

引用格式: WU Xiongwei, ZHANG Jianan, CHEN Long, et al. Research Progress of Floquet Topological Photonic Insulators (Invited)[J]. Acta Photonica Sinica, 2023, 52(8):0826001

吴雄伟,张嘉男,陈龙,等. Floquet 拓扑光子绝缘体研究进展(特邀)[J]. 光子学报, 2023, 52(8):0826001

※封面论文※

Floquet 拓扑光子绝缘体研究进展(特邀)

吴雄伟,张嘉男,陈龙,娄卓辰,马骞,刘硕,游检卫

(东南大学信息科学与工程学院 毫米波全国重点实验室, 南京 211189)

摘要: 拓扑光子学是光学领域一个重要的新兴研究方向,它的奇异光学响应特性颠覆了人们对光传播的理解,为人工操控光的传播提供了一种全新方法。Floquet 拓扑光子绝缘体是拓扑光子学的一个重要分支,它利用周期性的驱动来探索物质的相变过程,发现了很多违反直觉的新奇物理现象。本文综述了近十年来 Floquet 拓扑光子绝缘体的主要研究进展。根据实现方式将其分为基于时间调制、基于空间调制、基于耦合谐振调制的三个大类进行详细论述。对于每一类 Floquet 拓扑光子绝缘体,从基础理论和物理实现平台两个方面论述了 Floquet 拓扑光子绝缘体的独特光学特性和奇异物理现象,并讨论了其潜在的应用前景。最后,总结了该领域当前面临的主要挑战,并对 Floquet 拓扑光子绝缘体的未来研究方向进行了展望。

关键词: 拓扑光子学; Floquet 拓扑光子绝缘体; 时间调制; 空间调制; 耦合谐振调制

中图分类号: O436

文献标识码: A

doi: 10.3788/gzxb20235208.0826001

0 引言

过去几十年里,拓扑光子学研究领域取得了迅速发展。这一领域致力于研究物质拓扑相的物理学原理。拓扑绝缘体起源于凝聚态物质的拓扑相,后来研究人员将其引入光学领域,促进了不同学科的交叉融合,推动了对新颖光学现象的探讨和许多有前景的光学应用的发展。在这些前沿探索中,发现了一些新奇的物理现象,如光学量子自旋霍尔效应^[1-5]和光学量子霍尔效应^[6-9]等。拓扑光子学具备诸如拓扑保护、背向散射抑制和鲁棒性等固有特性,因此在光计算^[10-13]和光传输^[14-15]等领域具有广泛的应用前景。拓扑光子学起源于 1980 年,由当时德国物理学家 KLITZING K V 等^[16]发现,在强磁场下,二维电子气体的霍尔电导与约化普朗克常量的整数倍相等。在这种情况下,霍尔电导率作为磁场的函数表现出鲁棒性,并且对载流子浓度和迁移率等参数不敏感。随后,研究人员对这一奇特物理现象进行了深入探讨和物理解释^[17-18],并发现霍尔电导中出现的整数量化现象与系统的拓扑不变量-陈数(Chern number)之间存在联系。陈数是一个整数值,描述了动量空间中波函数的整体结构。从那时起,将体系拓扑不变量与量子霍尔效应的电导结合起来的方法被称为 Thouless-Kohmoto-Nightingale-Nijs 关系,这为拓扑光子学中的体-边对应关系奠定了基础。体-边对应关系是研究拓扑不变量的一个重要方法^[19-22],它可以简单地理解为:当两种具有不同拓扑不变量的材料接触时,一定会出现边缘态,这些边缘态通常位于材料能隙内。2005 年,研究人员发现了一种新型的拓扑相物质:量子自旋霍尔系统或 Z_2 拓扑绝缘体^[23-27]。在这些具有零陈数的系统中,波函数拥有二元 (Z_2) 拓扑不变性,在时间反演对称条件下具有稳定性。自那时起,大量研究不断涌现,目的在于探究在不同对称性条件下物质的各种拓扑特性以及其对应的物理学意义^[28-32]。

