



·激光大气传输技术·

相位差波前探测与图像重建*

张杏云¹, 罗芳琳^{1,2}, 李楠^{1,2}, 杨程亮^{1,2}, 彭增辉^{1,2}, 穆全全^{1,2}

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所 应用光学国家重点实验室, 长春 130033; 2. 中国科学院大学 材料与光电研究中心, 北京 10049)

摘 要: 相位差技术可以直接利用两幅或多幅图像的强度信息, 重构出波前相位信息和目标清晰图像, 具有光路简单、成本较低、适用于扩展目标等优点, 在望远镜的系统像差检测和目标图像重建方面得到了大量应用。相位差波前探测的关键在于求解非线性代价函数的最优化问题, 需要避免陷入局部极值并降低计算时间, 才能满足动态变化波前实时探测的需求。同时在重建目标清晰图像时, 通常需要做正则化和去噪处理, 来提高重建图像的质量。本文主要介绍相位差技术的基本原理, 以及近年来的研究进展, 并对该技术未来的发展进行了展望。

关键词: 相位差; 波前探测; 图像重建; 望远镜

中图分类号: 0439

文献标志码: A doi: 10.11884/HPLPB202133.210203

Phase diversity wavefront sensing and image reconstruction

Zhang Xingyun¹, Luo Fanglin^{1,2}, Li Nan^{1,2}, Yang Chengliang^{1,2}, Peng Zenghui^{1,2}, Mu Quanquan^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Applied Optics, Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;

2. Center of Materials Science and Optoelectronics Engineering, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 10049, China)

Abstract: Phase diversity technology can directly use the intensity information of two or more images to reconstruct the wavefront information and high-resolution image of the target. It has the advantages of simple optical setup, low cost and suitable for extended targets. It has been widely used in system aberration detection and target image reconstruction of telescopes. The key point of phase diversity wavefront sensing is to solve the optimization problem of nonlinear cost function. It needs to avoid falling into local extremum and reduce the calculation time to meet the demand of real-time sensing of dynamic wavefronts. Meanwhile, regularization and denoising are usually needed to improve the quality of reconstructed image. This paper mainly introduces the basic principle of phase diversity technology, as well as the research progresses in recent years, and prospects for future development of this technology.

Key words: phase diversity; wavefront sensing; image reconstruction; telescopes

地基大口径望远镜是天文观测和人造目标监测的重要手段, 但一直受到地球周围 10~20 km 的大气层的湍流影响。大气湍流会使得目标光束的波前相位在大气传输的过程中发生明显的改变, 从而形成了光束抖动、光束扩展、光强闪烁和像点抖动等一系列湍流现象^[1], 使得地基望远镜的成像分辨率大大降低。直到实时探测与校正光学波前畸变的自适应光学(AO)技术的出现, 这一情况才得以改观。波前相位的精确探测是自适应光学技术的重要基石, 目前常用的波前传感器有剪切干涉仪、波前曲率传感器和夏克-哈特曼波前探测器等。但在某些条件下, 如大扩展目标或暗目标观测时, 利用波前传感器直接测量波前相位是很困难甚至是不可能的。这时需要直接根据成像得到的图像强度信息, 恢复波前的相位信息^[2]。

波前相位通过影响系统的点扩散函数, 来影响系统成像的图像强度分布。但由于波前相位和点扩散函数是多对一的关系, 即不同的相位可能对应于相同的点扩散函数, 因此从一幅单独的焦面图像强度信息去恢复相位无法得到唯一解。1979年 Gonsalves 提出在目标焦面图像之外, 在成像系统中引入已知像差(如离焦)然后采集图像, 利用两幅(或多幅)图像消除了相位恢复的不确定性, 这就是相位差法(PD)波前探测的基本思想^[3]。该方法的优势在

* 收稿日期: 2021-05-28; 修订日期: 2021-08-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(61805238; 11774342); 中国科学院创新交叉团队项目

作者简介: 张杏云(1988—), 男, 博士, 副研究员, 从事自适应光学及新型光器件研究。

通信作者: 穆全全(1980—), 男, 博士, 研究员, 从事自适应光学及液晶光学研究。

于结构简单,同时适用于点目标和扩展目标、相干光和非相干光等不同应用场合,且能够探测连续变化以及非连续变化的相位分布。2014年法国航空航天实验室 ONERA 的 Fusco 等人证实 PD 技术与经典的哈特曼波前传感器具有相当的精度^[4]。PD 技术探测得到波前相位信息后,就可以计算出系统的点扩散函数,进而通过解卷积重建目标清晰图像。

本文将首先介绍 PD 技术的基本原理,以及近年来本研究组及其他学者在 PD 波前探测以及图像重建方法等方面的研究进展,然后介绍 PD 技术在望远镜系统中的应用实例,最后是总结与未来发展的展望。

1 PD 技术的理论模型

为了消除相位恢复的不确定性,PD 技术需要采集两幅或更多的图像,其中一幅图像一般是由于未知的待测像差而导致退化的焦面图像。而其他幅图像必须是由同一观测目标所形成的,在待测像差的基础上叠加了某种已知相差的图像,即在退化的焦面图像上叠加了某种已知相差的相位差图像。

