

# 传输线方程的高精度龙格-库塔数值求解方法\*

王旭桐, 周 辉, 马 良, 程引会, 李进奎,  
刘逸飞, 赵 墨, 郭景海, 王文兵

(西北核技术研究院 强脉冲辐射环境模拟与效应国家重点实验室, 西安 710024)

**摘 要:** 提出了一种求解传输线方程的高精度龙格-库塔(RK)方法。此方法在空间上采取高阶泰勒展开, 提高了对空间微分的近似精度, 减少了数值色散所带来的误差。与传统的时域有限差分法(FDTD)方法相比, 在每波长采样数相同时, RK方法的计算精度更高。同时, 根据 Taylor 模型, 对外界平面波激励源进行离散, 成功利用 RK 方法对外部场激励传输线进行求解, 扩大了龙格-库塔方法在求解传输线方程时的应用范围。通过编程对平面波辐照下无限大地平面上的单导体与双导体的算例分别应用 FDTD 方法与 RK 方法进行了计算, 验证了 RK 方法的正确性。结果表明同等计算条件下 RK 方法的计算精度更高。

**关键词:** 龙格-库塔; 场线耦合; 传输线; 时域有限差分; 泰勒展开

中图分类号: O441.4

文献标志码: A

doi: 10.11884/HPLPB202032.190402

## High-precision Runge-Kutta method for transmission line equation

Wang Xutong, Zhou Hui, Ma Liang, Cheng Yinhui, Li Jinxi,  
Liu Yifei, Zhao Mo, Guo Jinghai, Wang Wenbing

(State Key Laboratory of Intense Pulsed Radiation Simulation and Effect, Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, China)

**Abstract:** This paper presents a high-precision Runge-Kutta (RK) method for solving transmission line equations. This method adopts high-order Taylor expansion in space, which improves the approximation accuracy of spatial differentiation. Compared with the traditional finite element time-domain method, when the number of samples per wavelength is the same, RK method has higher precision. At the same time, according to the Taylor model, researchers use RK method to solve transmission line equation in the external field excitation. The correctness and high precision of the RK method are verified by numerical examples of our study.

**Key words:** Runge-Kutta; field-line coupling; transmission line; FDTD; Taylor expansion

传输线方程是一阶双曲型偏微分方程, 求解此类型方程没有现成的差分格式, 因此需要把传输线方程转换成一阶拟线性偏微分方程组, 然后采用 Lax 差分格式, 偏心格式或者 Lax-Wendroff 格式对方程组进行求解, 此种方法计算量比较大, 且转换为一阶拟线性偏微分方程组的推导过程比较复杂<sup>[1-2]</sup>。本文采用常微分方程数值解法求解传输线的电磁瞬态过程, 求解分为两个步骤, 一是将传输线方程转换为常微分方程组, 二是在初始条件下求解常微分方程组。求解常微分方程组的数值解法有很多, 常用的有 Euler 方法、显示单步法、龙格-库塔(Runge-Kutta, RK)方法、线性多步法等<sup>[1-6]</sup>。为了提高计算精度与计算效率, 本文将 RK 方法与空间高阶展开结合应用至传输线方程的求解当中, 并扩展了此种算法的应用范围。

## 1 高精度龙格-库塔方法理论

### 1.1 改进 RK 方法的迭代方程

无源的传输线方程如下

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial z} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial z} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

\* 收稿日期: 2019-10-14; 修订日期: 2019-11-25

基金项目: 强脉冲辐射环境模拟与效应国家重点实验室基金(SKLIPR1702)

作者简介: 王旭桐(1996—), 男, 硕士, 研究实习员, 从事电磁场数值仿真研究; wangxutong@nint.ac.cn。

两端的边界条件如下

$$u_0 = -i_0 R_s \quad (2)$$

$$u_l = i_l R_l \quad (3)$$

式中： $u$ 为线上电压； $i$ 为线上电流； $R_0$ 为单位长度电阻； $L_0$ 为单位长度电感； $G_0$ 为单位长度电导； $C_0$ 为单位长度电容。

将传输线分为  $N$  段，每一个节点上都有包含电压值和电流值，整个方程组共有  $2N$  个方程，含有  $2N+2$  个变量，添加 2 个边界条件后，只需求解  $2N$  个独立变量。

