



·激光大气传输技术·综述·

## 特殊关联结构光束的大气传输研究进展\*

蔺淑琴<sup>1,2</sup>, 蔡阳健<sup>1,2,3</sup>, 余佳益<sup>1,2</sup>

(1. 山东师范大学 物理与电子科学学院, 济南 250358; 2. 山东省光场调控工程技术中心 & 山东省光学与光子器件技术重点实验室, 济南 250358; 3. 苏州大学 物理科学与技术学院, 江苏 苏州 215006)

**摘 要:** 近年来, 光场调控逐渐成为光学领域的热点研究课题, 光场相干性调控可以引发许多新颖物理效应。其中, 通过相干性调控得到的特殊关联结构光束不仅展现出奇特的传输特性, 而且可以有效地降低大气湍流引起的光强退化、光束漂移、光强闪烁和退偏振等负面效应。因此, 特殊关联结构光束在自由空间光通信领域具有重要的应用前景。本文回顾了特殊关联结构光束的构建基础理论和大气传输研究方法及其发展历程, 举例展示近些年典型特殊关联结构光束的大气传输研究成果。

**关键词:** 关联结构; 相干性; 大气湍流; 传输特性

中图分类号: TN012

文献标志码: A doi: 10.11884/HPLPB202133.210210

## Research progress of propagation of beams with special correlation structure in turbulent atmosphere

Lin Shuqin<sup>1,2</sup>, Cai Yangjian<sup>1,2,3</sup>, Yu Jiayi<sup>1,2</sup>

(1. School of Physics and Electronics, Shandong Normal University, Ji'nan 250358, China;  
2. Shandong Provincial Engineering and Technical Center of Light Manipulations & Shandong Provincial Key Laboratory of Optics and Photonic Device, Ji'nan 250358, China;  
3. School of Physical Science and Technology, Soochow University, Suzhou 215006, China)

**Abstract:** In recent years, optical fields manipulation has become a hot research topic and optical coherence manipulation can induce many novel physical effects. The laser beams with special correlation structure obtained by coherence control not only exhibit peculiar propagation characteristics, but also can effectively reduce the negative effects induced by atmospheric turbulence, such as intensity degradation, beam wander, scintillation and depolarization. Thus, these beams have applications prospects in free-space optical communications. In this paper, the basic theory of the construction of special correlation structure beams and the research methods as well as their development history are reviewed, and the propagation properties of special correlation structure beams in turbulent atmosphere in recent years are illustrated as examples.

**Key words:** correlation structure; coherence; atmospheric turbulence; propagation properties

自 1960 年第一台激光器发明以来, 激光由于其方向性好、相干性高、单色性好和亮度高的独特性质被广泛应用于各个领域<sup>[1-5]</sup>。其中, 新一代信息技术——自由空间光通信技术是以激光作为信息载体、湍流大气作为传输媒介, 从而进行信息传输的一种信息技术, 具有频带宽、速率高、传输保密性好、易于搭载等优势。然而, 激光作为自由空间光通信的信息载体, 在湍流大气中传输时会受到大气湍流的影响, 导致激光波前相位扰动, 引起光斑漂移、光强起伏等负面效应, 严重限制通信系统的性能<sup>[5]</sup>。因此, 研究如何降低大气湍流对激光束带来的负面影响是一个重要的研究课题。

\* 收稿日期: 2021-05-29; 修订日期: 2021-08-07

基金项目: 国家重点研发计划项目(2019YFA0705000); 国家杰出青年科学基金项目(11525418); 国家自然科学基金项目(11947240, 11974218, 12004218, 91750201); 济南市创新团队项目(2018GXRC010); 中国博士后科学基金项目(2020M680093); 山东省自然科学基金项目(ZR2020QA067)

作者简介: 蔺淑琴(1996—), 女, 硕士研究生, 主要从事光场调控与大气传输方面的研究。

通信作者: 蔡阳健(1977—), 男, 博士, 博士生导师, 教授, 主要从事光场调控与应用等方面的研究;

余佳益(1992—), 男, 博士, 硕士生导师, 讲师, 主要从事光场调控与应用等方面的研究。

空间相干性是光场的固有特性之一,它影响着光场的传输特性。光学相干理论在过去的几十年里得到了很好的发展,被降低相干性的激光束我们称之为部分相干光束<sup>[6-11]</sup>,其在激光的诸多应用中都有优势<sup>[12-24]</sup>。将部分相干光束作为自由空间光通信的信息载体是一种有效的大气湍流负面效应抑制手段<sup>[25-27]</sup>。2002年,Gbur和Wolf从理论上研究了在湍流大气中部分相干光束的二阶统计特性(光束扩散演化),得到部分相干光束受到大气湍流的负面影响小于同等情况下的完全相干光束的重要结论<sup>[28]</sup>。随后,Shirai等人通过相干模表征部分相干光束,并从模式分解的角度解释了部分相干光束的抗湍流能力优于完全相干光束的根本原因<sup>[29]</sup>。次年,Dogariu和Amarande通过实验验证了上述理论结论<sup>[30]</sup>。以上三个研究成果掀起了部分相干光束大气传输研究热潮,大量关于部分相干光束的大气传输研究被发表<sup>[31-68]</sup>。总的来说部分相干光束可以根据其关联结构形式大体分为两大类:传统关联结构光束和特殊关联结构光束<sup>[11,69]</sup>。对于前者的研究,无论初始光波模式携带不同的光束振幅、偏振和相位,它们的大气传输特性(光强演化)可以归纳为:当光束在湍流大气中传输足够长的距离时,光强分布都会逐渐退化为高斯分布,且与其初始光束的光强分布无关。

随着对光束自身特性的需求逐渐提高,简单的光束模型无法继续满足研究人员的需求。庆幸的是,Gori等人于2007年提出了构建特殊关联结构光束的充分条件<sup>[70-71]</sup>,具有特殊关联结构的部分相干光束由于其自身具备奇特的传输特性,引起了学者的极大兴趣。因此,具有各式各样传输特性的特殊关联结构光束被构建产生,伴随着它们的大气传输特性的研究也逐渐被报道<sup>[34-68]</sup>。大量的研究结果表明其光强演化特点也遵循一个规律,即:特殊关联结构光束在传输距离较短时,由自由空间衍射引起的光束演化起主导作用,光强分布会演化成各式各样的分布形式;之后随着传输距离的进一步增加,大气湍流的影响逐渐累积并起主导作用,光强分布逐渐退化为高斯分布。但值得注意的是,这些特殊关联结构光束不仅表现出独特的传输特性,而且比传统关联结构光束和相干光束具有更好的抗湍流能力。由于其奇特的传输特性和优异的抗湍流能力,特殊关联结构光束引起了研究人员的广泛关注。

因此,在本文中我们将分别从特殊关联结构光束的构建基础理论、湍流大气传输理论和特殊关联结构光束大气传输研究典型案例三方面,回顾特殊关联结构光束大气传输的研究历史。

## 1 特殊关联结构光束的构建基础理论

为了研究部分相干光束的大气传输特性,我们首先需要明确部分相干光束是如何表征的。部分相干光束不像完全相干光束一样可以直接通过电场来描述,而是需要通过两点电场之间的关联函数表征。且在构建部分相干光束的具体表达式的过程中,需要确保空间关联函数满足一定的限定条件。本节将从标量部分相干光束和矢量部分相干光束两个角度,分别介绍部分相干光束空间关联结构构建基础理论。

### 1.1 标量特殊关联结构光束

在空间-频率域,标量部分相干光束可以通过交叉谱密度函数  $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$  来表征,可以表示为光场传输截面上任意两点电场之间的关联函数<sup>[10]</sup>,即

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \langle E^*(\mathbf{r}_1, \omega) E(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  为传输截面上的两个任意位置矢量,  $\omega$  为圆频率,  $E$  表示垂直于传输方向的场分布, \*表示取复共轭,尖括号表示取系综平均。在本文叙述中,我们只考虑稳态准单色光,因此可以忽略参数  $\omega$  对谱函数的影响。

我们将归一化的交叉谱密度函数定义为光场的相干度(关联函数)

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)} \sqrt{W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2)}} \quad (2)$$

相干度的绝对值的取值范围为  $0 \leq |\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| \leq 1$ 。从相干度的取值角度,部分相干光束可定义为,当  $0 < |\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| < 1$  时,表示部分相干光束;当  $|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| = 0$  时,表示非相干光束;当  $|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| = 1$  时,表示相干光束。然而,相干度  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  的不同表达形式决定着部分相干光束的不同关联结构种类。因此,如何设计不同形式的相干度  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  是构建具有不同关联结构部分相干光束的核心问题。

为了使交叉谱密度函数在数学上成为真实函数(即物理上可实现的),其必须满足式(3)所示的非负正定性条件<sup>[70]</sup>

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int p(\mathbf{v}) H^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}) H(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}) d^2\mathbf{v} \quad (3)$$

式中:  $p(\mathbf{v})$  为非负函数,  $H(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  是任意调制函数。在线性光学系统中,调制函数一般可以表示为具有傅里叶变化形式的函数,即

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \tau(\mathbf{r}) \exp[-ikR(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}] \quad (4)$$

式中： $k$  表示波数， $\tau(\mathbf{r})$  表示振幅， $R(\mathbf{r})$  表示矢量函数。那么，当选取一个可进行傅里叶变换的非负  $p(\mathbf{v})$  函数时，交叉谱密度函数则可以表示为

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \tau^*(\mathbf{r}_1) \tau(\mathbf{r}_2) \mu[R(\mathbf{r}_1) - R(\mathbf{r}_2)] \quad (5)$$

其中： $\mu$  为相干度也是  $p$  函数的傅里叶变换形式。此时，我们发现通过  $p(\mathbf{v})$  和  $R(\mathbf{r})$  函数可以构建不同形式的相干度函数  $\mu$ ，从而构建得到一系列具有不同关联结构的标量部分相干光束。

## 1.2 矢量特殊关联结构光束

在空间-频率域，矢量部分相干光束可以用交叉谱密度矩阵来表征<sup>[6-7]</sup>

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \begin{bmatrix} W_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & W_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ W_{yx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & W_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中， $W_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle E_\alpha^*(\mathbf{r}_1) E_\beta(\mathbf{r}_2) \rangle$ , ( $\alpha, \beta = x, y$ ) 为交叉谱密度矩阵元。矢量部分相干光束的相干度定义为

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\text{Tr}[\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]}{\sqrt{\text{Tr}[\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)]} \sqrt{\text{Tr}[\mathbf{W}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2)]}} \quad (7)$$

为实现交叉谱密度矩阵的真实性，交叉谱密度矩阵元  $W_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  也必须满足式(8)所示非负正定性条件<sup>[7]</sup>

$$W_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int p_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) H_\alpha^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}) H_\beta(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}) d^2\mathbf{v}, \quad (\alpha, \beta = x, y) \quad (8)$$

式中： $H_{\alpha(\beta)}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  是任意调制函数，其表达式也一般选取式(4)形式； $p_{\alpha\beta}(\mathbf{v})$  为下述矩阵的矩阵元

$$\mathbf{p}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} p_{xx}(\mathbf{v}) & p_{xy}(\mathbf{v}) \\ p_{yx}(\mathbf{v}) & p_{yy}(\mathbf{v}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

同时，矩阵元  $p_{\alpha\beta}(\mathbf{v})$  应满足式(10)

$$p_{xx}(\mathbf{v}) \geq 0, p_{yy}(\mathbf{v}) \geq 0, p_{xx}(\mathbf{v})p_{yy}(\mathbf{v}) - |p_{xy}(\mathbf{v})|^2 \geq 0 \quad (10)$$

因此，选择合适的满足条件的  $p_{\alpha\beta}(\mathbf{v})$  和  $H_{\alpha(\beta)}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  函数，交叉谱密度矩阵元可表示为

$$W_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \tau_\alpha^*(\mathbf{r}_1) \tau_\beta(\mathbf{r}_2) \mu[R(\mathbf{r}_1) - R(\mathbf{r}_2)] \quad (11)$$

同样道理，我们可以通过对  $p_{\alpha\beta}(\mathbf{v})$  和  $R(\mathbf{r})$  函数进行部分相干光束的关联结构调控。据此，我们可以构建一系列具有不同关联结构的矢量部分相干光束。另一方面，矢量部分相干光束的偏振态与式(11)中的  $\tau_{\alpha(\beta)}(\mathbf{r})$  函数密切相关。当  $\tau_\alpha(\mathbf{r}) = A_\alpha \exp(-r^2/4w_0^2)$  时 ( $A_\alpha$  和  $w_0$  分别表示任意常数和光束束腰宽度)，可以构建得到均匀偏振的矢量部分相干光束，即源平面上任意点的偏振态相同；当  $\tau_\alpha(\mathbf{r}) = \alpha/(2w_0) \exp(-r^2/4w_0^2)$ ，则可以构建径向偏振部分相干光束；当  $\tau_x(\mathbf{r}) = y/(2w_0) \exp(-r^2/4w_0^2)$  且  $\tau_y(\mathbf{r}) = x/(2w_0) \exp(-r^2/4w_0^2)$ ，则可以构建得到角向偏振部分相干光束。因此，通过对  $p_{\alpha\beta}(\mathbf{v})$ 、 $R(\mathbf{r})$  和  $\tau_{\alpha(\beta)}(\mathbf{r})$  函数的选取设定，可以构建得到具有不同偏振态的各种关联结构部分相干光束。

## 2 特殊关联结构光束在湍流大气中的传输理论

大气的随机运动造成大气湍流，其主要起因是地球表面对气流拖曳引起的风切变、地表热辐射导致的热对流、地表不同位置受太阳辐射的不均匀性导致的温度梯度变化等。大气的湍流运动引起大气折射率的随机起伏，使得在大气中传输的光波受到无法避免的影响。因此，在开始了解特殊关联结构光束的湍流大气传输特性之前，需先了解大气湍流统计特性。

