



核科学与工程

基于有限元方法的离子俘获装置模拟计算*

张耀锋, 尹远, 曹蕾, 张春雷

(北京师范大学核科学与技术学院, 北京 100875)

摘要: 利用有限元程序 ANSYS, 开展潘宁离子俘获装置的电场模拟计算。基于电场数据, 结合 Runge-Kutta_Fehlberg 方法进行潘宁装置在多种模式下的离子俘获过程模拟工作, 得到了准确的离子俘获结果。并对实际条件下具有偏离理想情况电极分布的俘获装置进行了优化计算及电场分析, 同样实现了离子俘获过程的准确模拟。有限元方法用于离子俘获装置的电场计算以及后续离子俘获过程模拟流程的建立, 为类似的电势阱离子俘获装置建造运行提供有效的技术支持。

关键词: 有限元方法; 电场计算; 潘宁离子俘获装置; 四极场激发; 离子追踪

中图分类号: TL811; TL815

文献标志码: A

doi: 10.11884/HPLPB202133.210134

Simulations of ion trap devices based on finite element analysis method

Zhang Yaofeng, Yin Yuan, Cao Lei, Zhang Chunlei

(College of Nuclear Science and Technology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: Using the constructed electric field trap, Penning ion trap devices can constrain ions and are already applied in some research fields such as nuclear physics in which the mass of ions can be measured exactly and quantum computing in which the Penning traps can be a tool to store quantum bits. ANSYS, a finite element analysis (FEA) program, was employed to do the electric field calculations for Penning traps. And then, with the electric field from FEA program, we used the method of Runge_Kutta_Fehlberg to do simulations for the ion trapping process, and finally got the accurate results of ion tracking. Additionally, we carried out tracking simulations for practical traps which have ring electrodes with shapes different from the ideal Penning traps, and achieved similar simulation results. The way of the electric field calculation by FEA method, and the workflow for ion tracking will help a lot to build and run Penning traps and similar devices.

Key words: finite element analysis; electric field calculation; Penning ion trap device; quadrupole electric field excitation; ion tracking

潘宁(Penning)装置利用静电场在轴向的聚焦作用与磁场在径向平面约束作用实现对特定带电粒子的俘获^[1]。自从 20 世纪末潘宁离子俘获装置被提出以来^[2], 经过近几十年的发展, 已经成为核物理实验领域重要的测量装置, 主要用于带电粒子质量的超高精度测量。通过对正负电子、质子、反质子等常见基本粒子的质量参数测量以及核反应产物质量测量, 潘宁俘获装置可以实现朗德 g 因子精确测量、精细结构常数测量、中微子质量间接测量等, 从而应用于量子电动力学(QED)理论验证、标准模型检验、质能方程验证等基础物理研究领域。不同研究领域对于质量测量的精度要求不同, 如常见的物理化学领域研究需要质量测量精度在 10^{-5} 左右, 而中微子研究需要粒子的质量相对偏差则在 10^{-11} 左右^[3]。超高精度的测量对于潘宁装置的实验条件提出了极其苛刻的要求, 如超导磁铁由于温度漂移引起的磁场偏差、电极器件的加工安装误差引起的电场偏差等都会影响实验结果的准确程度。具体到电场方面, 除了电极的加工安装误差外, 离子注入引出系统、测量系统器件的植入、充气系统放置、电场激发系统引入等都会使得实际的电场分布在一定程度上偏离理想潘宁装置的电场分布^[4], 最终造成俘获离子回旋频率漂移, 从而导致系统无法俘获离子或测量值与实际值有较大偏差。因此, 对于实际的潘宁装置进行电场模拟计算, 有助于得到准确的电场分布; 基于该电场分布进行离子俘获过程的模拟, 可以得到准确的后旋频率, 便于确定装置需

* 收稿日期: 2021-04-07; 修订日期: 2021-06-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(11605009)

作者简介: 张耀锋(1982—), 男, 博士, 从事核技术及应用方向研究。

要施加的运行参数,对于提高实验效率、获得准确的测量结果具有重要意义。目前,部分离子俘获装置研究都是依据理想的四极电场分布进行模拟计算,电场分布计算结果会存在一定偏差^[1]。ISOLTRAP 装置采用极限松弛法,并结合最小二乘法对于校正电极的结构进行了优化计算。该方法没有通用的程序可用,无法进行有效的推广应用^[4]。SIMION 程序也被用于离子俘获装置的电场计算,并可编写代码实现离子运动追踪模拟^[5]。该程序利用有限差分法实现静电场的计算,计算过程完全封闭,使得人们无法有效控制相关的网格划分、数据插值处理等流程,且对于复杂结构的边界事例,程序计算耗时较长^[6]。