为了得到空间四阶中心差分近似，采用泰勒级数展开进行处理。

$$\begin{aligned} f(x + \frac{1}{2}\Delta x) &= f(x) + \left(\pm \frac{1}{2}\Delta x\right) \frac{\partial}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2!} \left(\pm \frac{1}{2}\Delta x\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + \\ &\frac{1}{3!} \left(\pm \frac{1}{2}\Delta x\right)^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x) + \frac{1}{4!} \left(\pm \frac{1}{2}\Delta x\right)^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x) + \frac{1}{5!} \left(\pm \frac{1}{2}\Delta x\right)^5 \frac{\partial^5}{\partial x^5} f(x) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} f(x + \frac{3}{2}\Delta x) &= f(x) + \left(\pm \frac{3}{2}\Delta x\right) \frac{\partial}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2!} \left(\pm \frac{3}{2}\Delta x\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + \\ &\frac{1}{3!} \left(\pm \frac{3}{2}\Delta x\right)^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x) + \frac{1}{4!} \left(\pm \frac{3}{2}\Delta x\right)^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x) + \frac{1}{5!} \left(\pm \frac{3}{2}\Delta x\right)^5 \frac{\partial^5}{\partial x^5} f(x) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

根据式(4)和式(5)可以得到多项式如下

$$27 \left[ f\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right) - f\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right) \right] - \left[ f\left(x + \frac{3}{2}\Delta x\right) - f\left(x - \frac{3}{2}\Delta x\right) \right] \quad (6)$$

采用式(6)代替式(1)中的空间微分，得到空间四阶中心差分后的方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u_k}{\partial t} \approx \frac{(27i_{k-1} + i_{k+1} - 27i_k - i_{k-2})}{24\Delta z C_0} - \frac{G_0}{C_0} u_k \\ \frac{\partial i_k}{\partial t} \approx \frac{(27u_k + u_{k+2} - 27u_{k+1} - u_{k-1})}{24\Delta z L_0} - \frac{R_0}{L_0} i_k \end{cases} \quad (7)$$

式中： $u_k = u_1, u_2 \dots u_N$ ,  $i_k = i_0, i_1 \dots i_{N-1}$ ;  $N = l/\Delta z$ 。

由于在空间高阶展开时，求一个点的电压值和电流值需要邻近多个网格点的值，因此在边界以及边界附近采用二阶的展开，对式(1)在  $(k+1)\Delta z$  处采取后向欧拉公式进行离散，对式(1)在  $k\Delta z$  处采取前向欧拉公式进行离散得到

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial t} \approx \frac{i_k - i_{k+1}}{\Delta z C_0} - \frac{G_0}{C_0} u_{k+1} \\ \frac{\partial i_k}{\partial t} \approx \frac{u_k - u_{k+1}}{\Delta z L_0} - \frac{R_0}{L_0} i_k \end{cases} \quad (8)$$

将边界条件代入式(8)可以得到边界上的迭代公式

$$\begin{cases} \frac{\partial u_N}{\partial t} \approx \frac{i_{N-1} - R_l^{-1} u_N}{\Delta z C_0} - \frac{G_0}{C_0} u_N \\ \frac{\partial i_0}{\partial t} \approx \frac{-R_s i_0 - u_N}{\Delta z L_0} - \frac{R_0}{L_0} i_0 \end{cases} \quad (9)$$

式中： $R_s, R_l$ 分别为源端和终端电阻。

将电报方程的空间坐标离散后总共得到  $2N$  个相互独立的状态变量，并得到  $2N$  阶的线性常状态方程组：

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{s}(t) \quad (10)$$

其中  $\mathbf{s}(t)$  是离散后的源项， $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{F}$  为常数矩阵。



$$\begin{cases} v_x = -\frac{v}{\cos\theta_p} \\ v_y = -\frac{v}{\sin\theta_p \cos\phi_p} \\ v_z = -\frac{v}{\sin\theta_p \sin\phi_p} \end{cases} \quad (16)$$