### 2.1 大气湍流统计特性

根据 Richardson 描绘的级串图像可知，湍流是不同尺度的湍流涡旋组成的，由大尺度涡旋逐级向小尺度涡旋输送能量<sup>[72]</sup>。尺度最大的涡旋能量来自风切变或者对流，大涡旋失稳后破碎形成次级小涡旋，小涡旋失稳后再产生更次一级的小涡旋，直至到达尺度最小的涡旋为止。这一过程实现了湍流能量在不同尺度涡旋之间的传递，最终在尺度最小的涡旋处以热量形式耗散。最大的湍流涡旋尺度称为外尺度，最小的湍流涡旋尺度称为内尺度，外尺度和内尺度之间的区域称为惯性区。光波在湍流大气中传输时，不同尺度的涡旋对光波产生随机折射和衍射作用，使得光波的振幅和相位出现随机变化，产生这种随机变化的根本原因是大气折射率的随机起伏。大气湍流中的折射率  $n(\mathbf{R}, t)$  是位置和时间的随机函数。为了处理湍流时间和空间转换关系，Taylor 提出湍流冻结假设，认为湍

流涡旋在空间中固定点随时间的变化和给定时间的空间变化是相同的<sup>[73]</sup>。其目的是以单测量点的时间观测推测湍流场的空间特性,即时间信息换空间信息。因此,在以后的相关计算处理中,不再特别提到时间变量。

对于呈现随机性的大气湍流而言,用统计方法来描述其折射率的变化特性,通常用折射率起伏的空间协方差函数来描述折射率在三维空间中的随机变化特性。在  $\mathbf{R}$  点处的大气折射率在数学上表示为

$$n(\mathbf{R}) = n_0 + n_1(\mathbf{R}) \quad (12)$$

式中:  $n_0 \approx 1$  表示折射率的均值,  $n_1(\mathbf{R})$  表示折射率的起伏变化,系综平均  $\langle n_1(\mathbf{R}) \rangle \approx 0$ 。折射率起伏的协方差函数定义为

$$B_n(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}) = \langle n_1(\mathbf{R}_1) n_1(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}) \rangle \quad (13)$$

对于统计均匀的大气湍流而言,有  $B_n(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}) = B_n(\mathbf{R})$ , 即两点简单统计特性只与相对位置有关,而与其具体位置无关;对于统计均匀的各向同性大气湍流而言,有  $B_n(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}) = B_n(R)$ , 其中  $R = |\mathbf{R}|$ , 表示空间各个方向上统计特性相同。比较符合实际的情况是,在一定区域内大气湍流符合统计均匀各向同性,超出这个区域范围则不符合,这种湍流一般称为局域各向同性湍流。根据 Kolmogorov 湍流统计理论<sup>[74]</sup>,局域各向同性湍流存在一个惯性区间,该区域上线尺度为外尺度  $L_0$ , 下限尺度为内尺度  $l_0$ , 在此区间内相关结构函数满足 2/3 幂律

$$D_n(R) = 2[B_n(0) - B_n(R)] = C_n^2 R^{2/3}, \quad (l_0 \leq R \leq L_0) \quad (14)$$

其中:  $C_n^2$  是折射率结构常数,通常用来描述湍流强弱。

在统计均匀各向同性条件下,折射率起伏的空间功率谱密度函数通过折射率起伏协方差函数的三维傅里叶变换得到

$$\Phi_n(\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} B_n(R) \exp(-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{R}) d^3 R \quad (15)$$

折射率起伏协方差函数和折射率起伏空间功率谱密度函数互为傅里叶变换,二者对大气折射率起伏的描述是等效的。在各种理论研究中,普遍使用折射率起伏空间功率谱密度函数来描述大气湍流折射率的随机变化特性。为了叙述简便,折射率起伏空间功率谱函数又称为湍流谱。

最为人熟知的湍流谱是 Kolmogorov 谱,它是根据结构函数在惯性区间内满足 2/3 幂律表达式(14)推导出来的,定义为

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3}, \quad 1/L_0 \ll \kappa \ll 1/l_0 \quad (16)$$

Kolmogorov 谱模型在  $1/L_0 \ll \kappa \ll 1/l_0$  范围内适用。通常假定外尺度为无穷大,内尺度忽略不计,使其对所有波数范围适用,但在某些情况下这种设定会导致发散积分,因此在使用这一谱模型时需谨慎。

Tatarskii 将范围扩展到  $\kappa > 1/l_0$  区域,引入了 Tatarskii 谱

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right), \quad \kappa \gg 1/L_0; \quad \kappa_m = 5.92/l_0 \quad (17)$$

当考虑大尺度湍流起伏时,研究者一般选择使用 von-Karman 谱模型,即

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6}, \quad 0 \leq \kappa \ll 1/l_0 \quad (18)$$

式中:  $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ 。

当同时考虑大、小尺度湍流起伏时,研究人员通常选择 Tatarskii 谱和 von-Karman 谱的综合谱,仍被广泛地称为 von-Karman 谱

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \exp\left(-\kappa^2/\kappa_m^2\right) (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6}, \quad 0 \leq \kappa < \infty \quad (19)$$

在本文中,我们只介绍以上几种常见的湍流谱,其他的湍流谱模型可以参考文献<sup>[5]</sup>。

现实中,大气湍流的情况是很复杂的,当我们利用局部各向同性湍流理论进行光传输问题分析时,只能从一定程度上反映光波的变化,准确的分析有赖于我们对湍流随机起伏特性的深入了解。

## 2.2 特殊关联结构光束的大气传输模型

从经典电磁理论出发,可以通过麦克斯韦方程来研究光波在各种介质中的传输特性。对大气湍流中的光波传输问题来说,通常作如下基本假设:(1)光场的时间变化满足正弦函数(单色波);(2)忽略光束的后向散射效应和偏振退化效应;(3)沿光束传输方向的大气折射率起伏相关函数近似为狄拉克函数(马尔可夫近似);(4)可以使用傍

轴近似。基于第(1)、(2)条的基本假设,从麦克斯韦方程出发,可以得到光波在湍流中传输的波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{R}) + k^2 n^2(\mathbf{R}) \mathbf{E}(\mathbf{R}) = 0 \quad (20)$$

式(20)可以分解为电场  $\mathbf{E}$  在各坐标轴分量上的标量方程,假设光束沿  $z$  轴传输,  $U(\mathbf{R})$  表示其电场分量,可得光在湍流大气中的标量亥姆霍兹方程<sup>[75]</sup>

$$\nabla^2 U(\mathbf{R}) + k^2 n^2(\mathbf{R}) U(\mathbf{R}) = 0 \quad (21)$$

其中:  $\mathbf{R}=(x,y,z)$  是空间三维坐标。根据 3.1 节介绍,并应用马尔可夫近似,折射率起伏在空间两点  $\mathbf{R}_1$  和  $\mathbf{R}_2$  的协方差函数表示为

$$\langle n_1(\mathbf{R}_1) n_1(\mathbf{R}_2) \rangle = B_n(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \approx \delta(z_1 - z_2) A_n(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (22)$$

其中:  $A_n(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  表示二维协方差函数。式(22)意味着折射率起伏在传输方向的相关性对光传输的起伏特征影响很小。

考虑到大气折射率起伏是微弱的,因此可以用微扰法进行计算处理。最为人熟知的方法有 Born 近似微扰法和 Rytov 平缓微扰法。Born 近似是将电场分量展开成级数形式

$$U(\mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}) + U_1(\mathbf{R}) + U_2(\mathbf{R}) + \dots \quad (23)$$

式中:  $U_0(\mathbf{R})$  表示未被散射(零级)的电场分量,  $U_1(\mathbf{R})$  和  $U_2(\mathbf{R})$  分别表示一级和二级散射分量。作出各散射分量满足的方程并求解,将各散射分量解叠加就得到电场分量  $U(\mathbf{R})$  的解。

Rytov 平缓微扰法则考虑电场分量受到一个复相位扰动

$$U(\mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}) \exp[\psi(\mathbf{R})] \quad (24)$$

式中:  $\psi(\mathbf{R})$  表示由湍流引起的复相位扰动,也可以展开成级数形式

$$\psi(\mathbf{R}) = \psi_1(\mathbf{R}) + \psi_2(\mathbf{R}) + \dots \quad (25)$$

式中:  $\psi_1(\mathbf{R})$  和  $\psi_2(\mathbf{R})$  分别表示一级和二级复相位的扰动。Born 近似微扰法与 Rytov 平缓微扰法的不同点在于前者是在未扰动场的基础上添加扰动项,而后者将微扰过程看作一种累积的过程。Born 近似方法在处理光传输问题上有严重的局限性,它只在短距离传输路径上有效,因此在研究光在湍流中的统计特性时,研究者普遍使用的方法是 Rytov 方法, Tatarskii 将其引入到湍流介质的波传输问题并取得成功<sup>[76]</sup>。但是,借助 Rytov 扰动法从亥姆霍兹方程出发讨论光波的统计性质,只能得到一些非常基础性的结果<sup>[76-77]</sup>,对于复杂的特殊关联结构光束,很难从数学上严格求解。

近年来,激光束大气传输的首选研究方法是由 Lutomiriski 和 Yura 在 1971 年提出的广义惠更斯-菲涅尔积分法,这种方法可以简便的处理不同光波模式的湍流大气传输问题<sup>[78]</sup>。根据惠更斯-菲涅尔原理,光波从光源面经过湍流大气到达接收面的电场满足以下积分方程

$$U(\boldsymbol{\rho}, z) = -\frac{ik}{2\pi z} \int U_0(\mathbf{r}, 0) \exp\left[\frac{ik(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r})^2}{2z}\right] \exp[\psi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}, z)] d^2 \mathbf{r} \quad (26)$$

式中:  $U_0(\mathbf{r}, 0)$  和  $U(\boldsymbol{\rho}, z)$  分别表示光源面和接收面的电场。对于部分相干光而言,我们不能用电场直接描述其光场,而是用交叉谱密度函数来进行描述,于是,将式(26)取复共轭然后乘式(26),取系综平均得

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = \langle U^*(\boldsymbol{\rho}_1, z) U(\boldsymbol{\rho}_2, z) \rangle = \frac{k^2}{4\pi^2 z^2} \int W_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) \times \exp\left\{-\frac{ik}{2z} [(\boldsymbol{\rho}_1 - \mathbf{r}_1)^2 - (\boldsymbol{\rho}_2 - \mathbf{r}_2)^2]\right\} \langle \exp[\psi^*(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\rho}_1, z) + \psi(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\rho}_2, z)] \rangle d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_2 \quad (27)$$

式中:  $W_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$  表示光源面处的交叉谱密度函数;等式最后一项尖括号内表示的是湍流引起的复相位扰动的二阶统计平均,根据 Kolmogorov 湍流统计理论和 Rytov 平缓微扰法(只考虑到二阶微扰),该项可表示为<sup>[79]</sup>

$$\langle \exp[\psi^*(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\rho}_1, z) + \psi(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\rho}_2, z)] \rangle = \exp[2E_1(0, 0; 0, 0) + E_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)] \quad (28)$$

其中

$$E_1(0, 0; 0, 0) = -2\pi^2 k^2 z \int_0^\infty \kappa \Phi_n(\kappa) d\kappa \quad (29)$$

$$E_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = 4\pi^2 k^2 z \int_0^1 \int_0^\infty \kappa \Phi_n(\kappa) J_0[\kappa|(1-\xi)\boldsymbol{\rho}_a + \xi\mathbf{r}_d]| d\xi d\kappa \quad (30)$$

式中:  $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  和  $\boldsymbol{\rho}_d = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$  分别表示光源面和接收面处的位置矢量差;  $J_0(x)$  表示零阶贝塞尔函数, 作泰勒级数展开后只取前两项, 近似为  $J_0(x) = 1 - x^2/4$ 。将近似的贝塞尔函数带入式(30), 积分后得到

$$\langle \exp[\psi^*(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\rho}_1, z) + \psi(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\rho}_2, z)] \rangle = \exp\left[-\frac{\pi^2 k^2 z}{3} (\mathbf{r}_d^2 + \mathbf{r}_d \cdot \boldsymbol{\rho}_d + \boldsymbol{\rho}_d^2) \int_0^\infty k^3 \Phi_n(k) dk\right] \quad (31)$$

利用式(27)和式(31)可以得到特殊关联结构光束经过湍流大气后在接收面处的交叉谱密度函数。

根据计算得到的远场光束交叉谱密度函数  $W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z)$ , 可以得到特殊关联结构光束传输之后的光强和相干度

$$I(\boldsymbol{\rho}, z) = W(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z) \quad (32)$$

$$\mu(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = \frac{W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z)}{\sqrt{W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_1, z) W(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_2, z)}} \quad (33)$$

通过维格纳(Wigner)分布函数

$$h(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, z) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} W(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_d, z) \exp(-ik\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\rho}_d) d^2 \boldsymbol{\rho}_d \quad (34)$$

可以得到部分相干光束任意阶矩的信息, 光束沿  $x$  和  $y$  轴的平均光斑半径及发散角阶矩定义为

$$\langle \rho_x^{n_1} \rho_y^{n_2} \theta_x^{m_1} \theta_y^{m_2} \rangle = \frac{1}{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_x^{n_1} \rho_y^{n_2} \theta_x^{m_1} \theta_y^{m_2} h(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, z) d^2 \boldsymbol{\rho}_d d^2 \boldsymbol{\theta} \quad (35)$$

其中:  $P = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, z) d^2 \boldsymbol{\rho}_d d^2 \boldsymbol{\theta}$  表示光束携带的总能量。根据式(35)可以得到部分相干光束任意阶矩, 光束在传输过程中的质量因子演化以及光束漂移可以利用光束的二阶矩计算得到。