有限元计算方法经过数十年的发展,已经日趋成熟,广泛应用于结构力学、静电场、静磁场、高频电磁场、热学、流体力学等各个研究领域^[7-9]。ANSYS 是通用的有限元计算程序之一,该程序可以实现结构模型构建、网格划分、边界条件施加等过程的完全自主可控,特别是对于复杂边界条件,可以通过网格优化实现高效率模拟计算^[10]。本文利用有限元程序 ANSYS 开展潘宁离子俘获装置的电场优化设计,并依据计算得到的电场结果进行离子俘获过程的模拟,获得了合理的模拟结果。基于该方法进行潘宁离子俘获装置的优化设计,突破常见的潘宁装置空间狭小的限制,以便留出更多空间进行俘获离子的性能测量。特别对于非引出的俘获离子实验,可以开展多方面的粒子性能探测研究,从而扩展潘宁装置的实际应用领域,推动潘宁离子俘获装置的进一步发展。

1 理想潘宁装置电场分布及离子约束实现

1.1 理想潘宁装置电场分布

理想的潘宁装置主要利用四极电场分布实现带电粒子在轴向的聚焦。电场系统如图 1 所示,由上下两个双曲面端部电极和中心平面上的环形电极组成,电极沿中心轴呈旋转对称结构。两个端部电极之间电势相同,它们和环形电极之间施加电势差 U_0 。环形电极截面也为双曲线结构。则在电极之间的中心区域形成四极电场,电场分布满足

$$\begin{cases} \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} = k_1 \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} = k_2 \end{cases} \quad (1)$$

式中: E_ρ , E_z 分别为径向和轴向的电场; k_1 , k_2 为常数。求解麦克斯韦方程,最终得到气隙区域内电势

$$V = \frac{U_0}{\rho_0^2 + 2z_0^2} (\rho^2 - 2z^2 + 2z_0^2) \quad (2)$$

则可以得到环形电极及端部电极截面方程分别为

$$\rho^2 - 2z^2 = \rho_0^2 \quad (3)$$

$$\rho^2 - 2z^2 = -2z_0^2 \quad (4)$$

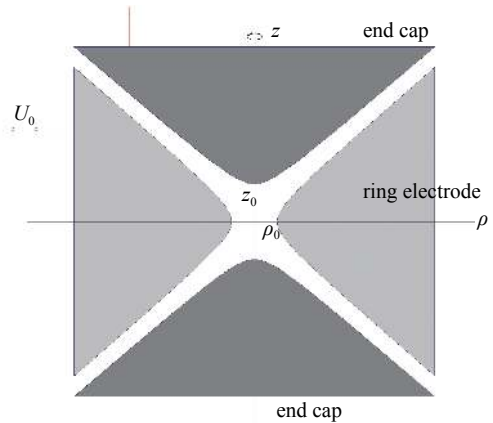


Fig. 1 Structure of an ideal Penning trap

图 1 理想潘宁装置结构示意图

式中: ρ_0 , z_0 分别对应环形电极与端部电极和相应坐标轴的交点位置。方程(2)对应端部电极电势为 0、环形电极施加电势 U_0 ($U_0 > 0$) 时的电势分布。此时,径向电场(ρ 方向)电场指向 $\rho = 0$ 中心位置,则径向方向对于负离子具有散焦作用,对于正离子具有聚焦约束作用;而轴向(z 方向)电场由 $z=0$ 指向端部电极边缘方向,所以对于负离子具有聚焦作用,对于正离子具有散焦作用。在此种情况下,潘宁装置一般选取负离子作为俘获离子,同时需要在 z 方向上施加沿轴向平行的磁场 B , 以便在轴向聚焦的同时实现径向上离子的约束。如 U_0 为负电势,则能够实现对于正离子的约束俘获。

1.2 潘宁装置电场有限元计算及分布偏差

前述电场分布是在电极形状为无限大双曲面的情况下得到的。对于实际的俘获装置,电极形状的有限存在会造成电场分布与方程(1)存在偏离。在实际实验装置中,则可能需要额外增加电场补偿措施。为了评估实际装置电场的偏离情况,采用有限元程序 ANSYS 构建了理想潘宁装置的 3 维几何模型,并进行静电场的计算。模型如图 2 所示,这里给出了 3/4 结构视图;计算中取 ρ_0 , z_0 , U_0 分别为 6.38 mm, 10.5 mm, 100 V。

图 3 给出 1/4 对称结构 z - ρ 截面等电势分布结果。为了和式(2)中的理论计算结果比较,将图 3 涉及区域均匀划分成 100×100 网格,对每个格点的电场 E_ρ , E_z , V 进行插值输出后,与公式(2)中数据进行比较。结果表明,区域