对于一个线性移不变光学成像系统,采集到的图像强度是系统点扩展函数与观测目标分布函数的卷积。PD 技术里的焦面图像和相位差图像就满足这个卷积关系。假设 $o(x, y)$ 是观测目标的分布函数; $i(x, y)$ 是焦面图像的强度分布,对应点扩散函数为 $PSF(x, y)$; $i_d(x, y)$ 是引入已知像差后的相位差图像强度分布,对应点扩散函数为 $PSF_d(x, y)$ 。

对于焦面图像,在空域满足

$$i(x, y) = o(x, y) * PSF(x, y) \quad (1)$$

相应地在频域满足

$$I(u, v) = O(u, v) \cdot OTF(u, v) \quad (2)$$

其中 $I(u, v)$ 、 $O(u, v)$ 和 $OTF(u, v)$ 分别为 $i(x, y)$ 、 $o(x, y)$ 和 $PSF(x, y)$ 的傅里叶变换。而 $OTF(u, v)$ 又等于光瞳函数 $P(x, y)$ 的自相关

$$OTF(u, v) = P(x, y) \otimes P(x, y) \quad (3)$$

而光瞳函数可以表示为

$$P(x, y) = A(x, y) \exp[i\Phi(x, y)] \quad (4)$$

其中: $A(x, y)$ 为望远镜成像系统的孔径函数。 $\Phi(x, y)$ 就是待测的目标相位,可以表示为如下所示的 Zernike 多项式展开形式。其中 $Z_i(x, y)$ 为第 i 项 Zernike 多项式, a_i 为第 i 项 Zernike 多项式系数。

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^K a_i Z_i(x, y) \quad (5)$$

同样地,对于相位差图像有

$$i_d(x, y) = o(x, y) * PSF_d(x, y) \quad (6)$$

$$I_d(u, v) = O(u, v) \cdot OTF_d(u, v) \quad (7)$$

$$OTF_d(u, v) = P_d(x, y) \otimes P_d(x, y) \quad (8)$$

$$P_d(x, y) = A(x, y) \exp\{i[\Phi(x, y) + \Phi_d(x, y)]\} \quad (9)$$

其中: $\Phi_d(x, y)$ 就是引入的已知像差,也叫相位差函数。在实际应用的 PD 技术中,相位差函数通常选择离焦。这是因为在采集相位差图像时离焦图像最容易获得,而且引入的相位差 $\Phi_d(x, y)$ 可以根据离焦距离 d 准确计算得到,如图 1 所示。

但 1982 年 Gonsalves 也指出,PD 技术中相位差函数不仅可以是离焦,也可以是其他形式的像差如像散、慧差等,甚至是这些像差的组合^[5]。2017 年本组的张佩光提出可以利用对称的正负离焦构建相位差函数,对称的正负离焦图像强度和信噪比相近,有效避免了焦面-离焦面图像组合的强度

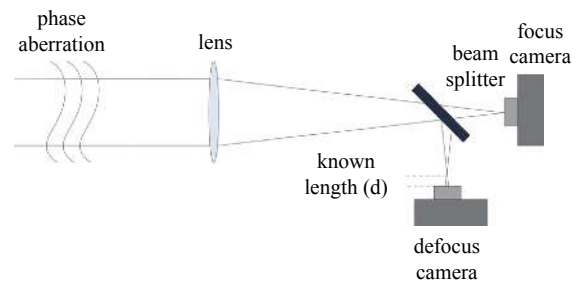


Fig. 1 Schematic diagram of PD technology with defocus as the phase diversity function

图 1 离焦作为相位差函数的 PD 技术示意图

差异和信噪比差异^[6]。理论分析证明该方法具有更小的克拉美罗下限,表明该方法具有更强的波前探测能力,仿真和实验也证实该方法能够探测的相位幅值更大、空间频率更高。

PD技术的目标在于:在观测目标分布 $o(x, y)$ 未知的情况下,如何由 $i(x, y)$ 、 $i_d(x, y)$ 以及 $\Phi_d(x, y)$ 去计算 $\Phi(x, y)$ 。定义代价函数

$$E(O, a) = \sum_{u,v} \left\{ [I(u, v) - O(u, v)\text{OTF}(u, v)]^2 + [I_d(u, v) - O(u, v)\text{OTF}_d(u, v)]^2 \right\} \quad (10)$$

$E(O, a)$ 为观测目标频域函数 O 和待测相位 Φ 的Zernike模式系数 a 的泛函。当代价函数 $E(O, a)$ 取极小值时, $E(O, a)$ 关于 O 的偏微分应为0,即

$$\frac{\partial E(O, a)}{\partial O} = 0 \quad (11)$$

将公式(10)代入公式(11),有

$$O(u, v) = \frac{I(u, v)\text{OTF}^*(u) + I_d(u, v)\text{OTF}_d^*(u)}{|\text{OTF}(u, v)|^2 + |\text{OTF}_d(u, v)|^2} \quad (12)$$