质量因子是判断光束质量的一个重要参数, 部分相干光在湍流大气中的质量因子可通过二阶矩表达<sup>[32, 80]</sup>

$$M^2(z) = k \left( \langle \rho^2 \rangle \langle \theta^2 \rangle - \langle \rho \cdot \theta \rangle^2 \right)^{1/2} \quad (36)$$

光束在传输时会受到大气湍流介质的扰动, 因此在接收平面上光束的瞬时中心会发生随机位移, 产生所谓的光束漂移。光束漂移表示为光束瞬时中心随机离轴位移的方差, 定义为<sup>[5]</sup>

$$\langle r_c^2 \rangle = 4\pi^2 k^2 W_{FS}^2 \int_0^L \int_0^\infty \kappa \Phi_n(\kappa) \exp(-\kappa^2 W_{LT}^2) \left\{ 1 - \exp\left[\frac{-2L^2 \kappa^2 (1-z/L)}{k^2 W_{FS}^2}\right] \right\} dk dz \quad (37)$$

式中:  $L$  是总传输距离。  $W_{FS} = \sqrt{\langle \rho^2 \rangle_{FS}}$  表示在自由空间中传输接收面上的光束宽度,  $W_{LT} = \sqrt{\langle \rho^2 \rangle_{LT}}$  表示在湍流中传输接受面上的光束宽度。

综上, 基于广义惠更斯-菲涅尔原理和 Wigner 分布函数可以计算部分相干光在湍流大气中的二阶统计特性, 包括平均光强、相干度、质量因子及光束漂移。光束在湍流介质中的传输效应, 除了光束发散角变大、相干性降低、光斑随机漂移外, 光强也会在传输过程中随机变化, 称为光强闪烁。通常用光强起伏的归一化协方差, 即闪烁因子, 定义光强起伏的强弱。单点的四阶矩表达了光场的强度起伏特性, 在这里不再展开介绍, 感兴趣的读者可以参考文献 [5]。

### 3 特殊关联结构光束的传输特性

特殊关联结构光束根据其关联结构形式的不同可分为均匀关联结构光束和非均匀关联结构光束。均匀关联结构光束的关联函数只与两点位置距离有关而与两点位置无关, 即满足  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \mu(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ ; 当关联函数不满足上述条件时, 我们将这类特殊关联结构光束归类为非均匀关联结构光束。为了让读者直观地了解特殊关联结构光束的构建及其在湍流大气中的奇特传输特性和良好的抗湍流能力, 我们将从均匀/非均匀关联结构光束分类出发, 重点阐述几种典型的特殊关联结构光束的相关研究成果。

#### 3.1 均匀关联结构光束的传输特性

##### 3.1.1 多高斯关联结构光束

2012年, Sahin 和 Korotkova 构建了多高斯关联结构光束, 该光束具有光束自整形传输特性, 在远场可呈现光强的平顶分布<sup>[81]</sup>。选取以下  $p(\mathbf{v})$  和  $H(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  函数

$$p(\mathbf{v}) = \frac{\delta^2}{C_0} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \binom{N}{n} \exp\left(-\frac{n\delta^2 \mathbf{v}^2}{2}\right) \quad (38)$$

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{4\sigma^2}\right) \exp(-i\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \quad (39)$$

式中： $\sigma$ 和 $\delta$ 分别表示光束束腰宽度和相干宽度， $N$ 表示光束阶数， $\binom{N}{n}$ 表示二项式系数， $C_0 = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{N}{n}$ 表示归一化因子。并通过非负正定条件式(3)可构建得到多高斯关联结构光束的光束模型，其源场处的交叉谱密度函数可表示为

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{4\sigma^2}\right) \mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (40)$$

式中： $\mu$ 表示多高斯关联结构光束的相干度函数

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{C_0} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{2n\delta^2}\right] \quad (41)$$

同年，Korotkova等人研究了该光束在湍流大气中的光强演化特性<sup>[82]</sup>。图1为多高斯关联结构光束在湍流大气中传输时的归一化光强分布演化图。我们发现多高斯关联结构光束随着传输距离的增加，光强分布逐渐由高斯分布演化成平顶分布。随着传输距离的进一步增大，大气湍流效应逐渐累积，破坏原有的平顶光强分布使其又退化为高斯分布。对比图1中不同线型的演化过程，我们发现多高斯关联结构光束在具备更大的光束阶数时，其在湍流大气中保持光强平顶分布的能力则越强。这意味着，调控多高斯关联结构光束相干结构(光束阶数)可增强其抗大气湍流能力。

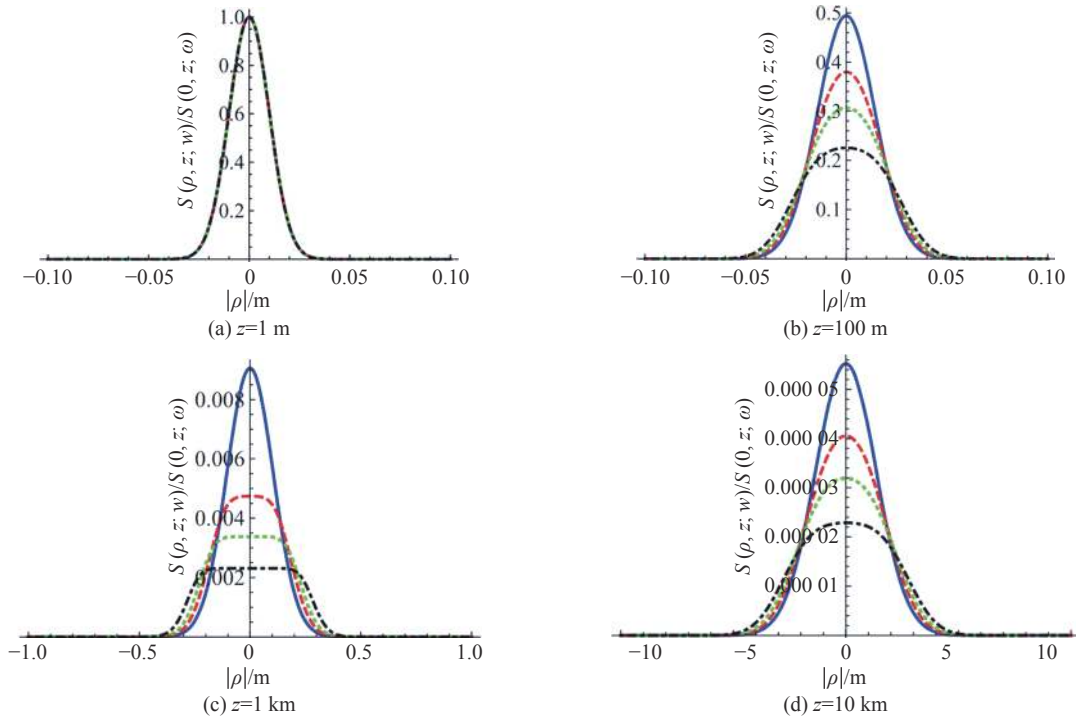


Fig. 1 Evolution of the spectral density of the multi-Gaussian Schell-model beams propagating in turbulent atmosphere (solid curve  $N=1$ , dashed curve  $N=4$ , dotted curve  $N=10$ , and dash-dotted curve  $N=40$ )<sup>[82]</sup>

图1 多高斯关联结构光束在湍流大气中的光强演化图(实线  $N=1$ , 虚线  $N=4$ , 点线  $N=10$ , 点划线  $N=40$ )<sup>[82]</sup>

2013年，Cai等人从光束质量因子的角度分析了多高斯关联结构光束在湍流大气中的抗湍流能力<sup>[37]</sup>。图2为多高斯关联结构光束在湍流大气中的归一化光束质量因子演化图，我们发现增大光束阶数或者降低相干性，可以减小多高斯关联结构光束在湍流大气中的质量因子，较小的光束质量因子代表着光束质量越好，发散角越小。因此，从光束质量因子演化角度，可以得到以下结论：调控光束相干结构(提高光束阶数或降低相干性)可以提高光束在湍流大气中的光束质量，增强光束的抗湍流能力。

### 3.1.2 厄米特殊关联结构光束

2015年，Chen等人提出了一种具有厄米形式关联结构的部分相干光，称之为厄米特殊关联结构光束<sup>[83]</sup>。该光

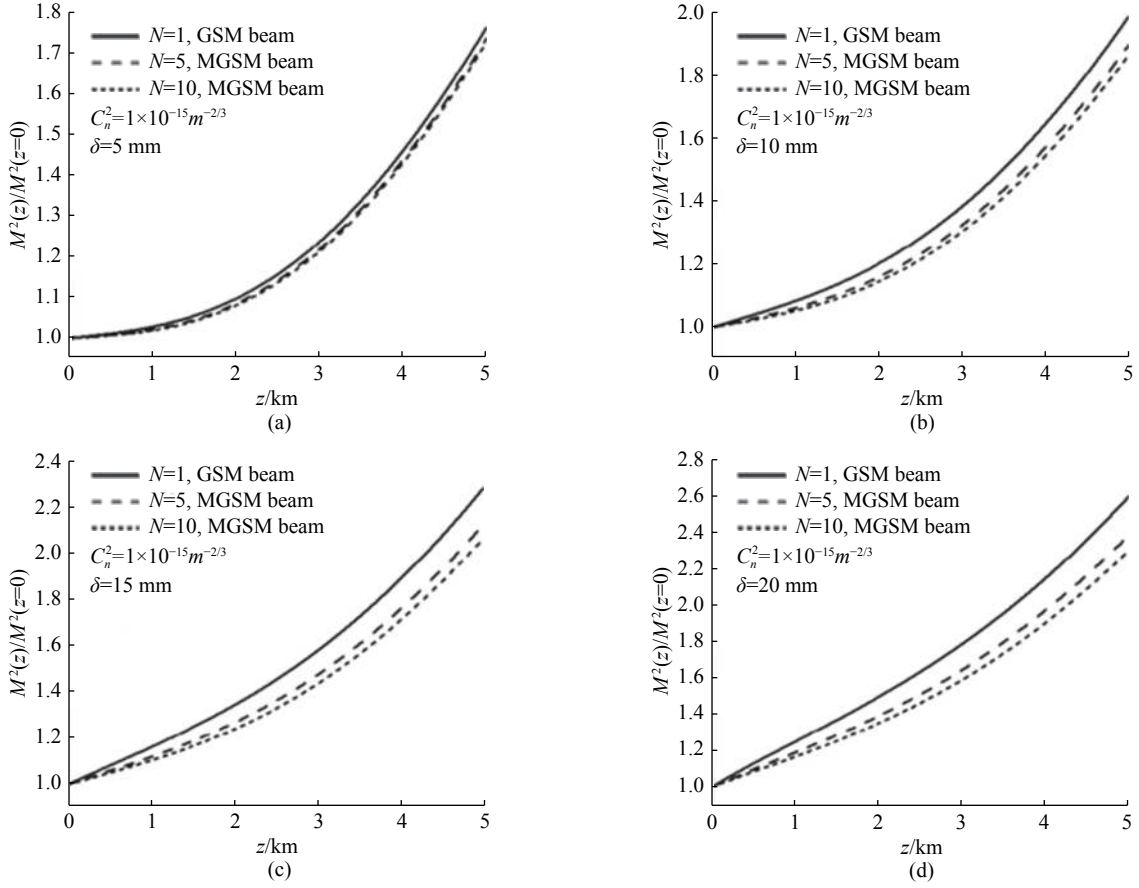

 Fig. 2 Normalized propagation factor of multi-Gaussian Schell-model beams propagating in turbulent atmosphere<sup>[37]</sup>

 图 2 多高斯关联结构光束在湍流大气中的归一化质量因子演化图<sup>[37]</sup>

束在自由空间中展现出光强自分裂传输特性,即在传输过程中光束由一个光斑演化为两个或四个光斑,这种自分裂现象对于攻击多个目标、俘获多个粒子和引导原子非常有用。同年, Yu 等人研究了厄米特殊关联结构光束在湍流大气中的传输特性<sup>[48]</sup>,分析了该光束的光强和光束质量因子的演化过程,讨论了调控厄米特殊关联结构光束关联结构对其抗湍流能力的影响。对于厄米特殊关联结构光束模型的构建,我们选取了以下  $p(\mathbf{v})$  和  $H(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  函数<sup>[83]</sup>

$$p(\mathbf{v}) = \left( \frac{v_x^2}{\omega_{0x}^2} \right)^m \left( \frac{v_y^2}{\omega_{0y}^2} \right)^n \exp \left[ -\frac{2v_x^2}{\omega_{0x}^2} - \frac{2v_y^2}{\omega_{0y}^2} \right] \quad (42)$$

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -\frac{i}{\lambda f} \exp \left( -\frac{\mathbf{r}^2}{4\sigma_0^2} \right) \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda f} (\mathbf{v}^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (43)$$

其中:  $\omega_{0x}(\omega_{0y})$  表示非相干源在  $x(y)$  方向上的束腰宽度,  $\lambda$  表示波长,  $f$  代表薄透镜焦距,  $\sigma_0$  表示生成光束的束腰宽度。据此,厄米特殊关联结构光束在光源面的交叉谱密度函数可以表示为

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G_0 \exp \left( -\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{4\sigma_0^2} \right) \mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (44)$$

其中:  $G_0$  是归一化常数,  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  表示相干度,表达式为

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{H_{2m}[(x_2 - x_1) / \sqrt{2}\delta_{0x}]}{H_{2m}(0)} \frac{H_{2n}[(y_2 - y_1) / \sqrt{2}\delta_{0y}]}{H_{2n}(0)} \exp \left[ -\frac{(x_2 - x_1)^2}{2\delta_{0x}^2} - \frac{(y_2 - y_1)^2}{2\delta_{0y}^2} \right] \quad (45)$$