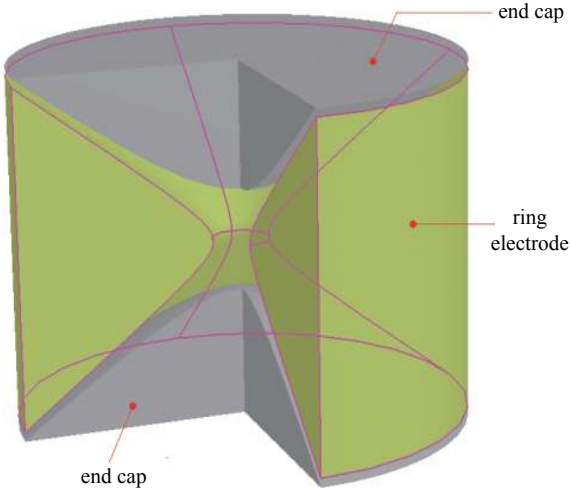


Fig. 2 Geometry model of a Penning trap in ANSYS

图2 用于ANSYS有限元计算的潘宁装置结构模型

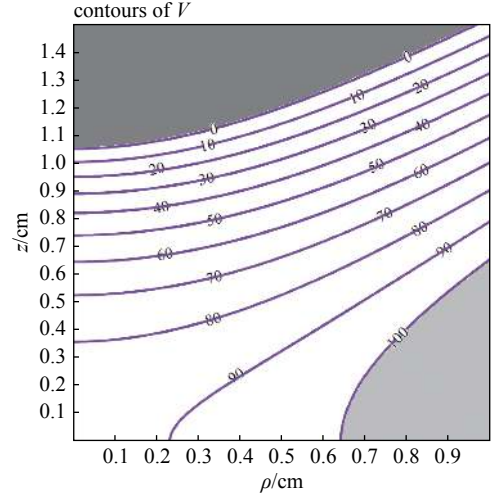


Fig. 3 Contour of equal potential for the electric field in the gap of the Penning trap (1/4 of the whole plane)

图3 潘宁装置间隙区域电场等势分布结果图(1/4结构)

内电势计算结果与理论值符合很好,平均相对偏差为0.3%。较大的电势相对偏差出现在端部电极附近。由于端部电极理论电势为0,因而使得平均相对偏差出现了形式上的大的偏差值,而实际的绝对偏差并不显著,这种差异对实际的离子运动几乎没有任何影响;区域内电场计算结果 E_ρ , E_z 与理论结果平均相对偏差约为1.3%,相较于电势分布,平均偏差有所增大。偏差较大值出现在环形电极附近和对称平面附近。其中对称平面附近区域同样由于 E_ρ 或者 E_z 电场理论结果为0,导致出现与前述类似的形式上的大偏差值,这部分偏差同样对实际离子运动没有影响。环形电极附近也出现了较大的相对偏差,所涉及范围为环形电极内表面至向内扩展 $0.03\rho_0$ 的区域。鉴于这部分区域内电势插值计算结果比较准确,所以电场强度的计算结果偏差主要与插值计算方法有关。这里采用Quadratic Shepard插值法对有限元计算得到的电势数据进行插值计算^[11],然后在此基础上得到电势的一阶导数,即为电场计算结果。求导过程导致偏差增大,最终致使该区域电场相对偏差增大。如果改变插值流程,直接选取有限元计算结果中的电场 E_ρ , E_z 数据进行插值处理,虽然增加了插值计算的次数,但可以获得更为准确的计算结果,使相对偏差可以降低到0.3%以内。

综上所述,电场计算结果与理论结果相对偏差较大范围主要出现在电极表面附近区域,通过改进插值方法流程,可以获得相对偏差小于0.3%的电场计算结果;鉴于该区域为边缘区域,带电粒子在边缘区域内极易受到电极影响而丢失,所以实际俘获的离子活动范围并不涉及此区域,因此这部分区域内计算结果的相对偏差对于实际的离子俘获过程的影响有限。所以,有限元方法能够获得较为准确的潘宁装置电场计算结果,可用于离子俘获过程模拟计算。

1.3 离子在理想潘宁装置中的运动模拟

依据方程(1)中的电场分布,可知理想潘宁俘获装置中带电粒子的运动方程可写为

$$\begin{cases} m\ddot{z} = -\frac{qU_0}{d^2}z \\ m\dot{\rho} = q(\mathbf{E}_\rho + \dot{\rho} \times \mathbf{B}) \end{cases} \quad (5)$$