再将公式(12)代入代价函数的表达式(10)中,可以得到

$$E(a) = \sum_{u,v} \frac{|I(u, v)\text{OTF}_d(u, v) - I_d(u, v)\text{OTF}(u, v)|^2}{|\text{OTF}(u, v)|^2 + |\text{OTF}_d(u, v)|^2} \quad (13)$$

OTF与 OTF_d 是待测相位Zernike模式系数 a 的函数,因此最终的代价函数 $E(a)$ 也是未知量 a 的函数。PD技术的关键就在于求解使代价函数 $E(a)$ 取最小值的 a 。重构波前的Zernike模式越多,求解问题的维度就越高,难度也越大。

2 波前探测

由前述的理论模型可知,可以通过求解非线性代价函数的最优化问题,来获得待测相位的模式系数。早期PD技术的求解主要采用基于代价函数梯度的迭代算法,但由于容易陷入局部极值而逐渐被基于代价函数值的智能迭代算法所取代。近年来兴起的深度学习人工神经网络有望解决迭代算法耗时长的的问题,实现动态变化波前的实时PD探测。

2.1 基于代价函数梯度的迭代算法

经典的基于代价函数梯度的迭代算法包括最速下降法^[7]、共轭梯度法^[8]、牛顿法^[9]和拟牛顿法^[10]等。这类算法基于代价函数的梯度信息来构造迭代搜索方向,通过使迭代点的梯度不断趋于0来逼近最优解的位置。这类算法的一般计算步骤如下:

Step 1: 确定迭代初始值 a_0 和迭代终止条件 $\varepsilon > 0$;

Step 2: 根据不同算法的迭代方法,确定第 k 次迭代的搜索方向 d_k ;

Step 3: 确定迭代步长 λ_k ,使得 $E(a_k + \lambda_k d_k) < E(a_k)$;

Step 4: 如果 $\|E(a_k + \lambda_k d_k) - E(a_k)\| \leq \varepsilon$,则迭代终止;否则进行第 $(k+1)$ 次迭代,令 $a_{k+1} = a_k + \lambda_k d_k$, $k = k+1$,转Step 2。

不同的基于代价函数梯度的迭代算法区别仅限于Step 2,如何确定第 k 次迭代的搜索方向 d_k 。其中最速下降法最简单,采用的是代价函数的梯度方向: $d_k = -\nabla E(a_k)$ 。

此类算法收敛速度快,但全局性较差,容易陷入局部极值而无法获得全局最优解。如图2(a)所示,如果代价函数只有一个极值时,无论迭代初始值如何选择,沿着梯度方向迭代最终都可以达到最优值;如图2(b)所示,如果代价函数有多个局部极值,只有当迭代初始值选择在B、C之间时,沿梯度方向迭代才能达到最优值,迭代初始值选择在其他区间时,沿梯度方向迭代都将陷入局部极值。PD的求解过程是一个多维代价函数 $E(a)$ 的最优化问题,出现多个局部极值的概率极高,而且一般没有最优解的先验知识,迭代初始值一般是随机选取的,很难做到正好落在最优解的局部区域(B、C之间),因此陷入局部极值的概率很大。

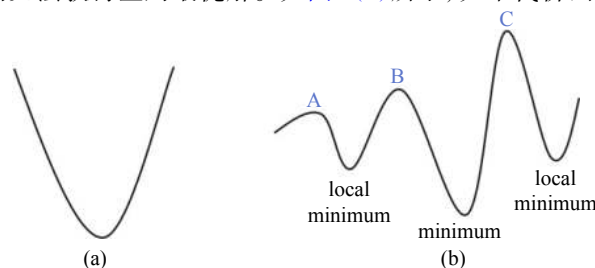


Fig. 2 Schematic diagram of cost function with single extremum (a) and multiple extremum (b)

图2 代价函数具有单个极值(a)和多个极值(b)的示意图

2.2 基于代价函数值的迭代算法

基于代价函数值的智能迭代算法,包括模拟退火算法^[11]、遗传算法^[12]和粒子群算法^[13]等。这类算法不依赖代价函数的梯度信息,具有一定的智能特性,全局性较好,可以获得代价函数的全局最优解。2016年,本组的张佩光将粒子群算法应用到相位差技术的优化求解中,表现出很好的收敛性和大相位(PV大于10 rad)的探测能力^[14],如图3所示。该算法受鸟群觅食的现象启发,鸟群中的每一个个体都被视为一个迭代粒子,三个要素决定着粒子的每一步迭代方向:一是惯性行为,体现在粒子群对现阶段迭代方向和速度的惯性保持;二是自我认知作用,每一个粒子在自身迭代的过程中,都有自己目前所处位置和历史所到达的最佳位置的认知能力,该认知力会对其下一步的行为决策产生影响;三是社会引导作用,每一个粒子在作迭代方向决策的过程中,都会受到群体所到达的最佳位置的引导,该社会引导力会促使群体的集中控制,加速实现群体收敛^[15],如图4所示。2020年中国科学院成都光电技术研究所的葛英健等人针对粒子群算法存在的粒子过早收敛和失活等缺点,提出一种重分配机制并在局部优化过程中引入高斯扰动对其进行修正,进一步提高了粒子群算法的求解精度和收敛速度^[16]。