式中:  $\delta_{0x}(\delta_{0y})$  表示光束在  $x(y)$  方向上的相干宽度,  $H_{2m}$  表示  $m$  阶的厄米多项式。

图 3 为厄米特殊关联结构光束在湍流大气中的光强演化和光强比值演化图。从图 3(a) 中我们可以直观地发现,该光束在湍流大气中展现出光强自分裂和自愈合的传输特性。在短距离传输过程中,光斑逐渐由一个分裂成为四个,这是由于在短距离的传输过程中,光束的自由空间衍射效应起主导作用,大气湍流影响较弱可以忽略;然而随着传输距离的增大,大气湍流效应逐渐累积占据主导地位,光强分布逐渐退化至高斯分布。在图 3(b) 中,我



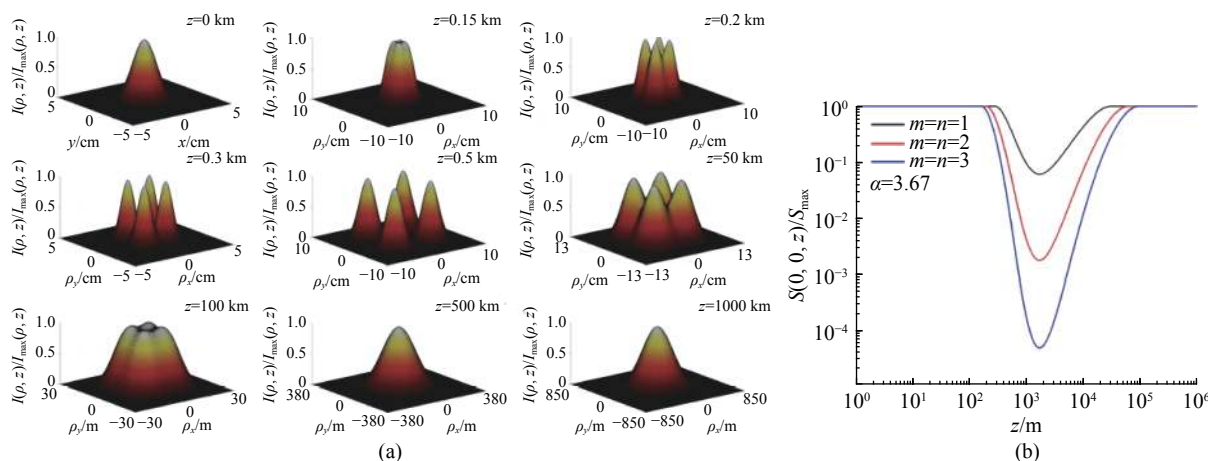


Fig. 3 3D-normalized spectral intensity distribution (a) and  $S(0,z)/S_{\max}(\rho,z)$  ratio of the spectral intensity (b) of Hermite-Gaussian correlated Schell-model beams on propagation in turbulent atmosphere<sup>[48]</sup>

图3 厄米特殊关联结构光束在湍流大气中的(a)三维归一化光强和(b)光强比值  $S(0,z)/S_{\max}(\rho,z)$  演化图<sup>[48]</sup>

我们还定量分析了光强演化的过程，横截面的光强比值(轴上光强/最大光强)可以反映光斑分裂过程。我们发现，随着传输距离的增大，光强比值由1逐渐减小后又逐渐恢复到了1。光强比值为1代表着中心光强即为光强最大点，这表明光束呈现一个光斑分布形式，还未分裂。光强比值小于1代表中心光强小于周围光强，这表明光斑已经分裂。对比图3(b)中的不同曲线，我们又可以发现，具有高阶的厄米特殊关联结构光束光强在湍流大气中分裂的更早、更彻底，并且需要更远的传输距离才会退化到高斯光斑。这也就意味着高阶厄米特殊关联结构光束可以更好的保持其自分裂的传输特性，具有更好的抗光强退高斯能力也就是抗湍流能力。图4为不同光束阶数的厄米特殊关联结构光束在湍流大气中的在x方向和y方向的光束质量因子演化图，从质量因子演化角度也可以发现，特殊关联结构光束在湍流大气中的光束质量要优于传统高斯光束，并且增大光束阶数可以进一步降低光束质量因子，进一步减少大气湍流的负面影响。

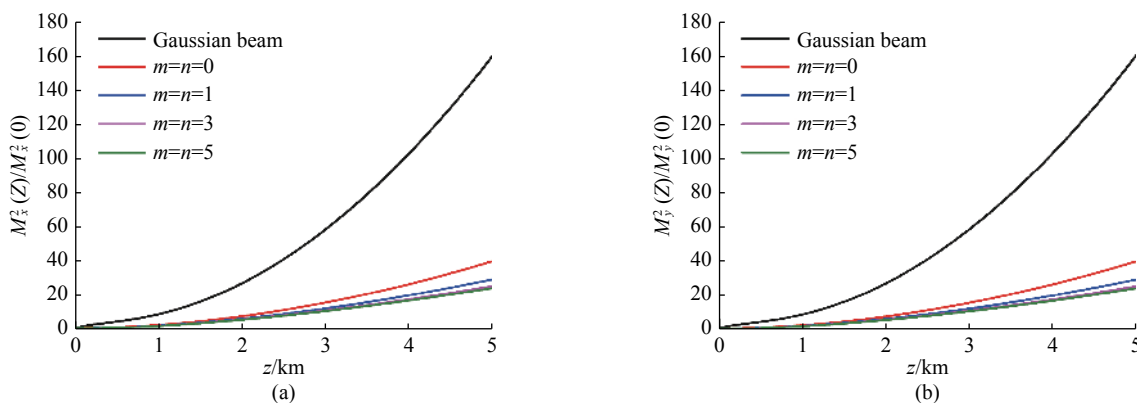


Fig. 4 Normalized propagation factors of Hermite-Gaussian correlated Schell-model beams in x direction (a) and y direction (b) in turbulent atmosphere<sup>[48]</sup>

图4 厄米特殊关联结构光束在湍流大气中(a)x方向和(b)y方向上归一化光束质量因子演化图<sup>[48]</sup>

2019年，Yu等人从理论和实验上继续研究了厄米特殊关联结构光束的光束漂移特性<sup>[61]</sup>。图5为该光束在湍流大气中光束漂移随光束阶数和相干性变化的理论和实验结果。我们发现高阶或者低相干性的厄米特殊关联结构光束具有较低的光束漂移值，但随着光束相干性的持续增加，光束漂移值会逐渐趋于稳定状态。从光束偏移角度我们得到了相同结论，即调控光束关联结构可以增强其抗大气湍流能力。

均匀关联结构部分相干光束的诸多优异传输特性引起了研究人员的广泛关注，那么如何在实验上产生此类光束是值得讨论的问题。Wang等人在2013年利用空间光调制器、旋转的毛玻璃、高斯滤波片等搭建了一种可以产生均匀关联结构光束的实验装置<sup>[84]</sup>。随后，在此基础上，具有不同均匀关联结构形式的部分相干光束逐一在实验中产生<sup>[61, 85-92]</sup>。2015年，Hyde等人提出了另一种产生均匀关联结构部分相干光束的方法，利用单个空间光调制器产生任意均匀关联结构光束的技术<sup>[93-94]</sup>，该技术使用单个空间光调制器实现振幅调制和相位调制，不再需要振幅

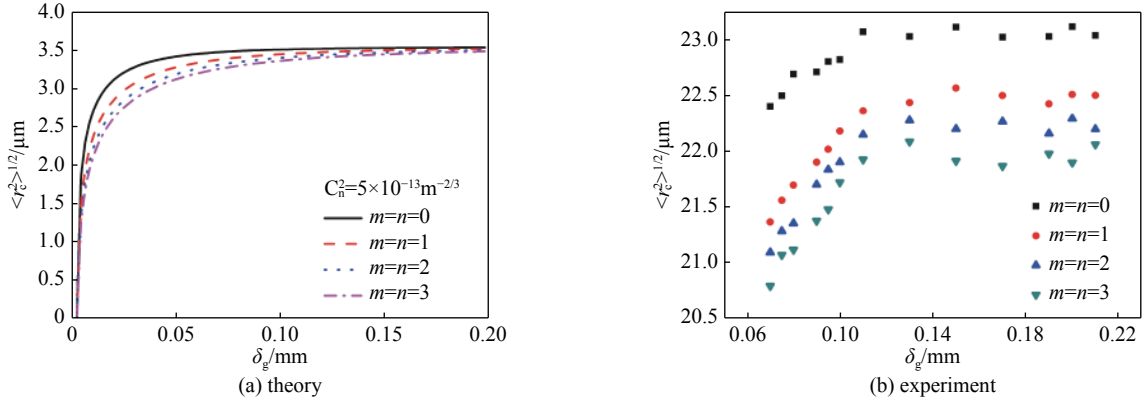


Fig. 5 Beam wander of Hermite-Gaussian correlated Schell-model beams in turbulent atmosphere in theory and experiment<sup>[61]</sup>

图 5 厄米特殊关联结构光束在湍流大气中的光束漂移理论和实验结果图<sup>[61]</sup>

滤波器, 简化了光学装置。

### 3.2 非均匀特殊关联结构光束的传输特性

#### 3.2.1 非均匀关联结构光束

2011年, Lajunen 和 Saastamoinen 在数学上首次构建了具有非均匀关联结构的部分相干光束<sup>[95]</sup>。根据非负正定条件, 选取以下  $p(v)$  和  $H(x, v)$  函数

$$p(v) = (\pi a^2)^{-1/2} \exp(-v^2/a^2) \quad (46)$$

$$H(x, v) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\omega_0^2}\right) \exp[-ik(x-x_0)^2 v] \quad (47)$$

构建得到非均匀关联结构光束, 其在光源面的交叉谱密度函数为

$$W(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\omega_0^2}\right) \exp\left\{-\frac{[(x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2]^2}{\omega_c^4}\right\} \quad (48)$$

其中:  $a$  是实数,  $\omega_0$  是光束束腰宽度,  $\omega_c = (2/ka)^{1/2}$  表示相干宽度,  $x_0$  代表偏移参数。虽然光束模型是在一维坐标上构建的, 模型较为简单, 但是这打破了固有思维, 开创性地构建了另一种类型的特殊关联结构光束。同时, 他们还研究了这类光束的自由空间传输特性, 发现非均匀关联结构光束展现出与均匀关联结构光束完全不同的传输特性, 它在传输过程中展现出光强自聚焦和自偏移特性, 如图 6 所示。

2012年, Tong 和 Korotkova 研究了非均匀关联结构光束在湍流大气中的传输特性<sup>[96]</sup>, 发现该光束在湍流大气中依然保持着光强自聚焦和自偏移的传输特性(图 7)。次年, Gu 和 Gbur 研究了非均匀关联结构光束在湍流大气中的光强闪烁特性<sup>[97]</sup>, 开创性地发现非均匀关联结构光束在合适的传输距离范围内, 不仅可以保持高光强的传输特性, 而且拥有较低的光强闪烁。这个传输特性弥补了均匀关联结构光束以牺牲光强强度来降低光强闪烁的劣势。

#### 3.2.2 厄米非均匀关联结构光束

在上述工作基础上, Yu 等人将非均匀关联结构光束进行拓展延伸<sup>[99]</sup>。从非负正定条件出发, 选取以下  $p(v)$  和  $H(r, v)$  函数构建具有厄米非均匀关联形式的部分相干光束

$$p(v) = (4\pi)^{-1/2} \left(\frac{2}{a}\right)^{2m+1} v^{2m} \exp\left(-\frac{v^2}{a^2}\right) \quad (49)$$

$$H(r, v) = \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right) \exp(-ikvr^2) \quad (50)$$

光源面的交叉谱密度函数可表示为

$$W(r_1, r_2) = \exp\left(-\frac{r_1^2 + r_2^2}{\omega_0^2}\right) \mu(r_1, r_2) \quad (51)$$