其中,  $\theta_p, \varphi_p, \theta_e$  分别为入射波的入射角、方位角、极化角。

### 1.2 收敛性分析

根据文献 [7] 给出的定理, 假设初值问题的单步方法的增量函数  $\varphi(x, y; h)$  关于  $x, y$  和  $h$  是连续的, 并对于  $y$  满足 Lipschitz 条件, 即  $|\varphi(x, y; h) - \varphi(x, z; h)| \leq L|y - z|$ , 那么单步法收敛的充分必要条件是单步法是相容的。为了证明显示 RK 方法的收敛性, 只要证明其相容性以及增量函数满足 Lipschitz 条件就可以了。

以经典的 2 级 2 阶 RK 方法(中点公式)为例

$$\varphi(x, y; h) = f\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hf(x, y)\right) \quad (17)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x, y; h) = f(x, y) \quad (18)$$

上式表明中点公式满足相容性。

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y_1; h) - \varphi(x, y_2; h)| &= \left| f\left(x + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}hf(x, y_1)\right) - f\left(x + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{1}{2}hf(x, y_2)\right) \right| \leq \\ &L_1 \left| y_1 - y_2 + \frac{1}{2}h[f(x, y_1) - f(x, y_2)] \right| \leq L_1 |y_1 - y_2| + \frac{1}{2}hL_1 \cdot L_1 |y_1 - y_2| = L_1 \left(1 + \frac{1}{2}hL_1\right) |y_1 - y_2| \end{aligned} \quad (19)$$

当  $h \leq h_0$ , 取  $L = L_1(1 + \frac{1}{2}h_0L_1)$ 。此时  $\varphi(x, y; h)$  对  $y$  满足 Lipschitz 条件, 从而可知中点公式收敛, 其他 RK 方法皆可根据此方法证明收敛。

### 1.3 稳定性分析

为了简单起见, 一般把数值方法用于试验方程来进行讨论<sup>[8]</sup>。

$$y'(x) = \lambda y(x) \quad (20)$$

其中,  $\text{Re}(\lambda) < 0$ , 若  $\lambda$  为实数, 则  $\lambda < 0$ 。

将经典的 4 级 4 阶龙格—库塔方法应用至试验方程得到

$$y_{n+1} = \left[ 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24} \right] y_n \quad (21)$$

$$E(\lambda h) = 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24} \quad (22)$$

如果  $|E(\lambda h)| < 1$ , 那么  $\lambda h$  的区域为经典的 4 级 4 阶龙格库塔方法的绝对稳定性区域, 见图 1。其中横轴为实数轴, 竖轴为虚数轴。

### 1.4 计算内存

RK 数值解法需要存储一个系数矩阵  $F$ , 以及 4 个中间变量  $k_1, k_2, k_3, k_4$ 。为了尽量减小计算内存, 采用稀疏矩阵的存储方式对  $F$  进行存储, 每得到一个中间变量就把它放入累加器中, 可以得到

$$\text{RK}_4\text{-HO}_4 \text{ 数值解法所需内存} = [(2N) \times 12 + 2N + 2N] \times 4 \quad (23)$$

## 2 龙格—库塔数值方法有效性验证及算例

### 2.1 双导体传输线

采用经典算例进行计算<sup>[8-10]</sup>, 一根半径  $r_w = 0.254 \text{ mm}$ 、长  $L = 1 \text{ m}$  的导线位于无限大接地平面上, 距地高度  $h = 2 \text{ cm}$ 。终端的阻性负载分别为  $R_s = 500 \Omega$  和  $R_L = 1000 \Omega$ 。入射的均匀平面波从顶部入射,  $\theta_e = 0^\circ, \theta_p = 0^\circ, \phi_p = 0^\circ$ 。入射电场  $\xi(t)$  的时域波形为具有不同上升时间的梯形周期脉冲序列, 重复频率  $1 \text{ MHz}$ , 幅值  $1 \text{ V/m}$ , 占空比  $50\%$ 。脉冲上升时间设置为  $10 \text{ ns}$ , 如图 2 所示。