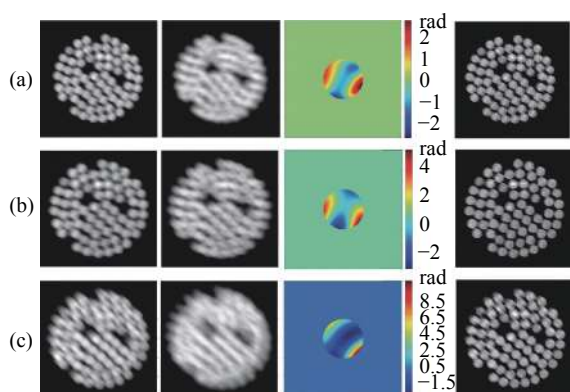


Fig. 3 Experimental results of three different wavefront amplitudes: (from left to right) focal plane images, defocus plane images, reconstructed phases and reconstructed images

图3 三种不同波前幅值的实验结果:从左至右分别为焦面图像、离焦面图像、重建相位和重建图像

2.3 深度学习算法

基于迭代的算法在求解时需要迭代次数较多、耗时长,而且随着待测相位幅值和 Zernike 模式数的增加,其复杂度会更一步增加。目前已在模式识别、数据挖掘等领域得到广泛应用的深度学习算法,与传统迭代优化算法相比,具有计算速度快(无迭代过程)、准确性高(无局部最优问题)等潜在优点,也逐渐在 PD 求解过程中得到应用。2019年中国科学院长春光学精密机械研究所的齐鑫等人通过仿真得到随机的一万组像差的特征图像,来训练长短时记忆网络(LSTM),建立了特征图像与像差的映射关系,然后将实验采集的带有固定相位差异的焦面和离焦图像的特征图输入 LSTM 网络,就可以在 0.35 ms 内实现 2~9 阶条纹 Zernike 模式的 PD 探测^[17]。基于 LSTM 网络的相位差波前探测流程如图5所示。

2020年中国科学院成都光电技术研究所的 Wu Yu 等人构建了如图6所示的卷积神经网络,并利用基于图形处理器 GPU(Graphics Processing Unit)的高性能深度学习支持引擎 TensorRT5.0 加速,可以在 0.5 ms 内实现前 15 阶 Zernike 模式的精确求解^[18]。

3 目标图像重建

PD 探测得到待测相位的 Zernike 模式系数 a 后,就可以根据式(3)~(5)和式(8)~(9)得到 OTF 与 OTF_d , 进而根据公式(12)重建出观测目标的清晰图像。但目标图像重建实际上是一个解卷积过程,这在数学上是一个病态(ill-conditioned)问题。病态问题的解对输入数据非常敏感,如果输入数据有微小误差,则会引起解的误差非常大。因此在重建目标图像时,通常需要加入一些正则化项,对求解结果做出约束,从而保证求解结果的稳定性。目前应用最普遍的是 Tikhonov 正则化,加入 Tikhonov 正则后重建的目标图像如式(14)所示,其中 λ_0 为 Tikhonov 正则化系数, FFT^{-1} 表示傅里叶逆变换。2018年本组的吴道胜提出非局部中心化稀疏表示(NCSR)正则化相比于 Tikhonov 正则化具有更好的图像重建效果,恢复后的图像分辨率提高了 10%^[19]。