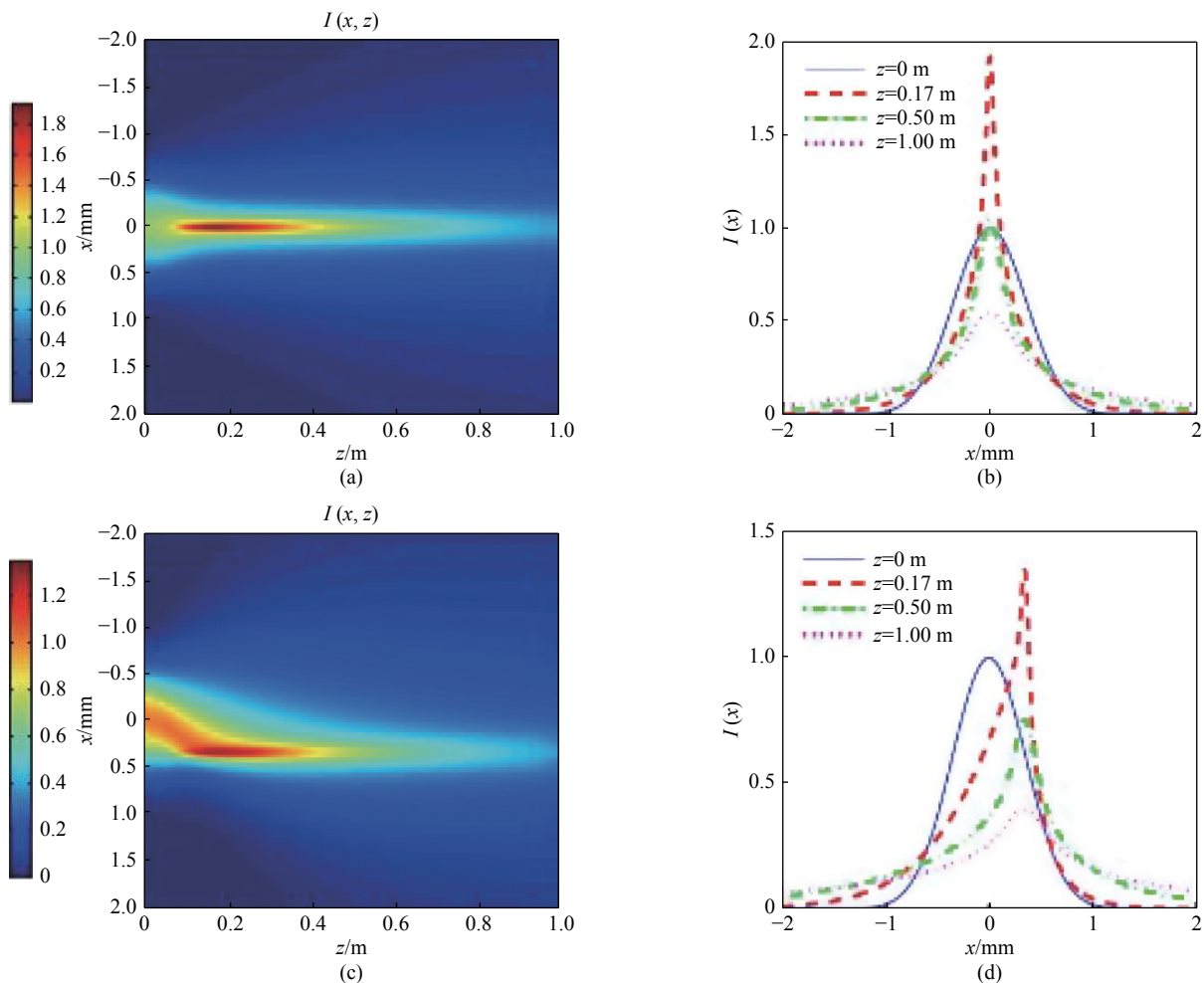


Fig. 6 Evolution of the spectral density of the non-uniformly correlated beams in free space<sup>[95]</sup>

图 6 非均匀关联结构光束在自由空间中的光强演化图<sup>[95]</sup>

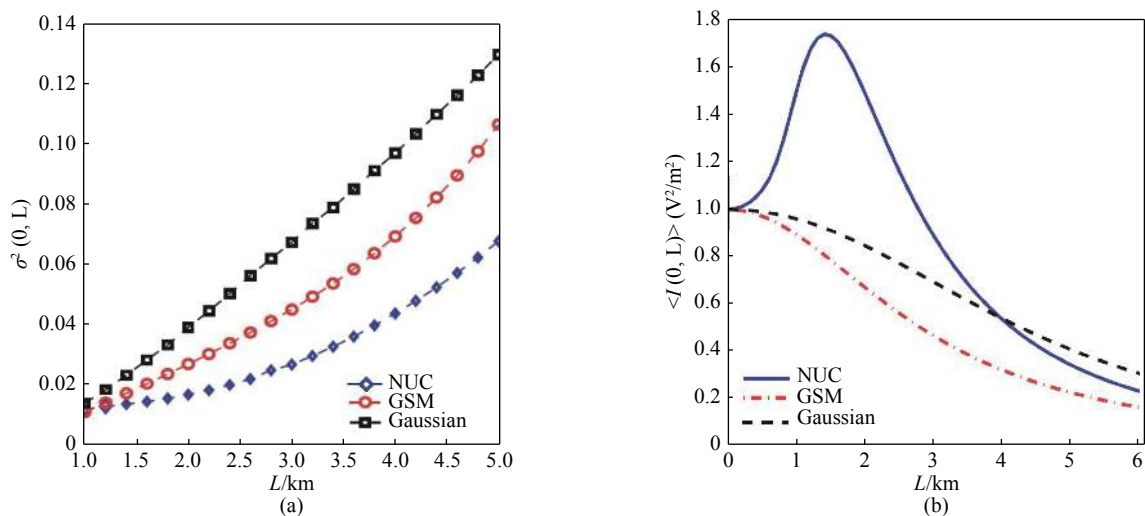


Fig. 7 Evolution of the (a) scintillation and (b) spectral density of non-uniformly correlated beams in turbulent atmosphere<sup>[96]</sup>

图 7 非均匀关联结构光束在湍流大气中的 (a) 光强闪烁和 (b) 光强演化图<sup>[96]</sup>

其中相干度 $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ 具有厄米多项式形式, 具体表达式为

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G_0 H_{2m} \left( \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_c^2} \right) \exp \left[ -\frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{r_c^4} \right] \quad (52)$$

式中:  $G_0$  是归一化常数,  $r_c$  表示相干宽度。

图 8 为厄米非均匀关联结构光束在湍流大气中的光强演化图,我们发现光束在传输过程中,光斑尺寸随着传输距离的增大出现变小的现象,从光斑尺寸的演化我们可以直观地判断出厄米非均匀关联结构光束具有光强自聚焦传输特性。随后,我们定量分析了厄米非均匀关联结构光束在湍流大气中的轴上光强演化过程。如图 9(a)–(c)所示,该光束的轴上光强随着传输距离的增大先增大后减小,并且我们发现,调控厄米非均匀关联结构光束的光束阶数可以调控它的自聚焦能力,光束阶数越高自聚焦能力越强;调控厄米非均匀关联结构光束的相干性可以调控自聚焦“焦点”在传输方向上的位置,即:自聚焦区间。图 9(d)–(f)为厄米非均匀关联结构光束在湍流大气中

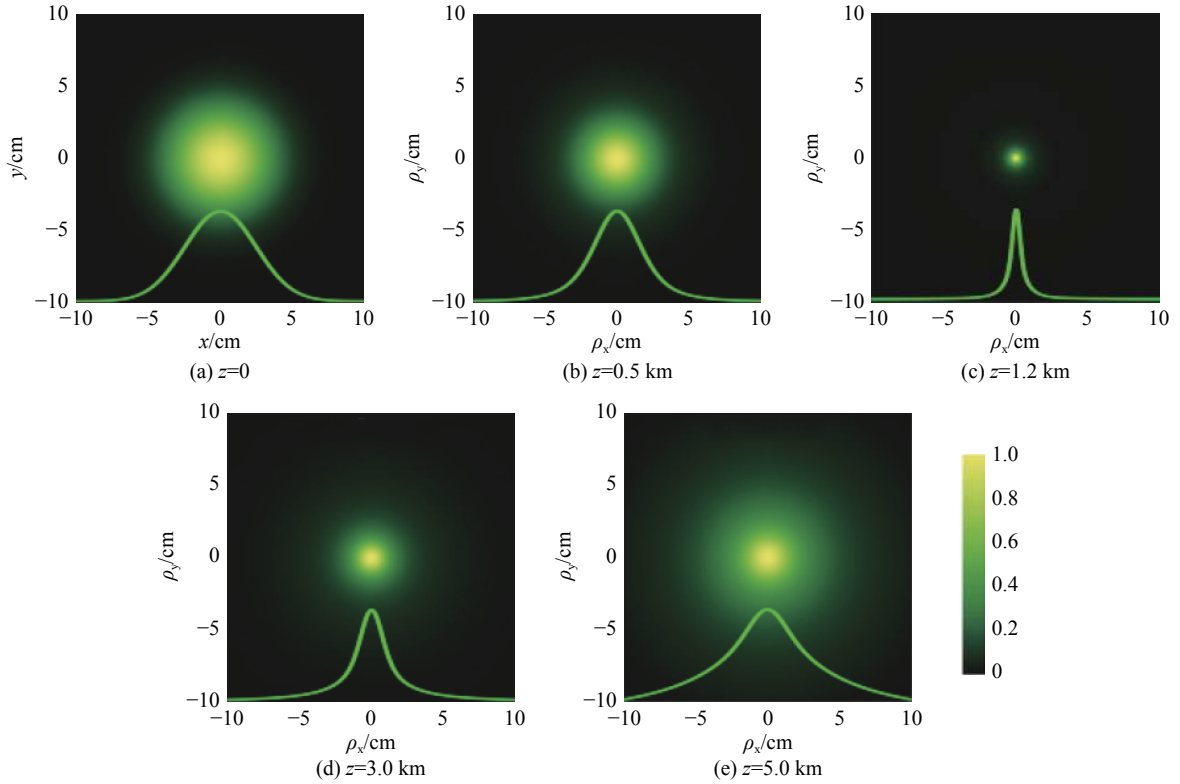


Fig. 8 Evolution of the spectral density of the Hermite non-uniformly correlated beams in turbulent atmosphere<sup>[59]</sup>

图 8 厄米非均匀关联结构光束在湍流大气中的光强演化图<sup>[59]</sup>

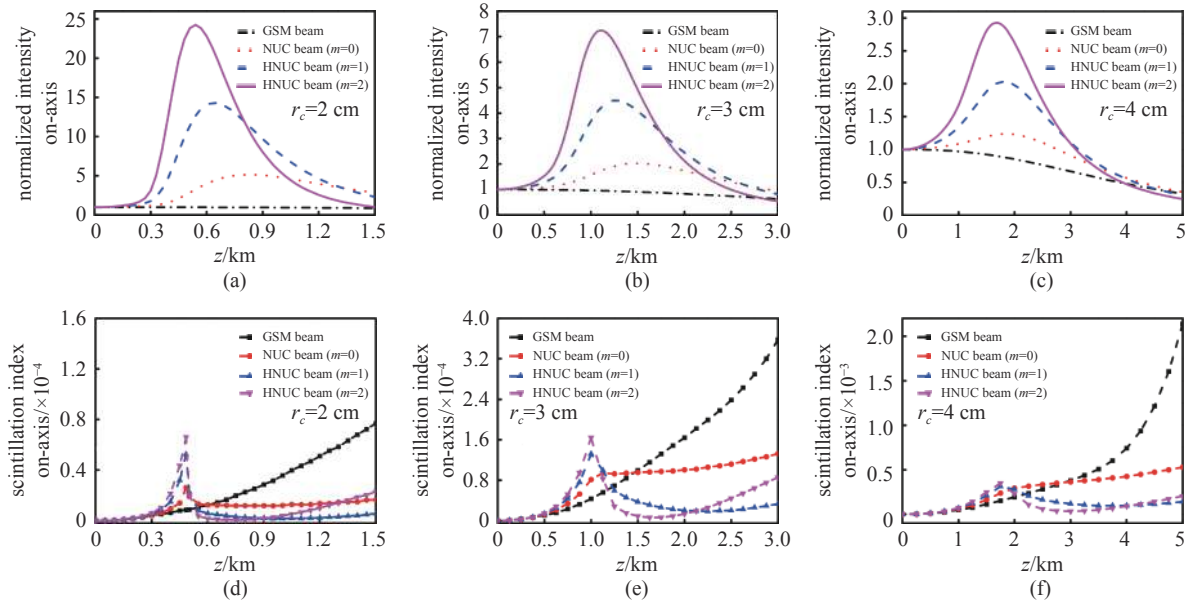


Fig. 9 Normalized intensity on-axis (a)~(c) and scintillation on-axis (d)~(f) of Hermite non-uniformly correlated beams in turbulent atmosphere<sup>[59]</sup>

图 9 厄米非均匀关联结构光束在湍流大气中的轴上(a)~(c)光强和光强闪烁(d)~(f)演化图<sup>[59]</sup>

的轴上光强闪烁演化图,我们发现,在有效传输区间范围内,厄米非均匀关联结构光束表现出较低的光强闪烁值,并且提高光束阶数可以进一步降低光强闪烁值。结合图 9(a)–(c),我们得到以下结论,厄米非均匀关联结构光束在湍流大气中,不仅可以提高轴上光强强度,同时可以降低光强闪烁。更有意义的是,调控光束阶数和相干性可以调控其自聚焦能力和有效区间范围。

### 3.2.3 厄米非均匀关联结构阵列光束

2020 年,厄米非均匀关联结构光束被拓展至阵列分布形式特殊关联结构光束<sup>[67]</sup>,即:厄米非均匀关联结构阵列光束,并同时研究了其在湍流大气中的传输特性。我们选取以下形式的  $p(\mathbf{v})$  和  $H(\mathbf{r},\mathbf{v})$  函数来构建厄米非均匀关联结构阵列光束模型

$$p(\mathbf{v}) = (a^2\pi)^{-1} \left( \frac{4v_x v_y}{a^2} \right)^{2m} \exp \left[ -\frac{(v_x^2 + v_y^2)}{a^2} \right] \quad (53)$$

$$H(\mathbf{r},\mathbf{v}) = \exp \left( -\frac{r^2}{\omega_0^2} \right) \sum_{M=-p}^p \sum_{N=-q}^q \exp [ik\mathfrak{R}(\mathbf{r},M,N) \cdot \mathbf{v}] \quad (54)$$

其中

$$\mathfrak{R}(\mathbf{r},M,N) = (x - Mx_0)^2 \mathbf{i} + (y - Ny_0)^2 \mathbf{j} \quad (55)$$

式中:  $a$  是正常数,  $m$  是光束阶数,  $p$  和  $q$  分别  $x$  和  $y$  方向的阵列参数,  $x_0$  和  $y_0$  分别是  $x$  和  $y$  方向的偏移参数。通过非负正定条件积分式,构建得到厄米非均匀关联结构阵列光束在光源面的交叉谱密度函数

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{M=-p}^p \sum_{N=-q}^q G_0^2 \exp \left( -\frac{r_1^2 + r_2^2}{\omega_0^2} \right) \exp \left[ -\frac{(X^2 - Y^2)}{r_c^4} \right] H_{2m} \left( \frac{X}{r_c} \right) H_{2m} \left( \frac{Y}{r_c} \right) \quad (56)$$

式中:  $G_0$  是归一化常数,  $X = (x_1 - Mx_0)^2 - (x_2 - Mx_0)^2$ ,  $Y = (y_1 - Ny_0)^2 - (y_2 - Ny_0)^2$ 。

