程,伴随着计算机的出现,作为一门新兴学科,自诞生之日起,就与同期世界上最先进的科学技术相融合,应用概率论与数理统计知识,借助计算机工具,帮助人们进一步认识世界和改造世界,解决物理问题。70 年来,作为计算数学中发展迅速的领域之一,MC 方法在物理学的各个分支学科中均发挥了积极重要的作用,成为理论物理与实验物理之间的桥梁。方法可对实验过程进行解释分析,对改进探测仪灵敏度设计具有重要指导意义。随着计算机技术的快速发展,MC 方法已经渗透到物理学的各个领域,包括凝聚态物理、核物理、粒子物理、天体物理、大气物理、地球物理等众多学科。

MC 方法在辐射屏蔽和反应堆堆芯临界安全分析中的应用十分成功,在求解某些深穿透问题时,利用 MC 和 S_N 方法各自的优点,通过耦合计算,显著地提升了深穿透辐射屏蔽的计算精度和效率^[27-29]。在核医学方面,MC 剂量计算成为肿瘤治疗的一部分,例如,硼中子俘获治疗(BNCT),治疗计划多采用 MC 方法,精确的剂量计算,为患者临床治疗提供确定的照射部位和照射时间,其治疗效果明显优于外科手术^[30-31]。总之,如今 MC 方法已成为核科

学工程领域不可或缺的模拟工具。除核能领域,MC方法在金融工程、分子动力学、统计物理、流体力学、信息论、运筹学、生物医学、高分子化学、分子流、计算物理学等领域也应用广泛。

4 展 望

随着计算机的快速发展和核数据的进一步完善,当MC方法及软件模拟的粒子数与实际问题的源强相同时,如果建模足够精确,则MC直接模拟的结果就是实(试)验,到那时很多今天依赖实(试)验的工程驱动的研究模式就会发生根本性的改变,研发成本会大大降低,研究周期也会大大缩短。当然,要在超级计算机上模拟 $10^{15} \sim 10^{16}$ 数目的粒子,对MC软件的并行度要求很高。目前国外一大批早期研制的MC粒子输运程序遇到的瓶颈之一就是可扩展限制,很难突破横跨在应用和计算机超算之间的编程墙。美国ASIC计划极大地促进了软件和计算机发展,这中间起关键作用的是并行支撑框架,也称为中间件。它有两方面的作用,一是将共性技术集成到框架内,可以减少重复性工作;二是屏蔽了复杂的多级并行编程。目前美国INL研制的MOOSE平台^[32]已支撑了核科学与工程领域的众多软件的快速研制或并行升级。国内由中物院高性能数值模拟软件中心研制的支撑结构网格的JASMIN^[33]、支撑非结构网格的JAUMIN^[34]和支撑实体组合几何的JCOGIN^[35]框架,以及由中科院科学与工程计算重点实验室研制的支撑有限元计算的PHG框架^[36]均扮演了应用与超算之间的桥梁作用。基于这些框架开发的软件,运行在国产超级并行计算机上,发挥了重要作用。

参考文献:

- [1] 邓力,李刚. 粒子输运问题的蒙特卡罗模拟方法与应用(上册)[M]. 北京: 科学出版社, 2019. (Deng Li, Li Gang. Monte Carlo simulated methods and applications for particle transport problems[M]. Beijing: Science Press, 2019)
- [2] Goertzel G, Kalos M H. Monte Carlo methods in transport problems, in progress in nuclear energy[M]. New York: Pergamon Press, 1958.
- [3] Coleman W A. Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the technique to radiation transport problems[J]. *Nuclear Science and Engineering*, 1968, 32(1): 76-81.
- [4] Cramer S N. Next flight estimation for the fictitious scattering Monte Carlo method[J]. *Transactions of the American Nuclear Society*, 1974, 18: 400-401.
- [5] Cramer S N. Application of the fictitious scattering radiation transport model for deep-penetration Monte Carlo calculations[J]. *Nuclear Science and Engineering*, 1978, 65(2): 237-253.
- [6] Coveyou R R, Cain V R, Yost K J. Adjoint and importance in Monte Carlo application[J]. *Nuclear Science and Engineering*, 1967, 27(2): 219-234.
- [7] Nakamura S. Computational methods in engineering and science[M]. New York: Wiley, 1977.
- [8] Shreider Y A. The Monte Carlo method: the method of statistical trials[M]. Oxford: Pergamon Press, 1966.
- [9] 裴鹿成, 张孝泽. 蒙特卡罗方法及其在粒子输运问题中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1980. (Pei Lucheng, Zhang Xiaoze. Monte Carlo methods and its applications in particle transport problems[M]. Beijing: Science Press, 1980)
- [10] Everett C J, Cashwell E D. Second Monte Carlo sampler[R]. LA-5723-MS, 1974.
- [11] Carter L L, Cashwell E D. Particle-transport simulation with the Monte Carlo method[R]. TID-26607, 1975.
- [12] Amster H J, Djomehri M J. Prediction of statistical error in Monte Carlo transport calculations[J]. *Nuclear Science and Engineering*, 1976, 60(2): 131-142.
- [13] Lux I. Systematic study of some standard variance reduction techniques[J]. *Nuclear Science and Engineering*, 1978, 67(3): 317-325.
- [14] Lux I. Variance versus efficiency in transport Monte Carlo[J]. *Nuclear Science and Engineering*, 1980, 73(1): 66-75.
- [15] 许淑艳. 关于蒙特卡罗方法的效率预测[J]. 计算物理, 1984, 1(2): 245-252. (Xu Shuyan. Efficiency prediction to the Monte Carlo method[J]. *Chinese Journal of Computation Physics*, 1984, 1(2): 245-252)
- [16] Cooper N C. From cardinals to chaos-reflections on the life and legacy of Stanislaw Ulam[M]. New York: Cambridge University Press, 1989.
- [17] Metropolis M, Ulam S. The Monte Carlo method[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1949, 44(247): 335-341.
- [18] Goorley J T, James M R, Booth T E, et al. Initial MCNP6 release overview-MCNP6 beta 3[R]. LA-UR-12-26631, 2012.
- [19] Cashwell E D, Neergaard J R, Taylor W M, et al. MCN: a neutron Monte Carlo code[R]. LA-4751, 1972.
- [20] Cashwell E D, Neergaard J R, Everett C J, et al. Monte Carlo photon codes: MCG and MCP[R]. LA-5157-MS, 1973.
- [21] Briesmeister J F. MCNP-A general purpose Monte Carlo code for neutron and photon transport[R]. LA-7396-M, 1981.
- [22] Agostinelli S, Allison J, Amako K, et al. GEANT4—a simulation toolkit[J]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators Spectrometers Detectors and Associated Equipment*, 2003, 506(3): 250-303.
- [23] Leppänen J, Pusa M, Viitanen T, et al. The serpent Monte Carlo code: status, development and applications in 2013[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 2015, 82: 142-150.
- [24] Shim H J, Han B S, Jung J S, et al. McCARD: Monte Carlo code for advanced reactor design and analysis[J]. *Nuclear Engineering and Technology*, 2012, 44(2): 161-176.
- [25] Deng Li, Ye Tao, Li Gang, et al. 3-D Monte Carlo neutron-photon transport code JMCT and its algorithms[J]//PHYSOR 2014-The Role of Reactor Physics Toward a Sustainable Future. 2014.