式中: q , m 分别为运动离子的电荷和质量; $d = \sqrt{\frac{1}{2}(z_0^2 + \frac{\rho_0^2}{2})}$ 为装置的约化参数。对方程(5)进行求解,可以得到离子的运动由3部分组成,分别为纵向(z 方向)的简谐震荡运动(频率为 ω_z)、径向平面内的约化圆周运动(频率为 ω_+)和径向平面内的磁控运动(频率为 ω_-)。相应的运动频率可表述为

$$\begin{cases} \omega_z = \sqrt{\frac{qU_0}{md^2}} \\ \omega_+ = \frac{\omega_c}{2} + \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2}} \\ \omega_- = \frac{\omega_c}{2} - \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2}} \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\omega_c = \frac{q}{m}B$ 为离子的回旋频率。

基于前述 ANSYS 程序计算得到的电场数据, 首先进行 Quadratic Shepard 3D 插值处理, 可以得到 3 维空间任意位置的电场数据。之后, 利用电场数据, 结合 Runge_Kutta_Fehlberg 方法, 开展理想潘宁俘获装置中带电粒子运动过程的模拟计算。模拟离子的质荷数目比取 100, 模拟结果如图 4 所示。图 4(a) 为离子的运动轨迹在 $z=0$ 平面内的投影结果。为了便于显示, 图中只给出离子运动初期的轨迹。离子初始位置为 $x=0.1$ cm, $y=0$ cm 处, 在平面内做顺时针旋进运动; 图 4(b) 为离子在 z 方向上的震荡运动结果, 离子初始位置为 $z=0.2$ cm。依据图 4 的模拟结果, 可以得到相应的运动特征频率为 $\omega_z=0.1944$ MHz, $\omega_+=0.7352$ MHz, $\omega_-=0.0237$ MHz, 并由此得到离子的回旋频率为 $\omega_c=0.7589$ MHz, 与方程 (6) 的理论分析结果 0.7597 MHz 基本一致。

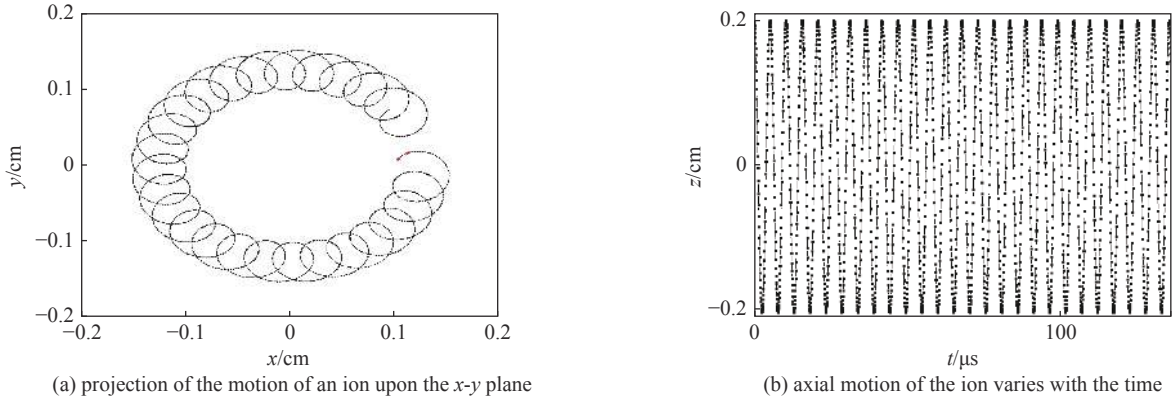


Fig. 4 Tracking results for an ion moving in an ideal Penning trap (start from $x=0.1$ cm, $y=0$ and $z=0.2$ cm)

图 4 理想潘宁装置离子中运动轨迹图(初始位置 $x=0.1$ cm, $y=0$, $z=0.2$ cm)

2 潘宁装置离子俘获过程模拟计算

2.1 缓冲气体冷却

理想潘宁装置只能将离子约束在较大的范围内, 特别是在纵向方向, 由于纵向振荡存在, 并没有实现空间范围的聚束, 所以理想潘宁装置无法用于实际的离子俘获应用。为了实现离子的俘获控制, 对离子进行冷却, 以减小离子动量, 是实现离子俘获的有效手段。潘宁装置中离子的冷却措施有激光冷却法^[12]、缓冲气体冷却法^[13]、谐振电路冷却法^[14-15]等, 每种方法都有特定的适用范围。其中缓冲气体法几乎对所有离子都可应用, 其原理是在潘宁装置中充入稀薄气体, 利用离子在运动过程中与气体分子的碰撞作用, 实现离子的减速冷却。该方法需要实现俘获装置与相邻装置的真空隔绝, 并保证离子能够穿透隔离介质, 实现装置中离子的注入与引出。研究表明, 缓冲气体在气压较小的情况下(小于 10 Pa), 离子与气体的平均作用相当于施加了与其速度相反的作用力, 力的大小与速度的大小成正比, 比例系数与气体的迁移率有关, 近似表示如下

$$F = -\frac{q}{K}v, K = K_0 \frac{T}{T_N} \frac{p_0}{p} \quad (7)$$

式中: K_0 为标准状态下 ($P_0 = 1.013 \times 10^5$ Pa, $T_N=273.16$ K) 气体的迁移率; p , T 为缓冲气体的压强和温度, v 为离子的速度。