当前,人们不仅在固体电子系统中研究拓扑相,还在其他量子多体系统中积极探索,包括液氦^[33]和超冷

基金项目: 国家自然科学基金(Nos. 62101124, 62288101), 国家重点研发计划(No. 2022YFA1404903), 江苏省自然科学基金(Nos. BK20210209, BK20220808), 中央高校基本科研业务费(No. 2242023K5002)

第一作者: 吴雄伟, 220221033@seu.edu.cn; 张嘉男, jiananzhang@seu.edu.cn

通讯作者: 游检卫, jyyou@seu.edu.cn

收稿日期: 2023-04-21; 录用日期: 2023-05-25

<http://www.photon.ac.cn>

原子气体^[34-37]。与此同时,在研究凝聚态系统中物质拓扑相的过程中,HALDANE F D M和RAGHU S提出了一个关键性的发现,即拓扑带结构实际上是周期性介质内波的普遍特性。在他们的开创性研究^[6,38]中,考虑了二维空间周期性结构中的电磁波,并引入了打破时间反演对称性的磁光材料,从而产生光学拓扑不变性。因此,他们预测在光子带隙内的电磁波会沿着系统边缘传播。不久后,他们的想法得到了WANG Zheng等的实验验证^[7]。实验中,研究者采用了二维磁性光子晶体结构^[8],观察到了单向传播的边缘态和相应的非互易现象,从而证实了这一光学结构确实具有非平庸的拓扑边界态。然而,在光学领域实现整数量子霍尔效应具有很大的挑战,主要原因是大部分材料的磁光响应非常微弱。因此,研究人员尝试提出许多新的方案,这些非磁性拓扑绝缘体方案极大地推动了拓扑光子学的发展,其中一个重要的方案是Floquet拓扑光子绝缘体(Topological photonic insulator, TPI)。根据实现方式,Floquet拓扑光子绝缘体可以分为基于时间调制、基于空间调制和基于耦合谐振调制三类。

事实上,通过在哈密顿量中引入时间调制或等效时间调制的方法,研究者们已经能够使凝聚态系统展现出独特的拓扑特性,这类拓扑绝缘体被称为Floquet拓扑绝缘体。Floquet拓扑绝缘体最初源于动力学系统的研究,代表性理论是量子共振的经典缩放理论^[39]。2012年,FAN Shanhui等^[40]将这一思想应用到光子晶体系统,实现了光学的Floquet拓扑绝缘体。然而,基于时间调制的Floquet拓扑光子绝缘体的研究仅局限于理论和数值仿真,并未从实验角度得到验证。这主要受到以下两个因素的限制:首先,该理论一直局限于二维紧束缚(Tight-binding, TB)模型,仅考虑最邻近谐振器之间的相互作用,而忽略了自由空间中两个谐振器之间的耦合。其次,时间调制的实验实现严重依赖于有源开关器件的时间调制速率,而当时有源开关器件的缓慢调制速率很大程度上限制了基于时间调制的Floquet拓扑光子绝缘体的发展。2013年,RECHTSMAN M C等^[41]首次提出利用激光直写技术在耦合波导阵列中实现等效磁场,成功地构建了基于空间调制的Floquet拓扑光子绝缘体。这种绝缘体采用 z 方向的空间维度取代时间维度,实现了从时间调制到空间调制的转变。由于无需时间调制,基于空间调制的Floquet拓扑光子绝缘体的制备变得更加简便和易于实现。此后,许多基于空间调制的Floquet拓扑光子绝缘体相继诞生,极大地推动了该领域的发展。然而,由于空间调制的Floquet拓扑光子绝缘体采用三维结构,其体积较大且笨重,因此在半导体平台上的集成仍面临挑战。2011年,HAFEZI M等^[42]率先提出了利用光学环形谐振腔晶格实现“边缘态”的理论。此后,基于耦合谐振调制的Floquet拓扑光子绝缘体吸引了众多研究者的关注,并在理论和应用方面取得了显著进展。在理论方面,2016年GAO Fei等首次阐述了基于网络模型的反常Floquet拓扑光子绝缘体^[43];2020年,AO Yutian研究组证实了宇称对称耦合谐振腔光波导系统中拓扑相变的存在性^[44];2022年,ZIMMERLING T J等首次报告了Floquet拓扑光子绝缘体中局域体模共振增强的四波混频现象^[45]。在应用方面,2021年MERLO J M等展示了首个基于TPES的全光二进制计算器^[46];2022年,GONG Qihuang研究组在单片集成硅光芯片中实现拓扑保护纠缠发射机^[47]。尽管基于时间调制的Floquet拓扑光子绝缘体在理论和实验上受到一定限制,但其在推动Floquet拓扑光子绝缘体以及拓扑光子学领域的发展方面具有重要意义。