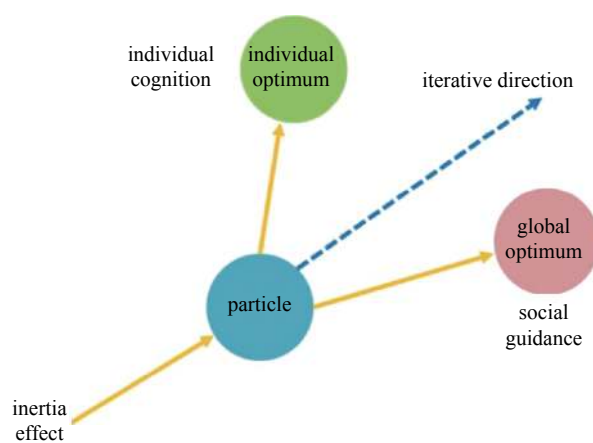


Fig. 4 Iterative direction of particle swarm optimization

图4 粒子群算法的迭代方向

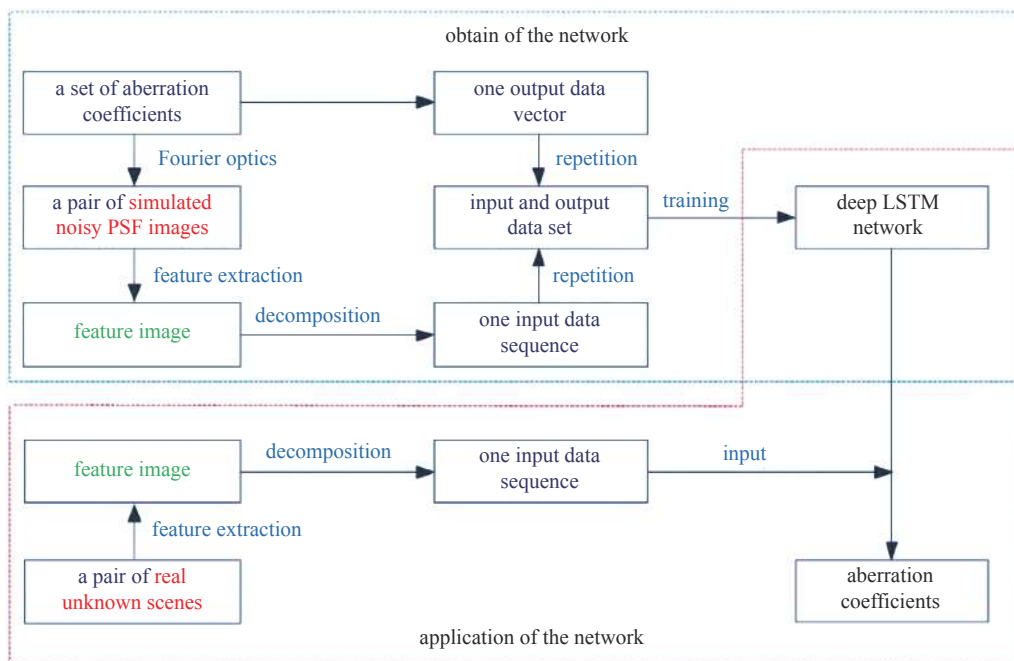


Fig. 5 Phase diversity wavefront sensing based on LSTM network

图 5 基于 LSTM 网络的相位差波前探测

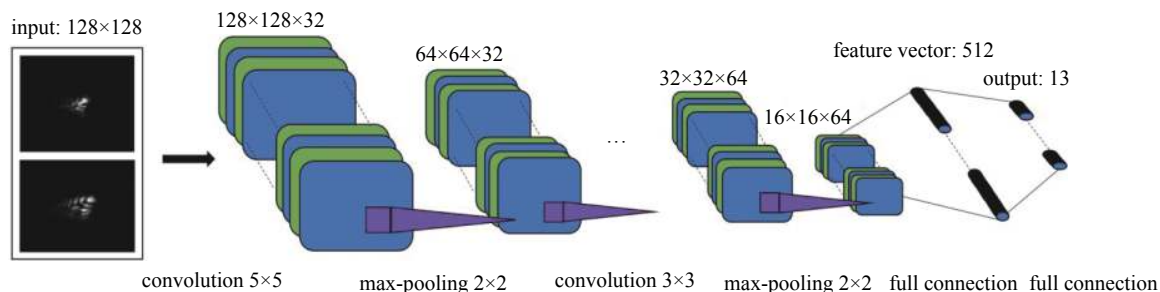


Fig. 6 Phase diversity wavefront sensing based on convolution neural network

图 6 基于卷积神经网络的相位差波前探测

$$o(x, y) = \text{FFT}^{-1} \left[\frac{I(u, v) \text{OTF}^*(u, v) - I_d(u, v) \text{OTF}_d^*(u, v)}{| \text{OTF}(u, v) |^2 + | \text{OTF}_d(u, v) |^2 + \lambda_0} \right] \quad (14)$$

同时值得注意的是, PD 技术仅依赖于焦面图像和相位差图像的强度信息, 来重构相位信息和理想的目标图像。因而图像噪声将直接降低相位探测精度和重建图像质量, 当观测暗弱目标时影响将尤其显著。因此在进行 PD 运算之前, 通常需要对焦面图像和相位差图像进行去噪处理, 例如高斯滤波^[20]、巴特沃思低通滤波^[21]等。2016 年本组的于洪丽将基于三维块匹配变换域滤波(BM3D)的图像去噪算法引入 PD 技术, 在 58.7 dB 到 18.8 dB 的噪声范围内使得相位探测的均方根误差减少了 40%, 重建图像质量得到显著提升^[22], 如图 7 所示。2019 年中国科学院长春光学精密机械研究所官方的 Li Dequan 等人将深度去噪卷积神经网络(DnCNNs)引入到 PD 图像预处理中, 对焦面和相位差图像去除高斯白噪声, 提高了 PD 技术对噪声的鲁棒性^[23]。

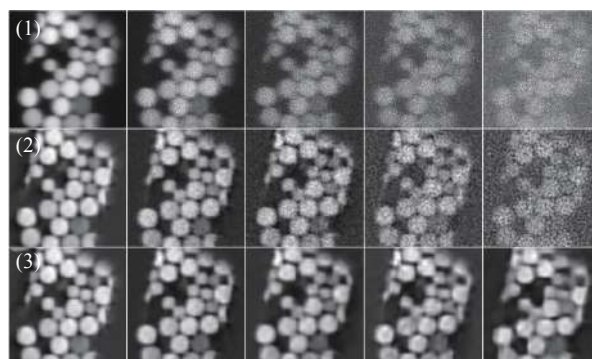


Fig. 7 First line: focal plane images; Second line: reconstructed images without denoising; Third line: reconstructed images after denoising