图 10 是厄米非均匀关联结构阵列光束在湍流大气中的光强分布演化图。从图 10 可以直观地看出,厄米非均匀关联结构阵列光束在源平面均呈现高斯分布,在传输过程中由于展现多自聚焦点传输特性逐渐演化为矩形阵列分布。随着传输距离的增加,大气湍流影响的累积,厄米非均匀关联结构阵列光束的光强分布逐渐退化回高斯分布形式。根据图 10 对比发现,具有较大偏移参数、光束阶数、阵列参数和较低相干性的厄米非均匀关联结构阵列光束的光强退高斯速度越慢,从光强的退高斯角度表明其具有更好的抗湍流能力。

### 3.2.4 矢量厄米非均匀关联结构光束

2020 年,厄米非均匀关联结构光束被拓展到矢量场, Yu 等人提出了一套构建矢量非均匀关联结构光束的普适方法<sup>[98]</sup>,举例构建了径向偏振厄米非均匀关联结构光束,并研究了其自由空间传输特性。选取以下  $p_{\alpha\beta}(\mathbf{v})$  和  $H_{\alpha(\beta)}(\mathbf{r},\mathbf{v})$  函数

$$p_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = B_{\alpha\beta} (2v/a_{\alpha\beta})^{2m} \exp(-v^2/a_{\alpha\beta}^2) / (\sqrt{\pi} a_{\alpha\beta}) \quad (57)$$

$$H_{\alpha(\beta)}(\mathbf{r},\mathbf{v}) = \frac{\alpha(\beta)}{2\omega_0} \exp \left( -\frac{r^2}{4\omega_0^2} \right) \exp(-ikv r^2) \quad (58)$$

因此,径向偏振厄米非均匀关联结构光束的交叉谱密度矩阵的矩阵元表达式为

$$W_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\alpha_1 \beta_2}{4\omega_0^2} \exp \left( -\frac{r_1^2 + r_2^2}{4\omega_0^2} \right) \mu_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), (\alpha, \beta = x, y) \quad (59)$$

其中,

$$\mu_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G_0 \exp \left[ -\frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{r_c^4} \right] H_{2m} \left( \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_c} \right) \quad (60)$$

图 11 是径向偏振厄米非均匀关联结构光束在自由空间传输时的横截面光强比值(轴上光强/最大光强)和特定点(0.05 mm, 0.05 mm)上的偏振度演化图。从图 11(a)可以发现传统径向偏振部分相干光束(均匀关联)在光源面是呈现中空光强分布形式(中心点光强为 0),随着传输距离的增大,空心光强分布立马演化到了实心光强分布(中心光强为 1)。有意思的现象是,具有非均匀关联结构的径向偏振部分相干光束,即径向偏振厄米非均匀关联结构光束始终保持中心光强为 0,即:在自由空间中始终保持空心光强分布的特点。从光强演化可以猜想传统径向偏振

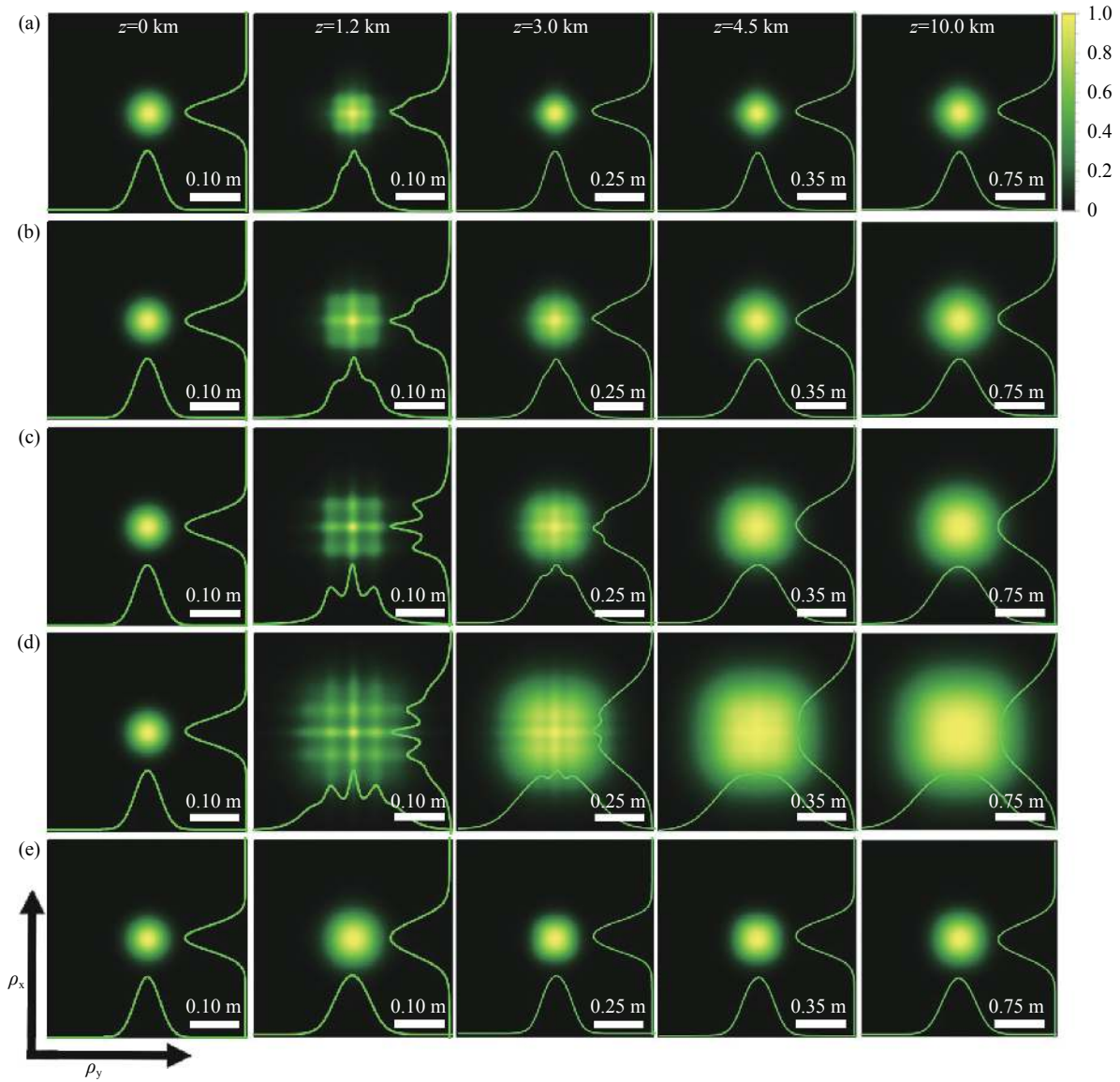


Fig. 10 Evolution of spectral intensity of Hermite non-uniformly correlated array beams with (a)  $m = 1, p = q = 1, r_c = 3 \text{ cm}, x_0 = y_0 = 3 \text{ cm}$ ; (b)  $m = 1, p = q = 1, r_c = 3 \text{ cm}, x_0 = y_0 = 5 \text{ cm}$ ; (c)  $m = 2, p = q = 1, r_c = 3 \text{ cm}, x_0 = y_0 = 5 \text{ cm}$ ; (d)  $m = 2, p = q = 2, r_c = 3 \text{ cm}, x_0 = y_0 = 5 \text{ cm}$ ; (e)  $m = 2, p = q = 2, r_c = 5 \text{ cm}, x_0 = y_0 = 5 \text{ cm}$  in turbulent atmosphere<sup>[67]</sup>

图 10 厄米非均匀关联结构阵列光束在湍流大气中光强演化图 (a)  $m = 1, p = q = 1, r_c = 3 \text{ cm}, x_0 = y_0 = 3 \text{ cm}$ ; (b)  $m = 1, p = q = 1, r_c = 3 \text{ cm}, x_0 = y_0 = 5 \text{ cm}$ ; (c)  $m = 2, p = q = 1, r_c = 3 \text{ cm}, x_0 = y_0 = 5 \text{ cm}$ ; (d)  $m = 2, p = q = 2, r_c = 3 \text{ cm}, x_0 = y_0 = 5 \text{ cm}$ ; (e)  $m = 2, p = q = 2, r_c = 5 \text{ cm}, x_0 = y_0 = 5 \text{ cm}$ <sup>[67]</sup>

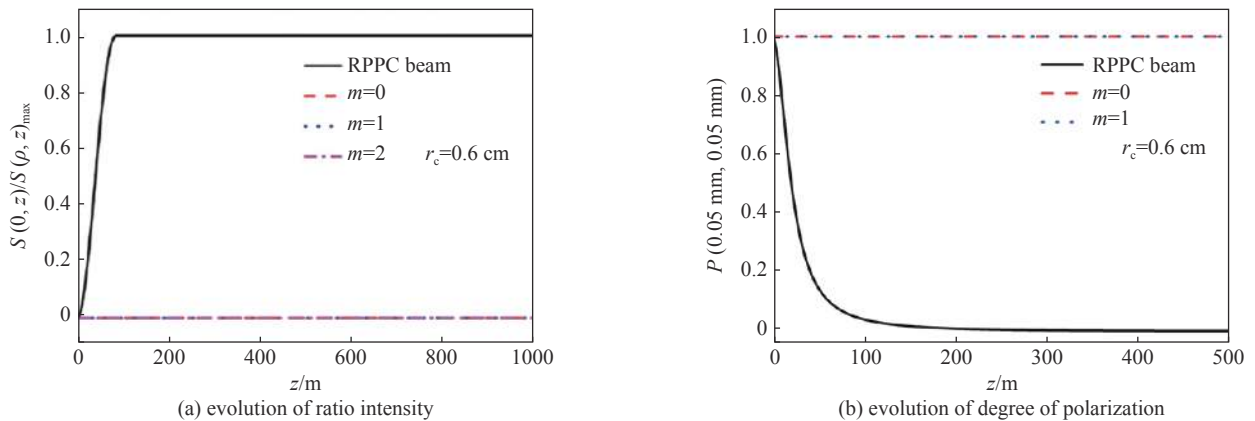


Fig. 11 Evolution of ratio intensity and degree of polarization of radially polarized Hermite non-uniform correlation beams in free space<sup>[98]</sup>

图 11 径向偏振厄米非均匀关联结构光束在自由空间中的光强比值和偏振度演化图<sup>[98]</sup>

部分相干光束存在自身退偏振现象，而传统径向偏振部分相干光束无退偏振现象。基于这个猜想，我们绘制了图 11(b) 发现，确实传统径向偏振部分相干光束在特定点上的偏振度会随着传输距离的增大迅速减小，而传统径向偏振部分相干光束的偏振度则始终保持完全偏振状态。远场保持空心光强分布和无退偏振能力是矢量非均匀关联结构光束的特有传输特性。

同年，Lin 等人从理论上研究了径向偏振厄米非均匀关联结构光束的大气传输特性，并着重分析该光束在湍流大气中的光强演化和偏振演化<sup>[66]</sup>。图 12 是径向偏振厄米非均匀关联结构光束和传统径向偏振部分相干光束的光强演化对比图。我们发现，传统径向偏振部分相干光束在短距离内光强由空心分布迅速退化为高斯分布，这个过程包含传统径向偏振部分相干光束自由空间衍射效应和大气湍流引起的退高斯效应，这间接表明传统径向偏振部分相干光束的径向偏振结构在传输过程中快速丢失。由图 12(b) 和 (c) 可知，径向偏振厄米非均匀关联结构光束在传输过程中以一种特殊的方式演化，在短距离传输过程中，光强中心逐渐演化出一个细小的空心圆环，随着传输距离的增大，这个细小的空心圆环逐渐演化成大圆环。随着传输距离的进一步增大，大气湍流效应的进一步累积，径向偏振厄米非均匀关联结构光束的光强分布逐渐退化为高斯分布。然而，具有高光束阶数的径向偏振厄米非均匀关联结构光束可以在远距离依然保持着光强空心分布的状态，虽然在逐渐退化成高斯分布，但是退化速度缓慢。

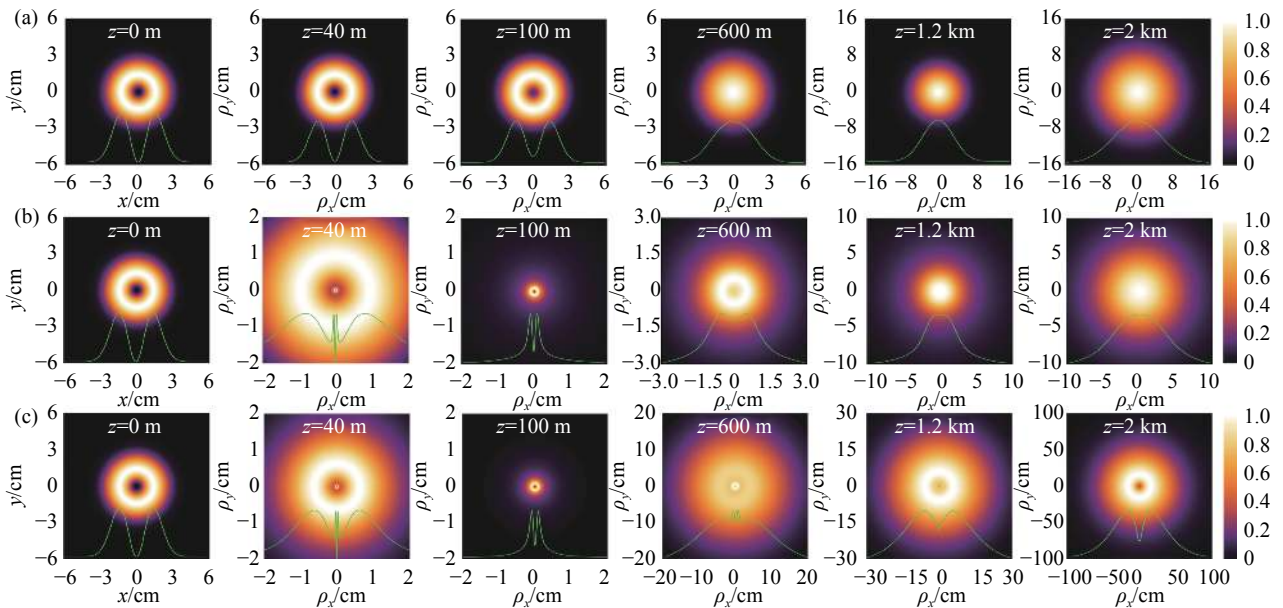


Fig. 12 Evolution of spectral intensity of (a) conventional radially polarized partially coherent beams and radially polarized Hermite non-uniform correlation beams with different mode orders (b)  $m=0$  (c)  $m=1$  in turbulent atmosphere<sup>[66]</sup>