基于前面所述的理想潘宁装置, 研究 He 气为充入气体时离子俘获情况。离子的质荷数目比同样取 100, He 气体压强 $p=5$ Pa, 温度 $T=300$ K。利用有限元程序所产生的电场数据, 将式 (7) 对应的电场附加进去, 进行离子运动轨迹模拟。结果如图 5 所示, 纵向方向离子由于受到阻力, 振荡运动很快衰减至中心 $z=0$ 附近位置。在电场、磁场的综合作用下, 离子的约化圆周运动得到快速抑制, 最终离子以磁控运动的方式做半径逐渐增加的外扩运动, 直至离子丢失。

2.2 四极场激发过程

图 5 表明, 潘宁装置中, 单独的缓冲气体冷却方式不能实现离子在中心平面上的有效聚束, 反而导致离子扩散丢失。为了实现在纵向方向和中心平面两个方向上同时的聚束效果, 四极场激发效应被提出^[16], 并应用于实际的潘宁装置中。四极场激发原理如图 6 所示, 环形电极被平均分为 4 个部分, 每两个相对的电极为一组等势体, 两组电极之间施加交流电压 $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, 则可以在径向平面内产生四极线性电场, 分布为

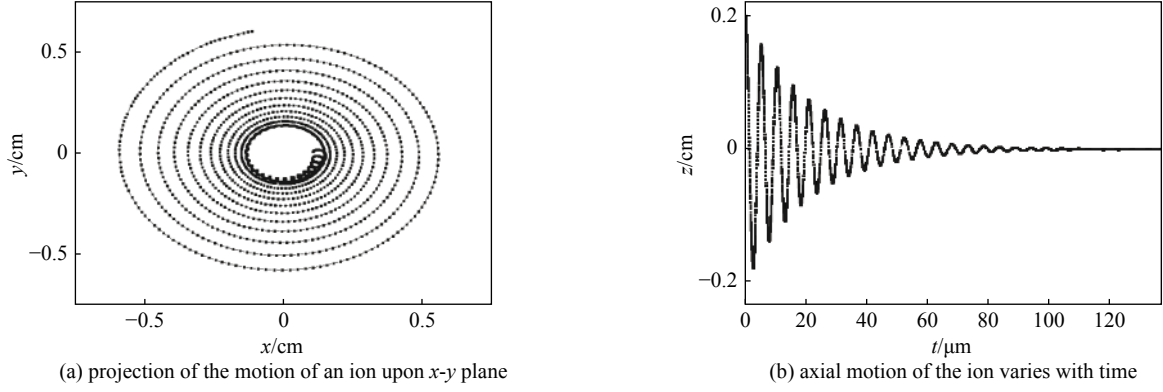

 Fig. 5 The tracking results for an ion moving in the Penning trap, with Helium gas filled in (start from $x=0.1$ cm, $y=0$ and $z=0.2$ cm)

 图 5 充气 He 气体后, 潘宁装置中离子运动轨迹图(初始位置 $x=0.1$ cm, $y=0$ cm, $z=0.2$ cm)

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = k \quad (8)$$

进而, 可以求得径向平面内的电场为

$$\begin{cases} E_x = \frac{2U_0}{a^2} \sin(\omega t + \varphi) \cdot y \\ E_y = \frac{2U_0}{a^2} \sin(\omega t + \varphi) \cdot x \end{cases} \quad (9)$$

式中: a 为与潘宁装置有关的结构参数。

为了验证四极场激发过程对于离子俘获的效果, 基于理想潘宁装置电场有限元计算结果, 在考虑到缓冲气体冷却和四极场激发工作作用情况下, 对离子在俘获装置中的运动进行模拟。离子及缓冲气体基本参数与前面保持一致, 四极场激发电势 $U_0 = 10$ V, 频率 $\omega = \omega_c$ 为离子的回旋频率。模拟计算结果如图 7 所示, 离子在纵向方向很快就振荡衰减至 $z=0$ 的中心平面; 而径向平面上离子在采用四极电场激励措施后, 约化圆周运动和磁控运动均得到了有效抑制、衰减, 最终离子能够俘获至中心 $\rho \approx 0, z \approx 0$ 处。