图 7 第一行: 焦面图像; 第二行: 未去噪重建图像; 第三行: 去噪后重建图像

4 PD 技术在望远镜中的应用

PD 技术能够探测非连续变化的相位分布, 因此非常适用于拼接式望远镜的共相拼接误差检测。1988 年 Paxman 和 Fienup 利用 PD 技术模拟了 6 子镜拼接式望远镜的共相拼接误差检测^[24]。1998 年 Löfdahl 等人将 PD 技术应用

在凯克 10 m 望远镜上 (Keck II), 成功地从各种测量扰动中检测出了 36 个拼接子镜的共相误差, 使得主镜的共相残余误差降低到了 0.07λ , 改善了望远镜的成像质量^[25]。2003 年 Blanc 等人将 PD 技术用于甚大望远镜 (VLT) 的成像设备和配套的自适应光学系统 NAOS 的固有静态像差的检测^[26]。2007 年通用动力公司搭建了基于相位差技术的自适应校正系统 (快星, Quick Star), 实现了对畸变幅值 $\pm 0.1\lambda$ 、变化频率 100 Hz 的像差的波前探测, 探测误差小于 0.01λ ^[27]。2016 年 Lamb 等人利用 PD 技术成功标定了 30 m 望远镜 (TMT) 自适应光学系统 NFIRAOS 的非共光路像差, 可使得系统的非共光路像差从 97 nm 降低到 77 nm^[28], 如图 8 所示。

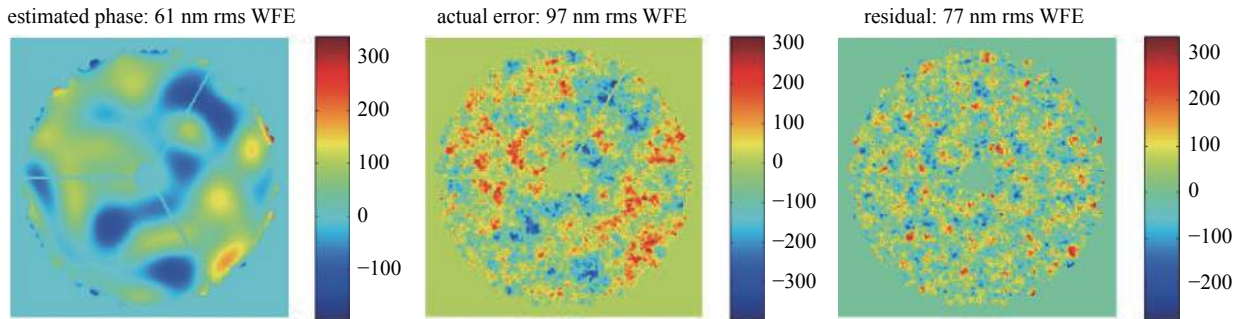


Fig. 8 Calibration of non-common path aberrations in NFIRAOS system with PD technology

图 8 PD 标定 NFIRAOS 系统非共光路像差

PD 技术探测得到波前相位信息后, 通过解卷积能够恢复目标清晰图像。可以对未经自适应光学校正的望远镜直接成像结果进行处理, 也可以与自适应光学技术相结合, 对自适应光学系统的图像事后处理, 消除自适应校正残余像差的影响, 进一步提高系统的成像分辨率。1996 年 Carreras 和 Restaion 将 PD 技术应用在光束定向望远镜上, 成功从 300 帧短曝光的平均图像中恢复出了角间隔为 $1.1''$ 的双星 μ Scorpio 的清晰图像^[29]。2011 年德国马普太阳系研究所的 J. Hirzberger 等人利用 PD 技术显著提高了太阳观测望远镜的分辨率, 如图 9 所示。他们同时也指出重建的效率强烈地依赖于所使用的拟合多项式的数目和图像的噪声水平^[30]。2018 年中国科学院成都光电技术研究所的鲍华等人利用 PD 技术对自适应光学校正后的太阳黑子图像进一步处理, 使得太阳黑子的精细结构得到复原^[31]。2019 年本组的吴道胜等人将 PD 技术应用到一套 2 m 口径望远镜液晶自适应光学系统中, 使得系统对恒星的成像分辨率比自适应校正后提高了 2.5 倍、峰值强度提高了 66.7%^[32]。同年中国科学院长春光学精密机械研究所的明名等人, 在车载的 1.2 m 望远镜上, 通过近红外波段的双通道成像系统同时采集焦面和离焦面图像, 利用相位差技术提高了系统的成像分辨率, 使得系统白天探测能力达到了 5 星等, 成像分辨率接近两倍衍射极限^[33], 其在白天对国际空间站的成像结果如图 10 所示。