图 12 (a) 传统径向偏振部分相干光束和径向偏振厄米非均匀关联结构光束不同光束阶数 (b)  $m=0$ , (c)  $m=1$  的在湍流大气中的强度演化图<sup>[66]</sup>

图 13 定量分析了径向偏振厄米非均匀关联结构光束光强演化过程，我们可以清晰的看到径向偏振厄米非均匀关联结构光束可以超远距离的保持空心光强分布状态，并且随着光束阶数的增大和相干性的降低，光束保持空

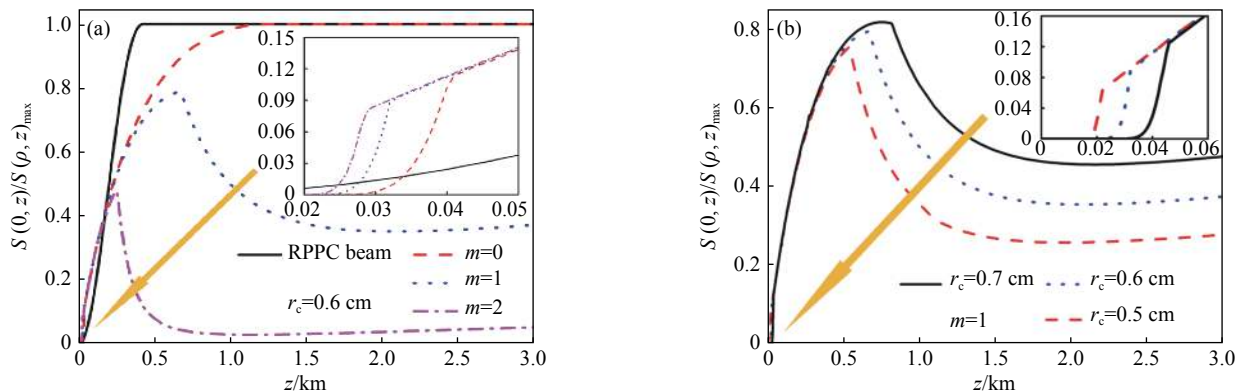


Fig. 13 Ratio of the spectral intensity of radially polarized Hermite non-uniform correlation beam in turbulence atmosphere<sup>[66]</sup>

图 13 径向偏振厄米非均匀关联结构光束在湍流大气中的光强比值演化图<sup>[66]</sup>

心的能力也随之增强。这表明高阶和低相干的径向偏振厄米非均匀关联结构光束的光强退高斯速度更慢,说明其抗湍流能力越强。

图 14 为在湍流大气中径向偏振厄米非均匀关联结构光束完全偏振部分的归一化强度演化分布。我们发现该光束的偏振部分光强在传输过程中存在先减小后增大再减小的过程,这表明径向偏振厄米非均匀关联结构光束的偏振性质在湍流大气中具有自修复能力。并且,我们还发现调控径向偏振厄米非均匀关联结构光束的光束阶数和相干性可以调控其完全偏振部分光强强度,高阶和低相干性的径向偏振厄米非均匀关联结构光束的完全偏振部分光强强度占比越高,抗退偏振能力越强。从这一角度,我们可以得出结论:高阶和低相干性的径向偏振厄米非均匀关联结构光束具有更优秀的抗湍流能力。

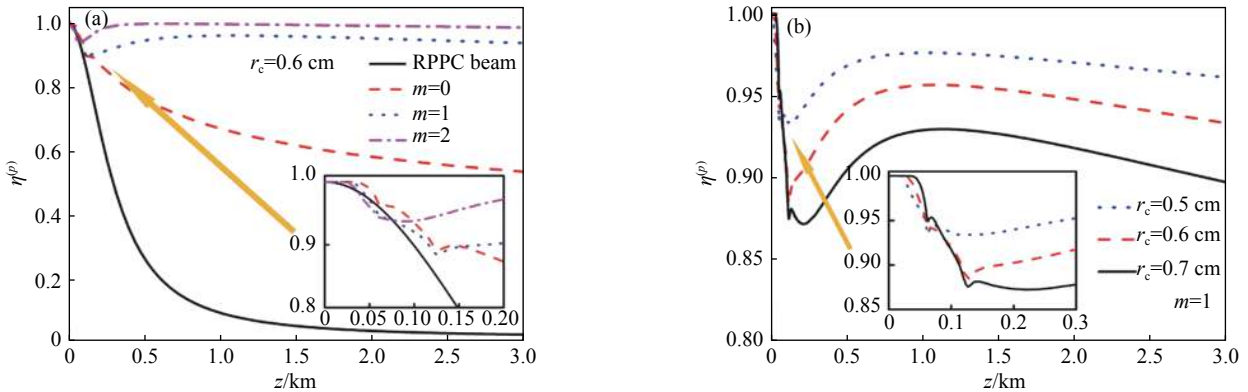


Fig. 14 Percentage of intensity of the completely polarized portion of radially polarized Hermite non-uniform correlation beam in turbulence atmosphere<sup>[66]</sup>

图 14 径向偏振厄米非均匀关联结构光束完全偏振部分光强强度占比在湍流大气中演化图<sup>[66]</sup>

对于非均匀关联结构部分相干光束的实验产生,Hyde 等人在 2016 年提出了一种仅使用空间光调制器产生矢量非均匀关联结构光束的光学系统<sup>[99]</sup>,但是该光学系统具有空间光调制器刷新速率慢以及所使用的空间光调制器很难同步等局限性。次年,Hyde 等人利用空间光调制器和可变形镜实现了非均匀关联结构光束的近实时合成<sup>[100]</sup>。2021 年,Zhu 等提出了一种稳定灵活的方法来产生非均匀关联结构光束<sup>[101]</sup>,该系统只需要数字微镜器件和朗奇光栅,实现了标量和矢量非均匀关联结构光束近实时生成和精确控制。

## 4 结 论

本文回顾了特殊关联结构光束的构建基础理论和大气传输研究方法和近些年的典型研究成果。根据不同的关联结构类型,将特殊关联结构光束分为均匀关联结构光束和非均匀关联结构光束,并分别介绍了几种典型光束模型,分析了其在大气湍流中的传输特性。与传统部分相干光束相比,特殊关联结构光束在湍流大气中传输既展现出奇特的传输特性,又能进一步降低大气湍流引起的光强分布退化、光束漂移、光强闪烁和退偏振等负面效应。但是,诸多研究成果仅停留在分析不同关联结构调控引发的负面效应抑制能力,对将信息加载至特殊关联结构光束并进行信息传输的研究甚少。因此,基于特殊关联结构调控技术的信息加载以及信息传输是未来该领域研究方向和趋势。

## 参考文献:

- [1] Baumgartl J, Mazilu M, Dholakia K. Optically mediated particle clearing using Airy wavepackets[J]. *Nature Photonics*, 2008, 2(11): 675-678.
- [2] Garcés-Chávez V, McGloin D, Melville H, et al. Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam[J]. *Nature*, 2002, 419(6903): 145-147.
- [3] Lavery M P J, Speirits F C, Barnett S M, et al. Detection of a spinning object using light's orbital angular momentum[J]. *Science*, 2013, 341(6145): 537-540.
- [4] Qiao Zhen, Wan Zhenyu, Xie Guoqiang, et al. Multi-vortex laser enabling spatial and temporal encoding[J]. *PhotonIX*, 2020, 1: 13.
- [5] Andrews L C, Phillips R L. Laser beam propagation through random media[M]. 2nd ed. Bellingham: SPIE Press, 2005.
- [6] Wolf E. Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams[J]. *Physics Letters A*, 2003, 312(5/6): 263-267.
- [7] Wolf E. Introduction to the theory of coherence and polarization of light[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [8] Gbur G J. Singular optics[M]. Florida: CRC Press, 2016.
- [9] Korotkova O. Random light beams: theory and applications[M]. Florida: CRC Press, 2013.
- [10] Mandel L, Wolf E. Optical coherence and quantum optics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.



- [11] Cai Yangjian, Chen Yahong, Yu Jiayi, et al. Chapter three—generation of partially coherent beams[J]. *Progress in Optics*, 2017, 62: 157-223.
- [12] Mitchell M, Chen Zhigang, Shih M F, et al. Self-trapping of partially spatially incoherent light[J]. *Physical Review Letters*, 1996, 77(3): 490-493.
- [13] Akhmediev N, Królikowski W, Snyder A W. Partially coherent solitons of variable shape[J]. *Physical Review Letters*, 1998, 81(21): 4632-4635.
- [14] Paganin D, Nugent K A. Noninterferometric phase imaging with partially coherent light[J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(12): 2586-2589.
- [15] Clark J N, Huang X, Harder R, et al. High-resolution three-dimensional partially coherent diffraction imaging[J]. *Nature Communications*, 2012, 3: 993.
- [16] Zhang Jingfang, Wang Zhaoying, Cheng Bing, et al. Atom cooling by partially spatially coherent lasers[J]. *Physical Review A*, 2013, 88: 023416.
- [17] Zhu Shijun, Wang Jing, Liu Xianlong, et al. Generation of arbitrary radially polarized array beams by manipulating correlation structure[J]. *Applied Physics Letters*, 2016, 109: 161904.
- [18] Chen Yahong, Ponomarenko S A, Cai Yangjian. Experimental generation of optical coherence lattices[J]. *Applied Physics Letters*, 2016, 109: 061107.
- [19] Liang Chunhao, Wu Gaofeng, Wang Fei, et al. Overcoming the classical Rayleigh diffraction limit by controlling two-point correlations of partially coherent light sources[J]. *Optics Express*, 2017, 25(23): 28352-28362.
- [20] Lu Xingyuan, Shao Yifeng, Zhao Chengliang, et al. Noniterative spatially partially coherent diffractive imaging using pinhole array mask[J]. *Advanced Photonics*, 2019, 1: 016005.
- [21] Chen Yahong, Norrman A, Ponomarenko S A, et al. Chapter five—optical coherence and electromagnetic surface waves[J]. *Progress in Optics*, 2020, 65: 105-172.
- [22] Peng Deming, Huang Zhaofeng, Liu Yonglei, et al. Optical coherence encryption with structured random light[J]. *PhotonIX*, 2021, 2: 6.
- [23] Lin Rong, Chen Mengyu, Liu Yonglei, et al. Measuring refractive indices of a uniaxial crystal by structured light with non-uniform correlation[J]. *Optics Letters*, 2021, 46(10): 2268-2271.
- [24] Korotkova O, Gbur G. Chapter four—applications of optical coherence theory[J]. *Progress in Optics*, 2020, 65: 43-104.
- [25] Gbur G. Partially coherent beam propagation in atmospheric turbulence[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2014, 31(9): 2038-2045.
- [26] Wang Fei, Liu Xianlong, Cai Yangjian. Propagation of partially coherent beam in turbulent atmosphere: a review[J]. *Progress in Electromagnetics Research*, 2015, 150: 123-143.
- [27] 王飞, 余佳益, 刘显龙, 等. 部分相干光束经过湍流大气传输研究进展[J]. *物理学报*, 2018, 67: 184203. (Wang Fei, Yu Jiayi, Liu Xianlong, et al. Research progress of partially coherent beams propagation in turbulent atmosphere[J]. *Acta Physica Sinica*, 2018, 67: 184203)
- [28] Gbur G, Wolf E. Spreading of partially coherent beams in random media[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2002, 19(8): 1592-1598.
- [29] Shirai T, Dogariu A, Wolf E. Mode analysis of spreading of partially coherent beams propagating through atmospheric turbulence[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2003, 20(6): 1094-1102.
- [30] Dogariu A, Amarande S. Propagation of partially coherent beams: turbulence-induced degradation[J]. *Optics Letters*, 2003, 28(1): 10-12.
- [31] Ricklin J C, Davidson F M. Atmospheric optical communication with a Gaussian Schell beam[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2003, 20(5): 856-866.
- [32] Dan Youquan, Zhang Bin. Beam propagation factor of partially coherent flat-topped beams in a turbulent atmosphere[J]. *Optics Express*, 2008, 16(20): 15563-15575.
- [33] Dan Youquan, Zhang Bin. Second moments of partially coherent beams in atmospheric turbulence[J]. *Optics Letters*, 2009, 34(5): 563-565.
- [34] Gu Yalong, Gbur G. Scintillation of pseudo-Bessel correlated beams in atmospheric turbulence[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2010, 27(12): 2621-2629.
- [35] Cang Ji, Fang Xu, Liu Xu. Propagation properties of multi-Gaussian Schell-model beams through ABCD optical systems and in atmospheric turbulence[J]. *Optics & Laser Technology*, 2013, 50: 65-70.
- [36] Du Shengcai, Yuan Yangsheng, Liang Chunhao, et al. Second-order moments of a multi-Gaussian Schell-model beam in a turbulent atmosphere[J]. *Optics & Laser Technology*, 2013, 50: 14-19.
- [37] Yuan Yangsheng, Liu Xianlong, Wang Fei, et al. Scintillation index of a multi-Gaussian Schell-model beam in turbulent atmosphere[J]. *Optics Communications*, 2013, 305: 57-65.
- [38] Korotkova O, Avramov-Zamurovic S, Nelson C, et al. Scintillation reduction in multi-Gaussian Schell-model beams propagating in atmospheric turbulence[C]//*Proceedings of SPIE 9224 Laser Communication and Propagation through the Atmosphere and Oceans III*. 2014: 92240M.
- [39] Sharifi M, Wu Guohua, Luo Bin, et al. Beam wander of electromagnetic partially coherent flat-topped beam propagating in turbulent atmosphere[J]. *Optik*, 2014, 125(1): 561-564.
- [40] Korotkova O, Shchepakina E. Rectangular multi-Gaussian Schell-model beams in atmospheric turbulence[J]. *Journal of Optics*, 2014, 16: 045704.
- [41] Wu Guohua, Zhou He, Zhao Tonggang, et al. Propagation properties of electromagnetic multi-Gaussian Schell model beams propagating through atmospheric turbulence[J]. *Journal of the Korean Physical Society*, 2014, 64(6): 826-831.
- [42] Mei Zhangrong, Shchepakina E, Korotkova O. Propagation of cosine-Gaussian-correlated Schell-model beams in atmospheric turbulence[J]. *Optics Express*, 2013, 21(15): 17512-17519.
- [43] Mei Zhangrong, Korotkova O. Electromagnetic cosine-Gaussian Schell-model beams in free space and atmospheric turbulence[J]. *Optics Express*, 2013, 21(22): 27246-27259.
- [44] Xu Huafeng, Zhang Zhou, Qu Jun, et al. Propagation factors of cosine-Gaussian-correlated Schell-model beams in non-Kolmogorov turbulence[J]. *Optics*