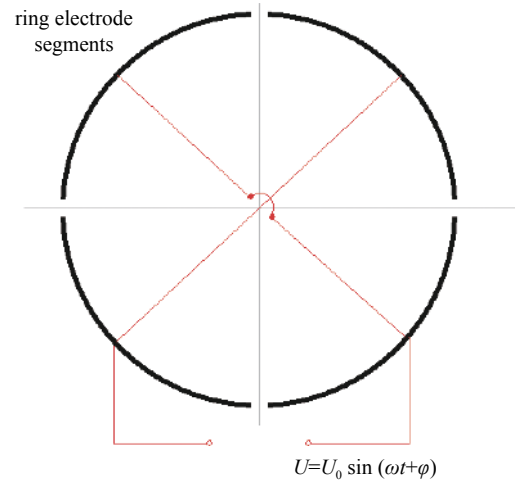


Fig. 6 The way to apply the quadrupole excitation potential on the ring electrodes

图 6 环形电极四极场激励电势施加方法

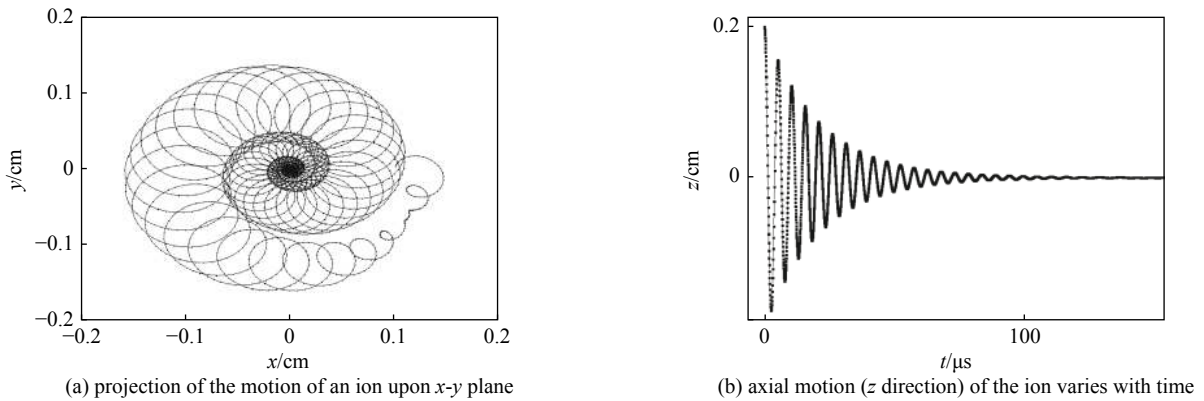

 Fig. 7 Tracking results for an ion moving in the Penning trap, with helium gas filled in and quadrupole electric potential applied (start from $x=0.1$ cm, $y=0$ and $z=0.2$ cm), here $\omega = \omega_c$

 图 7 潘宁装置中充入 He 气体加四极场激发时离子运动轨迹图($\omega = \omega_c$)(初始位置 $x=0.1$ cm, $y=0$, $z=0.2$ cm)

2.3 激发电场讨论

依据方程(8), 对潘宁装置中激发四极电场进行求解, 可以得到满足方程(8)的四极场配置的电极形状在径向平面内为 $xy = C$, C 为常数。该形状与图 6 中实际的潘宁装置环形电极形状明显不同。这种电极形状的差异将导致四极电场分布偏离方程(8)中的分布, 使得模拟结果不准确。为此, 采用有限元程序对图 6 中实际电极配置进行

四极电场分布的模拟计算,计算中对潘宁装置中环形电极部分单独进行3维模型构建,并按照四个象限进行分割为4个部分,依据激发电场的电势分布要求施加不同电势。为了便于分析,电极各部分电势按照恒定值 $U = \pm 10\text{ V}$ 计算。 $z=0$ 平面内等电势分布结果如图8所示,可知,径向平面内等势线分布按照半径从大到小的次序依次从圆弧形向 $xy=C$ 的双曲线逐渐过渡。因此,在小范围的核心区域($\rho < 0.2\text{ cm}$),电场分布与方程(8)较为相似。同样,对整个空气气隙范围的电势分布进行离散化,然后将电势分布依照 $xy=C$ 进行拟合,以判断电势分布与方程(8)的符合程度。 $z=0$ 处径向平面不同半径范围内数据拟合结果如图9所示,在 $\rho < 0.2\text{ cm}$ 的范围内,电势分布基本满足方程(8),两者拟合误差为0.13%。根据拟合结果,可得到方程9中参数 a 近似取 $a \approx \rho_0 \times 0.88$ 。