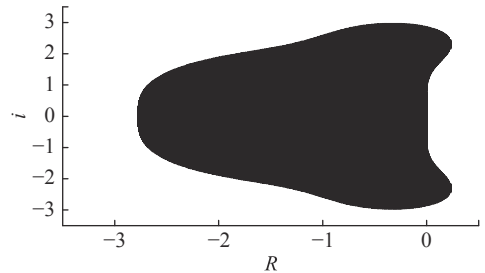


Fig. 1 Stability region of the Runge-Kutta method  
图 1 龙格-库塔方法的稳定性区域

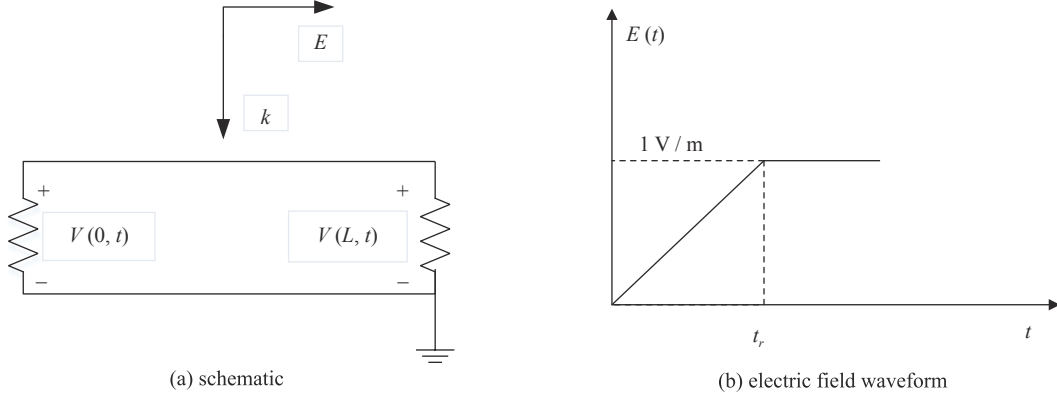


Fig. 2 Transmission line model  
图 2 传输线模型

计算结果如图 3 所示,可以看出当空间步长为 0.02 m 时, RK 数值方法的计算结果与 FDTD 方法的计算结果在此算例上相同,验证了本文提出的 RK 方法的正确性。当空间步长为 0.02 m 时,此时 RK 数值方法依旧稳定,但是由于步长过大导致了计算结果误差较大。

### 2.2 多导体传输线

针对多导体平行均匀传输线,设置以下算例,如图 4(a) 和图 4(b) 所示。导线长 2 m,导线半径为 0.190 5 mm,绝缘层厚度  $r_w = 0.254$  mm,导线中心之间的距离为 1.3 mm。均匀平面波沿着 z 方向入射,电场的极化方向沿 x 方向。单位长度的参数矩阵  $L = \begin{bmatrix} 0.7485 & 0.2408 \\ 0.2408 & 0.7485 \end{bmatrix} \mu\text{H}/\text{m}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 24.982 & -6.266 \\ -6.266 & 24.982 \end{bmatrix} \text{pF}/\text{m}$ 。传输线终端接 500  $\Omega$  电阻,  $R_s = R_L = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix} \Omega$ ,入射电场  $\xi(t)$  的时域波形如图 4(c) 所示。入射波入射角度分别为  $\theta_E = 90^\circ, \theta_p = 90^\circ, \phi_p = -90^\circ$ 。