- [Express](#), 2014, 22(19): 22479-22489.
- [45] Cang Ji, Xiu Peng, Liu Xu. Propagation of Laguerre–Gaussian and Bessel–Gaussian Schell-model beams through paraxial optical systems in turbulent atmosphere[J]. *Optics & Laser Technology*, 2013, 54: 35-41.
- [46] Wang Haiyan, Wang Hailin, Xu Yongxiang, et al. Intensity and polarization properties of the partially coherent Laguerre–Gaussian vector beams with vortices propagating through turbulent atmosphere[J]. *Optics & Laser Technology*, 2014, 56: 1-6.
- [47] Chen Rong, Liu Lin, Zhu Shijun, et al. Statistical properties of a Laguerre-Gaussian Schell-model beam in turbulent atmosphere[J]. [Optics Express](#), 2014, 22(2): 1871-1883.
- [48] Yu Jiayi, Chen Yahong, Liu Lin, et al. Splitting and combining properties of an elegant Hermite-Gaussian correlated Schell-model beam in Kolmogorov and non-Kolmogorov turbulence[J]. [Optics Express](#), 2015, 23(10): 13467-13481.
- [49] Zhou Yuan, Yuan Yangsheng, Qu Jun, et al. Propagation properties of Laguerre-Gaussian correlated Schell-model beam in non-Kolmogorov turbulence[J]. [Optics Express](#), 2016, 24(10): 10682-10693.
- [50] 余佳益, 陈亚红, 蔡阳健. 非均匀拉盖尔-高斯关联光束及其传输特性[J]. *物理学报*, 2016, 65: 214202. (Yu Jiayi, Chen Yahong, Cai Yangjian. Nonuniform Laguerre-Gaussian correlated beam and its propagation properties[J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, 65: 214202)
- [51] Liu Xianlong, Yu Jiayi, Cai Yangjian, et al. Propagation of optical coherence lattices in the turbulent atmosphere[J]. [Optics Letters](#), 2016, 41(18): 4182-4185.
- [52] Peng Xiaofeng, Liu Lin, Yu Jiayi, et al. Propagation of a radially polarized twisted Gaussian Schell-model beam in turbulent atmosphere[J]. *Journal of Optics*, 2016, 18: 125601.
- [53] Xu Yonggen, Dan Youquan, Yu Jiayi, et al. Propagation properties of partially coherent dark hollow beam in inhomogeneous atmospheric turbulence[J]. [Journal of Modern Optics](#), 2016, 63(21): 2186-2197.
- [54] Song Zhenzhen, Liu Zhengjun, Zhou Keya, et al. Propagation factors of multi-sinc Schell-model beams in non-Kolmogorov turbulence[J]. [Optics Express](#), 2016, 24(2): 1804-1813.
- [55] Li Jinhong, Suo Qiangbo, Chen Linying. Analysis to beam quality of partially coherent flat-topped vortex beams propagating through atmospheric turbulence[J]. *Optik*, 2016, 127(23): 11342-11348.
- [56] Zhu Jie, Li Xiaoli, Tang Huiqin, et al. Propagation of multi-cosine-Laguerre-Gaussian correlated Schell-model beams in free space and atmospheric turbulence[J]. [Optics Express](#), 2017, 25(17): 20071-20086.
- [57] Xu Yonggen, Dan Youquan, Yu Jiayi, et al. Kurtosis parameter  $K$  of arbitrary electromagnetic beams propagating through non-Kolmogorov turbulence[J]. [Journal of Modern Optics](#), 2017, 64(19): 1976-1987.
- [58] Yu Jiayi, Cai Yangjian, Gbur G. Rectangular Hermite non-uniformly correlated beams and its propagation properties[J]. [Optics Express](#), 2018, 26(21): 27894-27906.
- [59] Yu Jiayi, Wang Fei, Liu Lin, et al. Propagation properties of Hermite non-uniformly correlated beams in turbulence[J]. [Optics Express](#), 2018, 26(13): 16333-16343.
- [60] Huang Yan, Yuan Yangsheng, Liu Xianlong, et al. Propagation of optical coherence vortex lattices in turbulent atmosphere[J]. [Applied Sciences](#), 2018, 8: 2476.
- [61] Yu Jiayi, Zhu Xinlei, Wang Fei, et al. Experimental study of reducing beam wander by modulating the coherence structure of structured light beams[J]. [Optics Letters](#), 2019, 44(17): 4371-4374.
- [62] Yu Jiayi, Huang Yan, Wang Fei, et al. Scintillation properties of a partially coherent vector beam with vortex phase in turbulent atmosphere[J]. [Optics Express](#), 2019, 27(19): 26676-26688.
- [63] Lin Rong, Yu Hancheng, Zhu Xinlei, et al. The evolution of spectral intensity and orbital angular momentum of twisted Hermite Gaussian Schell model beams in turbulence[J]. [Optics Express](#), 2020, 28(5): 7152-7164.
- [64] Zhang Bo, Huang Hongkun, Xie Chenxia, et al. Twisted rectangular Laguerre–Gaussian correlated sources in anisotropic turbulent atmosphere[J]. [Optics Communications](#), 2020, 459: 125004.
- [65] Wei Dongmei, Li Shuwei, Zeng Jun, et al. Comparative study of spiral spectrum of elegant and standard Laguerre–Gaussian beams in atmospheric turbulence[J]. *Journal of Russian Laser Research*, 2020, 41(4): 364-372.
- [66] Lin Shuqin, Wang Cong, Zhu Xinlei, et al. Propagation of radially polarized Hermite non-uniformly correlated beams in a turbulent atmosphere[J]. [Optics Express](#), 2020, 28(19): 27238-27249.
- [67] Zhao Xuechun, Zhang Lei, Lin Rong, et al. Hermite non-uniformly correlated array beams and its propagation properties[J]. *Chinese Physics Letters*, 2020, 37: 124202.
- [68] Liu Yonglei, Lin Rong, Wang Fei, et al. Propagation properties of Laguerre–Gaussian Schell-model beams with a twist phase[J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2021, 264: 107556.
- [69] Cai Yangjian, Chen Yahong, Wang Fei. Generation and propagation of partially coherent beams with nonconventional correlation functions: a review [Invited][J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2014, 31(9): 2083-2096.
- [70] Gori F, Santarsiero M. Devising genuine spatial correlation functions[J]. *Optics Letters*, 2007, 32(24): 3531-3533.
- [71] Gori F, Ramírez-Sánchez V, Santarsiero M, et al. On genuine cross-spectral density matrices[J]. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 2009, 11: 085706.

- [72] Monin A S, Yaglom A M, Lumley J L. Statistical fluid mechanics: mechanics of turbulence[M]. Cambridge: The MIT Press, 1971.
- [73] Taylor G I. The spectrum of turbulence[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1938, 164(919): 476-490.
- [74] Kolmogorov A N. The local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds number[J]. *Soviet Physics Uspekhi*, 1941, 30(4): 301-305.
- [75] Born M, Wolf E. Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light[M]. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [76] Tatarskiĭ V I. Wave propagation in a turbulent medium[M]. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [77] Harlow G R. Wave propagation in a random medium[J]. *Physics Bulletin*, 1960, 11(9): 232-233.
- [78] Lutomirski R F, Yura H T. Propagation of a finite optical beam in an inhomogeneous medium[J]. *Applied Optics*, 1971, 10(7): 1652-1658.
- [79] Yura H T, Hanson S G. Second-order statistics for wave propagation through complex optical systems[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1989, 6(4): 564-575.
- [80] Siegman A E. New developments in laser resonators[C]//Proceedings of SPIE, Optical Resonators. 1990, 1224:2-4.
- [81] Sahin S, Korotkova O. Light sources generating far fields with tunable flat profiles[J]. *Optics Letters*, 2012, 37(14): 2970-2972.
- [82] Korotkova O, Sahin S, Shechpakina E. Multi-Gaussian Schell-model beams[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2012, 29(10): 2159-2164.
- [83] Chen Yahong, Gu Jiabin, Wang Fei, et al. Self-splitting properties of a Hermite-Gaussian correlated Schell-model beam[J]. *Physical Review A*, 2015, 91: 013823.
- [84] Wang Fei, Liu Xianlong, Yuan Yangsheng, et al. Experimental generation of partially coherent beams with different complex degrees of coherence[J]. *Optics Letters*, 2013, 38(11): 1814-1816.
- [85] Wang Fei, Liang Chunhao, Yuan Yangsheng, et al. Generalized multi-Gaussian correlated Schell-model beam: from theory to experiment[J]. *Optics Express*, 2014, 22(19): 23456-23464.
- [86] Chen Yahong, Liu Lin, Wang Fei, et al. Elliptical Laguerre-Gaussian correlated Schell-model beam[J]. *Optics Express*, 2014, 22(11): 13975-13987.
- [87] Chen Yahong, Wang Fei, Zhao Chengliang, et al. Experimental demonstration of a Laguerre-Gaussian correlated Schell-model vortex beam[J]. *Optics Express*, 2014, 22(5): 5826-5838.
- [88] Liang Chunhao, Wang Fei, Liu Xianlong, et al. Experimental generation of cosine-Gaussian-correlated Schell-model beams with rectangular symmetry[J]. *Optics Letters*, 2014, 39(4): 769-772.
- [89] Chen Yahong, Wang Fei, Liu Lin, et al. Generation and propagation of a partially coherent vector beam with special correlation functions[J]. *Physical Review A*, 2014, 89: 013801.
- [90] Zhu Shijun, Chen Yahong, Wang Jing, et al. Generation and propagation of a vector cosine-Gaussian correlated beam with radial polarization[J]. *Optics Express*, 2015, 23(26): 33099-33115.
- [91] Chen Yahong, Yu Jiayi, Yuan Yangsheng, et al. Theoretical and experimental studies of a rectangular Laguerre-Gaussian-correlated Schell-model beam[J]. *Applied Physics B*, 2016, 122: 31.
- [92] Peng Xiaofeng, Lu Xingyuan, Liu Xianlong, et al. Generation and propagation of a Hermite-Gaussian correlated Schell-model  $LG_{0l}$  beam[J]. *Applied Sciences*, 2019, 9: 610.
- [93] Hyde IV M W, Basu S, Voelz D G, et al. Experimentally generating any desired partially coherent Schell-model source using phase-only control[J]. *Journal of Applied Physics*, 2015, 118: 093102.
- [94] Hyde IV M W, Basu S, Voelz D G, et al. Generating partially coherent Schell-model sources using a modified phase screen approach[J]. *Optical Engineering*, 2015, 54: 120501.
- [95] Lajunen H, Saastamoinen T. Propagation characteristics of partially coherent beams with spatially varying correlations[J]. *Optics Letters*, 2011, 36(20): 4104-4106.
- [96] Tong Zhisong, Korotkova O. Nonuniformly correlated light beams in uniformly correlated media[J]. *Optics Letters*, 2012, 37(15): 3240-3242.
- [97] Gu Yalong, Gbur G. Scintillation of nonuniformly correlated beams in atmospheric turbulence[J]. *Optics Letters*, 2013, 38(9): 1395-1397.
- [98] Yu Jiayi, Zhu Xinlei, Lin Shuqin, et al. Vector partially coherent beams with prescribed non-uniform correlation structure[J]. *Optics Letters*, 2020, 45(13): 3824-3827.
- [99] Hyde IV M W, Bose-Pillai S, Voelz D G, et al. Generation of vector partially coherent optical sources using phase-only spatial light modulators[J]. *Physical Review Applied*, 2016, 6: 064030.
- [100] Hyde IV M W, Bose-Pillai S R, Wood R A. Synthesis of non-uniformly correlated partially coherent sources using a deformable mirror[J]. *Applied Physics Letters*, 2017, 111: 101106.
- [101] Zhu Xinlei, Yu Jiayi, Wang Fei, et al. Synthesis of vector nonuniformly correlated light beams by a single digital mirror device[J]. *Optics Letters*, 2021, 46(12): 2996-2999.