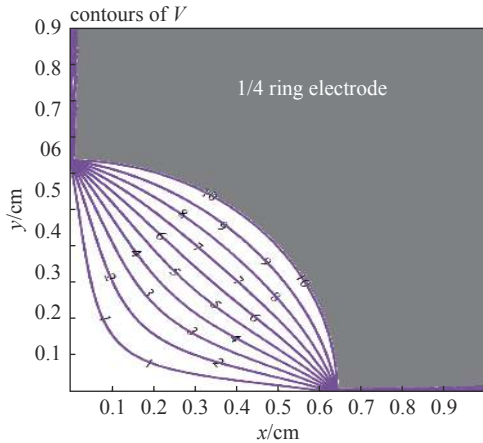


Fig. 8 Equal potential distribution when the excitation potential of $\pm 10\text{ V}$ applied on the ring electrodes
图8 环形电极施加激发 $\pm 10\text{ V}$ 电势时所产生的电场的等电势分布图

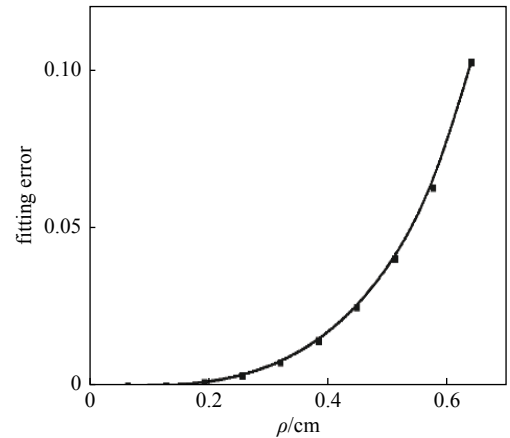


Fig. 9 Relative error between the real distribution of the potential of the gap and the ideal quadrupole distribution, varying with different radii
图9 气隙区域不同半径范围内真实电势分布与理想四极场的偏离情况

3 潘宁离子俘获装置的优化设计

与理想的潘宁离子俘获装置不同,实际运行的离子俘获装置需要预留更多的空间,以满足相应的实验条件。比如离子注入、引出时需要在上下两个端部电极的径向中心开辟通道,使得离子能够进入和离开装置;某些应用场景下,需要置入测量部件对俘获离子进行状态测量监控,如附加像电流测试电极、对离子激发释放荧光进行测量等^[14,17-18]。这些实验需求将要求对环形电极进行分割或使得俘获装置的电极局部形状发生改变,从而引起电场的畸变。为了检验电极形状的改变带来的电场畸变对于最终离子俘获效果的影响,对潘宁装置环形电极进行优化设计,结构如图10所示,环形电极被分成4个部分,便于高频激发电场的施加。各个电极之间留出较大空隙,空隙部件夹角约为 30° ,以保证离子测量监控所需。对该种形状的俘获装置进行了电场计算,并依照前述的流程进行离子俘获过程模拟,结果如图11所示。俘获过程中,环形电极施加激发电场频率 $\omega = \omega_c$,离子初始位置位于 $x=0.1\text{ cm}$ 、

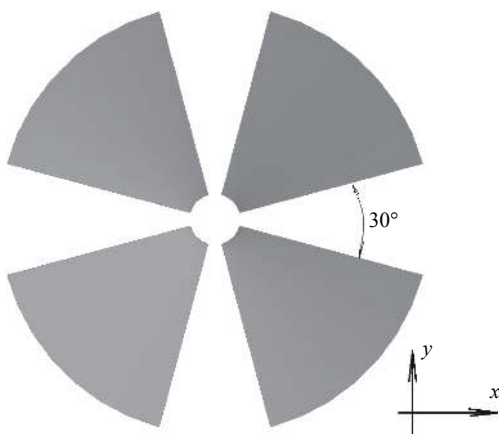


Fig. 10 Diagram of the ring electrodes for an optimized Penning trap
图10 优化的离子俘获装置环形电极结构平面图

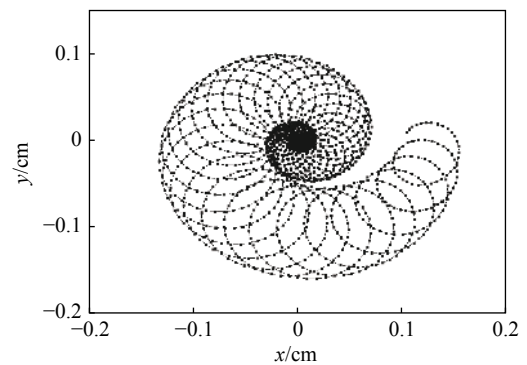


Fig. 11 Projection of the motion of an ion upon x - y plane, the starting point is $x=0.1\text{ cm}$ and $y=0\text{ cm}$