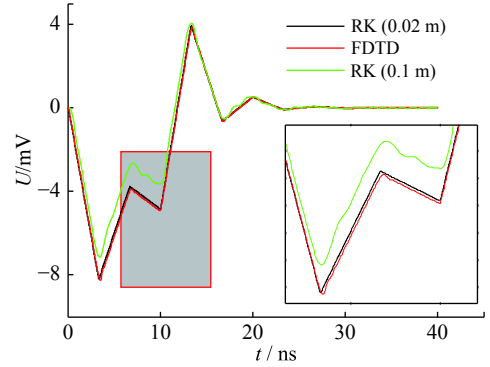


Fig. 3 Voltage at left end of twin conductor transmission line  
图 3 传输线左端电压

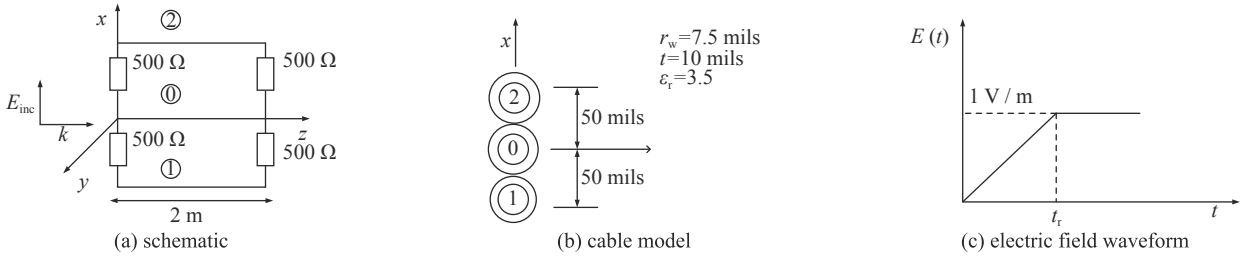


Fig. 4 Model of multiconductor transmission lines  
图 4 多导体带状电缆模型

计算结果如图 5 所示,结果验证了改进 RK 方法针对场激励多导体传输线计算的正确性。

### 2.3 RK 方法与 FDTD 方法的计算精度

针对集中激励源激励的传输线进行计算,采用图 6(a) 所示的传输线模型,采用图 6(b) 所示的电压源,线长 0.8 m,  $L_0 = 309$  nH/m,  $C_0 = 144$  pF/m,  $R_s = 50 \Omega, R_L = 50 \Omega$ 。

根据传输线基本理论

$$Z_0 = \sqrt{L_0/C_0} \quad (24)$$

$$u_R(t) = \frac{Z_0}{R_s + Z_0} V_s(t) \quad (25)$$

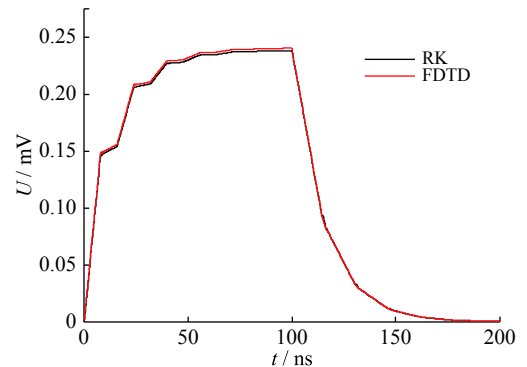


Fig. 5 Voltage at left end of multiconductor transmission line  
图 5 传输线左端电压

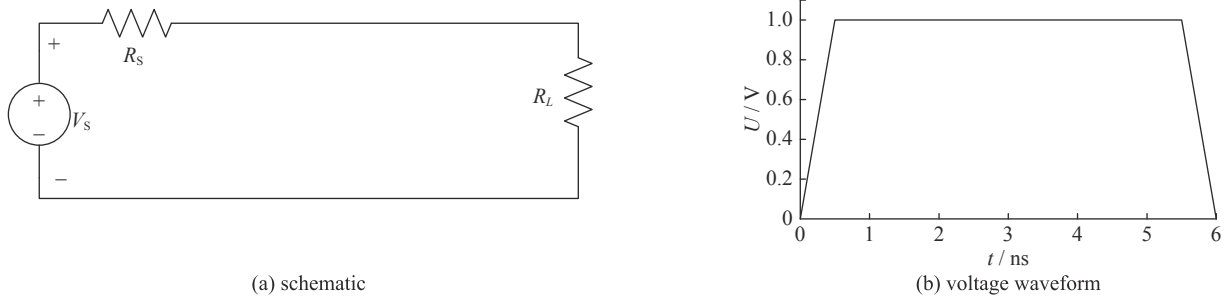


Fig. 6 Lossless transmission line model

图 6 无损传输线模型

$$\beta = \frac{u_L}{u_R} = \frac{2R_L}{R_L + Z_0} \quad (26)$$

其中,  $Z_0$  为传输线的特征阻抗,  $u_R(t)$  为激励源加载至传输线上的电压,  $\beta$  为透射系数,  $u_L$  为负载电压, 对式(18)进行求解可以得到负载电压(计算过程中保留有效小数点后 8 位)

$$u_L(t) = \frac{Z_0}{R_s + Z_0} V_s(t) \frac{2R_L}{R_L + Z_0} \quad (27)$$

根据式(20)可以画出负载电压波形图, 如图 7 所示。

FDTD 方法选取  $\Delta z = 0.0008 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 5 \times 10^{-12} \text{ s}$ , RK 数值方法选取  $\Delta z = 0.005 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 1 \times 10^{-11} \text{ s}$ , 计算结果如图 8 所示。