5 结 论

与其他波前传感技术相比, 相位差波前探测技术具有光路简单、成本较低、适用于扩展目标、可同时恢复目标图像等优点。过去的三四十年间, 在望远镜系统像差 (包括拼接子镜的共相误差) 检测和目标图像重建方面得到了大量应用。但相位差波前探测技术还未达到完善的程度, 在以下方

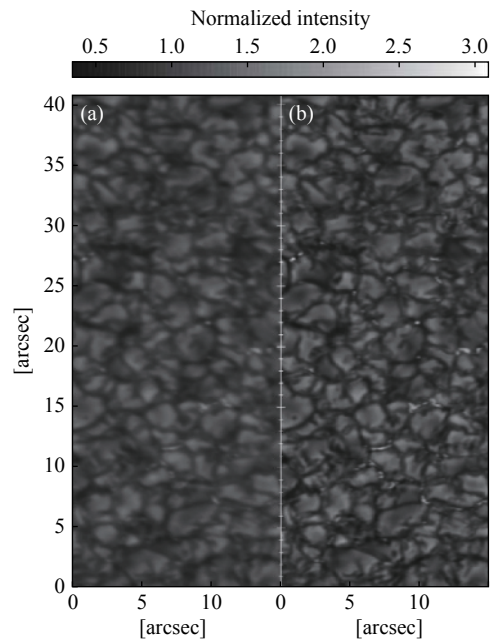


Fig. 9 Solar observation data: (left) unreconstructed image; (right) PD reconstructed image

图 9 太阳观测结果: 左-PD 恢复前; 右-PD 恢复后



Fig. 10 Daytime observation of the International Space Station: (left) unreconstructed image; (right) PD reconstructed image

图 10 1.2 m 望远镜白天对国际空间站的成像结果: 左-PD 恢复前; 右-PD 恢复后

面仍值得进一步深入研究：

(1) 大幅值高阶像差探测

随着像差幅值增大和模式数增多(空间频率变高), PD 技术求解的复杂度呈指数增加, 因此目前 PD 技术大多数还是针对低阶小像差的探测。这限制了 PD 技术的应用范围, 针对高阶大像差的 PD 探测技术值得进一步深入研究。

(2) 实时波前探测

迭代式 PD 求解方法计算复杂、耗时长, 只能探测准静态的波前相位或者对快速动态变化的波前进行事后处理。这使得 PD 技术很难真正取代波前传感器, 应用到实时探测与校正的自适应光学系统中。基于深度学习的 PD 技术, 不需要进行耗时的迭代和优化过程, 有望实现波前的快速实时探测。但这类算法一般都需要大量的样本数据库来训练神经网络, 基于样本训练的神经网络是否适用于实际观测过程中的所有目标需要进一步验证。