图11 x - y 平面内离子运动轨迹投影图,起点位于 $x=0.1\text{ cm}$, $y=0\text{ cm}$ 处

$y=0$ cm 处。离子在电场、磁场共同作用下, 经历约化圆周运动和磁控运动等一系列运动过程, 最终离子被俘获于装置中心位置。

4 结 论

本文利用有限元程序 ANSYS 开展潘宁离子俘获装置处于真空状态、充气模式、充气加四极场激发三种情况下的电场计算, 并基于电场数据进行离子俘获过程的模拟计算。计算结果表明, 对于理想潘宁装置, 有限元程序能够获得与理论基本一致的电场分布数据。有限元电场数据可用于后续离子追踪模拟工作, 能够准确呈现离子俘获过程, 为实际潘宁离子俘获装置的优化设计及运行提供支持。有限元方法及后续的离子追踪模拟流程, 完全适用于类似的电势阱相关装置的模拟优化, 并可应用于离子类型量子比特研究等其他研究领域。

参考文献:

- [1] Hoogerheide S F, Naing A S, Dreiling J M, et al. Experiments with highly-ionized atoms in unitary Penning traps[J]. *Atoms*, 2015, 3: 367-391.
- [2] Paul W, Osberghaus O, Fischer E. Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen[M]. Berlin: Springer, 1958.
- [3] Blaum K, Novikov Y N, Werth G. Penning traps as a versatile tool for precise experiments in fundamental physics[J]. *Contemporary Physics*, 2010, 51(2): 149-175.
- [4] Bollen G, Becker S, Kluge H J, et al. ISOLTRAP: A tandem Penning trap system for accurate on-line mass determination of short-lived isotopes[J]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics A*, 1996, 368(3): 675-697.
- [5] Miao Wang. Halo ion trap mass spectrometry: Design, instrumentation, and performance[D]. Provo: Brigham Young University, 2010.
- [6] Dahl D A. SIMION 3D 8.1[EB/OL]. <http://www.simion.com>.
- [7] Miklos G, Vladimir Z. Particle trajectory tracing in ANSYS[J]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, 1999, 427(1/2): 408-411.
- [8] Zhao Bo, Zhu Tieming, Wang Fengfeng, et al. 3D thermal-fluid coupled analysis for 81.25 MHz RFQ accelerator[J]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, 2019, 493(1): 172-180.
- [9] Hong S G, Kim J H, Kim M J, et al. Design and test of a graphite target system for in-flight fragment separator[J]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, 2014, 752: 1-5.
- [10] Madenci E, Guven I. The finite element method and application in engineering using ANSYS[M]. Berlin: Springer, 2015.
- [11] 张耀锋, 尹远, 张春雷, 等. Quadratic Shepard插值法在TPC探测器电场计算中的应用[J]. *原子能科学与技术*, 2019, 53(12): 2454-2459. (Zhang Yaofeng, Yin Yuan, Zhang Chunlei, et al. Application of quadratic shepard interpolation method to electric field calculation of TPC detector[J]. *Atomic Energy Science and Technology*, 2019, 53(12): 2454-2459)
- [12] Itano W M, Wineland D J. Laser cooling of ions stored in harmonic and Penning traps[J]. *Physical Review A*, 1982, 25(1): 35-54.
- [13] Lunney M. D, Moore R B Cooling of mass-separated beams using a radiofrequency quadrupole ion guide[J]. *International Journal of Mass Spectrometry*, 1999, 190/191: 153-160.
- [14] Brown L S, Gabrielse G. Geonium theory: Physics of a single electron or ion in a Penning trap[J]. *Reviews of Modern Physics*, 1986, 58(1): 233-311.
- [15] Dehmelt H G. Radiofrequency spectroscopy of stored ions II: Spectroscopy[J]. *Adv. At. Mol. Phys*, 1969, 5: 109-154.
- [16] Konig M, Bollen G, Kluge H J, et al. Quadrupole excitation of stored ion motion at the true cyclotron frequency[J]. *International Journal of Mass Spectrometry and Ion Processes*, 1995, 142: 95-116.
- [17] Bruzewicz C D, Chiaverini J, McConnell B, et al. Trapped-ion quantum computing: Progress and challenges[J]. *Appl Phys Rev*, 2019, 6: 021314.
- [18] Bohnet J G, Sawyer B C, Britton J W, et al. Quantum spin dynamics and entanglement generation with hundreds of trapped ions[J]. *Science*, 2016, 352(6291): 1297-1301.