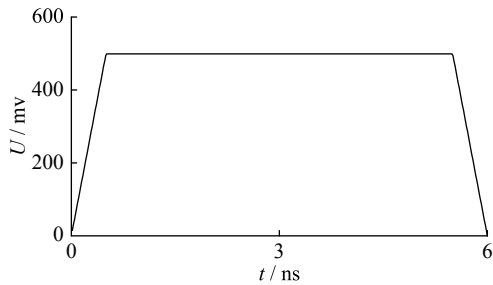


Fig. 7 Waveform of load

图 7 负载电压波形

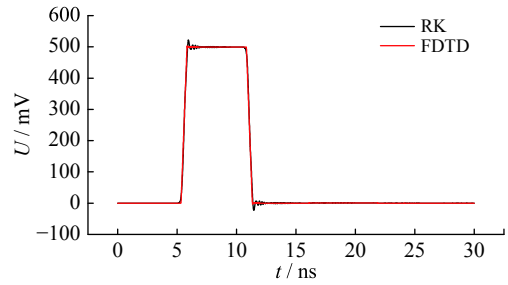


Fig. 8 Terminal voltage response

图 8 终端电压响应

RK 方法的计算时间为 1.1 s, FDTD 的计算时间为 4.8 s。从图 8 可以看出, RK 方法与 FDTD 方法在波形转换的前沿处都存在振荡现象, 其中 RK 方法的振荡现象更为严重, 这是由于 RK 方法的空间步长比 FDTD 方法的空间步长更大, 且 RK 方法对于激励源的光滑性有更高的要求。从波形平稳处截取 10 ns 点的波形与解析解进行对比, RK 方法与解析解的误差为 0.00044979, FDTD 方法与解析解的误差为 0.01670000。

上述算例的计算结果表明, 当激励源的函数足够光滑, 在同等的计算时间下, RK 方法的计算精度更高。

### 3 结 论

为了改善传输线方程的求解精度, 本文将 RK 方法引入至外界场激励下传输线方程的求解。提高了空间展开阶数, 扩展了 RK 方法应用范围, 并对其收敛特性与绝对稳定性做了分析。理论分析表明, 激励源的函数足够光滑时, 在相同的计算条件下, 此方法的计算精度高于传统 FDTD 方法, 通过数值算例验证, 同等精度下, 改进 RK 方法消耗的计算时间少于传统 FDTD 方法。

#### 参考文献:

- [1] 张希. 有损均匀传输线数值解的研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2003: 42-59. (Zhang Xi. Research on lossy and uniform transmission line numerical solution[D]. Chongqing: Chongqing University, 2000: 21-30)
- [2] 张希, 刘宗行, 孙韬, 等. 传输线方程的一种数值解法[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2004, 27(2): 116-119. (Zhang Xi, Liu Zongxing, Sun Tao, et al. A numerical method for transmission line equations[J]. Journal of Chongqing University(Natural Science Edition), 2004, 27(2): 116-119)
- [3] 杨阳. 龙格库塔法求模糊微分方程的数值解[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015: 25-35. (Yang Yang. Numerical solution of fuzzy differential equations by Runge-Kutta method[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015: 25-35)