- [26] Deng Li, Li Gang, Zhang Baoyin, et al. JMCT V2.0 Monte Carlo code with integrated nuclear system feedback for simulation of BEAVRS model[J]. PHYSOR 2018: reactors physics paving the way towards more efficient systems, Cancun, Mexico, April 23-26, 2018.
- [27] Zheng Zheng, Mei Qiliang, Deng Li. Study on variance reduction technique based on adjoint discrete ordinate method[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 2018, 112: 374-382.
- [28] 竹生东, 邓力, 李树, 等. 堆外核仪表系统(RPN)的预设效验系数理论计算[J]. *核动力工程*, 2004, 25(2): 152-155. (Zhu Shengdong, Deng Li, Li Shu, et al. Calculation of calibration coefficient of out-core RPN system[J]. *Nuclear Power Engineering*, 2004, 25(2): 152-155)
- [29] 郑征, 丁谦学, 周岩. 三维离散纵标和蒙特卡洛混合方法研究[J]. *核动力工程*, 2018, 39(1): 1-5. (Zheng Zheng, Ding Qianxue, Zhou Yan. Research on three dimensional discrete ordinate and monte carlo hybrid method[J]. *Nuclear Power Engineering*, 2018, 39(1): 1-5)
- [30] Deng L, Li G, Ye T, et al. MCDB Monte Carlo dosimetry code and its applications[J]. *J Nucl. Sci. Tech*, 2007, 44(12): 185-187.
- [31] 李刚, 邓力. BNCT优化网格设计及相关算法研究[J]. *高能物理与核物理*, 2006, 30(2): 171-177. (Li Gang, Deng Li. Optimized voxel model construction and simulation research in BNCT[J]. *High Energy Physics and Nuclear Physics*, 2006, 30(2): 171-177)
- [32] Gaston D, Newman C, Hansen G, et al. MOOSE: a parallel computational framework for coupled systems of nonlinear equations[J]. *Nuclear Engineering and Design*, 2009, 239(10): 1768-1778.
- [33] Mo Zeyao, Zhang Aiqing, Cao Xiaolin, et al. JASMIN: a parallel software infrastructure for scientific computing[J]. *Frontiers of Computer Science in China*, 2010, 4(4): 480-488.
- [34] Liu Qingkai, Zhao Weibo, Cheng Jie, et al. A programming framework for large scale numerical simulations on unstructured mesh[C]//2016 IEEE 2nd International Conference on Big Data Security on Cloud (BigDataSecurity), IEEE International Conference on High Performance and Smart Computing (HPSC), and IEEE International Conference on Intelligent Data and Security (IDS). 2016: 301-315.
- [35] Zhang Baoyin, Li Gang, Deng Li, et al. JCOGIN: a parallel programming infrastructure for monte Carlo particle transport[J]. PHYSOR 2014, Kyoto, Japan, (September 28-October 3, 2014).
- [36] 张林波. 三维并行自适应有限元软件平台PHG 0.8. 6版参考手册、使用指南[M]. 中国科学院科学与工程计算重点实验室, 2012. (Zhang Linbo. Reference manual and useful guide of 3D parallel self-adaptive finite element soft platform PHG 0.8. 6. Important Laboratory of Science and Engineering in Chinese Science Academy, 2012)