参考文献：

- [1] 张逸新, 迟泽英. 光波在大气中的传播与成像[M]. 北京: 国防工业出版社, 1997. (Zhang Yixin, Chi Zeying. Propagation and imaging of light waves in atmosphere[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1997.)
- [2] 杨磊. Phase diversity波前重构的研究及在高分辨图像复原中的应用[D]. 云南: 中国科学院研究生院云南天文台, 2007. (Yang Lei. Researches of the Phase diversity wave-front reconstruction techniques and its application in the high resolution image restoration[D]. Yunnan: Yunnan Observatory, Graduate School of Chinese Academy of Sciences, 2007)
- [3] Gonsalves R A, Chidlaw R. Wavefront sensing by phase retrieval[C]//Applications of Digital Image Processing III, 1979: 32-39.
- [4] Fusco T, Michau V, Mugnier L, et al. Comparative theoretical and experimental study of a Shack-Hartmann and a phase diversity sensor, for high-precision wavefront sensing dedicated to space active optics[C]//International Conference on Space Optics, 2014.
- [5] Gonsalves R A. Phase retrieval and diversity in adaptive optics[J]. Optical Engineering, 1982, 21(5): 829-832.
- [6] Zhang Peiguang, Yang Chengliang, Xu Zihao, et al. High-accuracy wavefront sensing by phase diversity technique with bisymmetric defocus diversity phase[J]. Scientific Reports, 2017, 7(1): 15361.
- [7] Nesterov Y. Gradient methods for minimizing composite objective function[J]. Core Discussion Papers, 2007, 140(1): 125-161.
- [8] Shewchuk J R. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain[M]. Pittsburgh (USA): Carnegie Mellon University, 1994.
- [9] 张小鸣, 李永新. 基于牛顿迭代法的高精度快速开方算法[J]. 电力自动化设备, 2008, 28(3): 75-77. (Zhang Xiaoming, Li Yongxin. High-precision and fast square root algorithm based on Newton iteration method[J]. Electric Power Automation Equipment, 2008, 28(3): 75-77)
- [10] Li Donghui, Fukushima M. On the global convergence of the BFGS method for nonconvex unconstrained optimization problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 2001, 11(4): 1054-1064.
- [11] Kirkpatrick S, Gelatt C D, Vecchi M P. Optimization by simulated annealing[J]. Science, 1983, 220(4598): 671-680.
- [12] Holland J H. Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence[M]. Cambridge: MIT Press, 1992.
- [13] Eberhart R C, Kennedy J. A new optimizer using particle swarm theory[C]//Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science. 1995.
- [14] Zhang Peiguang, Yang Chengliang, Xu Zihao, et al. Hybrid particle swarm global optimization algorithm for phase diversity phase retrieval[J]. Optics Express, 2016, 24(22): 25704.
- [15] 徐梓浩. 基于相位差法的高分辨率液晶自适应光学技术研究[D]. 长春: 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 2018. (Xu Zihao. Research on high-resolution liquid crystal adaptive optics technique with phase diversity[D]. Changchun: Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, 2018.)
- [16] Ge Yingjian, Wang Shengqian, Xian Hao. Phase diversity method based on an improved particle swarm algorithm used in co-phasing error detection[J]. Applied Optics, 2020, 59(31): 9735-9743.
- [17] Qi Xin, Ju Guohao, Zhang Chunyue, et al. Object-independent image-based wavefront sensing approach using phase diversity images and deep learning[J]. Optics Express, 2019, 27(18): 26102-26119.
- [18] Wu Yu, Guo Youming, Bao Hua, et al. Sub-millisecond phase retrieval for phase-diversity wavefront sensor[J]. Sensors, 2020, 20(17): 4877.
- [19] Wu Daosheng, Yang Chengliang, Zhang Peiguang, et al. Phase diversity technique with sparse regularization in liquid crystal adaptive optics system[J]. Journal of Astronomical Telescopes Instruments and Systems, 2018, 4(1).
- [20] 李斐, 饶长辉. 相位差法波前传感系统自身误差的分析及消除方法[J]. 强激光与粒子束, 2011, 23(3): 599-605. (Li Fei, Rao Changhui. Analysis and elimination of errors in phase diversity wavefront sensing system[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2011, 23(3): 599-605)
- [21] 王欣, 赵达尊. 图像噪声对相位变更波前传感的影响研究[J]. 光学学报, 2009, 29(8): 2142-2146. (Wang Xin, Zhao Dazun. Influence of noise to phase diversity wavefront sensing[J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(8): 2142-2146)
- [22] Yu Hongli, Yang Chengliang, Xu Zihao, et al. Analysis and reduction of errors caused by Poisson noise for phase diversity technique[J]. Optics Express, 2016,

- 24(19): 22034-22042.
- [23] Li Dequan, Xu Shuyan, Wang Dong, et al. Phase diversity algorithm with high noise robust based on deep denoising convolutional neural network[J]. *Optics Express*, 2019, 27(16): 22846-22854.
- [24] Paxman R G, Fienup J R. Optical misalignment sensing and image reconstruction using phase diversity[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1988, 5(5): 914-923.
- [25] Lofdahl M G, Duncan A L, Paxman R G, et al. Phase diversity experiment to measure piston misalignment on the segmented primary mirror of the Keck II Telescope[J]. *Astronomical Telescopes & Instrumentation*, 1998, 3356: 1190-1201.
- [26] Blanc A, Fusco T, Hartung M, et al. Calibration of NAOS and CONICA static aberrations. Application of the phase diversity technique[J]. *Astronomy & Astrophysics*, 2003, 399: 373-83.
- [27] Georges J A, Dorrance P, Gleichman K, et al. High-speed closed-loop dual deformable-mirror phase-diversity testbed[C]. *Proceedings of SPIE*, 2007, 6711: 671105.
- [28] Lamb M, Correia C, Sauvage J F, et al. Exploring the operational effects of phase diversity for the calibration of non-common path errors on NFIRAOS[C]//*SPIE Astronomical Telescopes + Instrumentation*, 2016.
- [29] Carreras R A, Restaino S R. Field experimental results using phase diversity on a binary star[J]. *NASA Technical Report*, 1996: 97.
- [30] Hirzberger J, Feller A, Riethmüller T, et al. Performance validation of phase diversity image reconstruction techniques[J]. *Astronomy & Astrophysics*, 2011, 529: 1-5.
- [31] 鲍华, 饶长辉, 田雨, 等. 自适应光学图像事后重建技术研究进展[J]. *光电工程*, 2018, 45(3): 58-67. (Bao Hua, Rao Changhui, Tian Yu, et al. Research progress on adaptive optical image post reconstruction[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2018, 45(3): 58-67)
- [32] Wu Daosheng, Yang Chengliang, Li Hao, et al. Astronomical observation by 2-meter telescope based on liquid crystal adaptive optics with phase diversity[J]. *Optics Communications*, 2019, 439: 129-132.
- [33] 明名, 陈涛, 徐天爽. 基于相位差异技术的车载白天高分辨成像系统[J]. *光子学报*, 2019, 48(3): 129-137. (Ming Ming, Chen Tao, Xu Tianshuang. Vehicular daytime high-resolution imaging system based on phase-diversity technology[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2019, 48(3): 129-137)