- [4] 秦浩东, 吴志强, 张晏铭, 等. 龙格-库塔方法与差分法的比较[J]. 成都大学学报(自然科学版), 2014, 33(4): 337-338. (Qin Haodong, Wu Zhiqiang, Zhang Yanming, et al. Comparison of Runge-Kutta method and difference method[J]. Journal of Chengdu University(Natural Science Edition), 2014, 33(4): 337-338)
- [5] 陈山. 求解波动方程的龙格-库塔型方法及其地震波传播模拟[D]. 北京: 清华大学, 2010: 8-10. (Chen shan. The Runge-Kutta type method for solving wave equations and its simulation of seismic wave propagation[D]. Beijing: Tsinghua University, 2010: 8-10)
- [6] 梁华力, 富明慧. 一种改进的精细-龙格库塔法[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2009, 48(5): 2-5. (Liang Huali, Fu Minghui. An improved precise Runge-Kutta integration[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2009, 48(5): 2-5)
- [7] 关治, 陆金甫. 数值分析基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010. (Guan Ye, Lu Jinpu. Fundamentals of numerical analysis[M]. Beijing: Higher Education Press, 2010)
- [8] Paul C R. 多导体传输线分析[M]. 3版. 北京: 中国电力出版社, 2013. (Paul C R. Analysis of multiconductor transmission lines[M]. 3rd ed. Beijing: China Electric Power Press, 2013)
- [9] 葛德彪, 闫玉波. 电磁波时域有限差分法[M]. 3版. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2011. (Ge Debiao, Yan Yubo. Finite-difference time-domain method for electromagnetic waves[M]. 3rd ed. Xi'an: Xidian University Press, 2011)
- [10] 冀维林. 基于FDTD算法的多导体传输线电磁兼容的研究[D]. 北京: 北京邮电大学, 2010: 21-43. (Ji Weilin. Study on electromagnetic compatibility of transmission line based on FDTD method[D]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications, 2010: 21-43)

## 第八届全国特种电源学术交流会第一轮通知

第八届全国特种电源学术交流会拟定于2020年7月下旬在乌鲁木齐市召开, 会议旨在加强全国特种电源及相关领域科研人员学术交流, 探讨特种电源技术创新和技术进步, 促进相关领域工程应用产学研融合发展。本次会议由中国电源学会特种电源专业委员会主办, 中国工程物理研究院流体物理研究所承办, 《强激光与粒子束》编辑部协办。

### 一、征文内容范围

会议征文内容包括与特种电源相关的理论、技术、应用、工艺等。不限于以下主题: 1. 电源电路拓扑及仿真技术; 2. 高功率逆变技术; 3. 功率器件及其应用; 4. 电源控制技术及电磁兼容技术; 5. 高功率脉冲电源技术及应用; 6. 特种电源技术及其应用。

### 二、征文要求

1. 征文需要提交论文全文, 请于2020年5月30日前投稿, 凡与上述主题相关且未在国内外公开学术期刊或会议出版物发表过的研究成果均可投稿。

2. 投稿请用Word文档编排, 论文编写格式参见《强激光与粒子束》论文模板, 详见会议网站或《强》刊网站。

3. 本次会议通过会议网站注册和投稿。请登陆会议网站进入会议投稿系统完成参会注册和投稿, 无论文交流代表只需进行参会注册。

4. 投稿论文将编入会议论文集(电子版), 会后将组织出版《强激光与粒子束》“特种电源专辑”。

### 三、保密事项

1. 本次学术会议交流为公开级, 会议交流论文和交流报告请作者按所在单位保密管理规定完成保密审查。因学术交流引起的保密问题由作者和报告人本人承担。

2. 投稿时请提交保审证明原件电子版, 附在论文全文的最后一页。

### 四、展商参展及其他

1. 欢迎相关领域企业厂商赞助本次会议, 大会将为赞助企业的产品样品、技术资料、交流咨询等提供展示场地。

2. 大会设特邀报告、大会报告、分会报告、张贴报告。评选的优秀论文将推荐到“特种电源专辑”发表。

### 五、会务信息

1. 会务联系人: 王立华, 0816-2484120; 冯莉, 0816-2492945; 李逢, 0816-2489580

2. 展商参展联系人: 徐乐, 0816-2494925, 13518307020

3. 会议投稿联系人: 王涛, 0816-2485753; 13183431142

4. 会议网站: <http://www.hplpb.com.cn/CN/column/TZDY2020/TZDY2020.shtml>

5. 会议邮箱: [tzdyxh2014@163.com](mailto:tzdyxh2014@163.com)

中国电源学会特种电源专业委员会

2020年3月1日