本文全面回顾了近十年来Floquet拓扑光子绝缘体的发展历程和取得的研究成果,包括拓扑理论的形成、新奇现象的探讨以及广阔应用前景的开发。首先,对基于时间调制的Floquet拓扑光子绝缘体进行全面介绍,并着重阐述其理论发展过程。其次,详细讨论基于空间调制的Floquet拓扑光子绝缘体的进展,由于无需时间维度调制,实验演示相对简单,因此无论是理论方面的拓扑特性的探究,还是具体光学器件的应用,都取得了显著的发展。随后,本文详细介绍基于耦合谐振调制的Floquet拓扑光子绝缘体的基础理论和主要发展。最后,总结以上三种不同类型Floquet拓扑光子绝缘体面临的主要挑战,并对该领域的未来发展方向进行展望。

1 基于时间调制的Floquet拓扑光子绝缘体

基于时间调制的Floquet拓扑光子绝缘体是一类具有特殊拓扑特性的人工光子结构,其显著特点在于通过时间周期性地动态调制拓扑相。这种调制方法为光子系统提供了一种独特的调控机制,使其表现出奇异的光子输运性能。基于时间调制的Floquet拓扑光子绝缘体的核心特性是通过打破时间反演对称性实现了拓扑边缘态,这些边缘态在系统的边界上可以单向传输,且对缺陷和散射具有鲁棒性。与传统的静态拓

扑光子绝缘体相比,基于时间调制的方法引入了时间维度的额外自由度,从而提供了更多的调控策略和更广泛的应用潜力。目前,基于时间调制的Floquet拓扑光子绝缘体的研究重点在于理论探究和实验验证,深入研究不同类型的时间调制方法以及其对应的拓扑特性。作为光子学领域的新兴研究方向,基于时间调制的Floquet拓扑光子绝缘体为光通信、光计算、量子信息处理等多个应用领域提供了创新性的解决方案。

1.1 基本原理

基于凝聚态物理的Bloch理论,Floquet现象的出现源于系统在时间上的周期性调制。这种现象的演化受Schrödinger-like动力学约束^[59]

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = \hat{H}(t) \Psi(t) \quad (1)$$

式中, Ψ 是一个一般的(矢量或标量)场, \hat{H} 是描述系统的哈密顿量,如果假设哈密顿量具有周期性 T ,即具有Floquet周期变换特性,对应的哈密顿量可以表示为

$$\hat{H}(t) = \hat{H}(t+T) = \sum_m \hat{H}_m e^{-im\Omega t} \quad (2)$$

式中,角频率 $\Omega = 2\pi/T$ 为沿频率维度的倒格矢。在这种情况下,场的时间依赖性通常可以表示为

$$\Psi(t) = e^{-i\omega t} \phi(t) \quad (3)$$

式中, $-\pi/T < \omega < \pi/T$ 是一个特征值,对应于准频率,晶体动量在周期空间结构中的时间模拟,Floquet模满足

$$\Phi(t) = \Phi(t+T) = \sum_m \phi^{(m)} e^{-im\Omega t} \quad (4)$$

我们可以像研究固体物理问题那样推导出一个与时间无关的特征值问题

$$\sum_m (\hat{H}_{n-m} - m\Omega \delta_{mn}) \phi_a^{(m)} = \omega_a \phi_a^{(n)} \quad (5)$$

式中,下标 α 为表示不同本征态,上标 m 和 n 表示不同Floquet模。

周期性时间驱动可以产生新的谐波,并会在基频处构建新的频带结构。由于具有相同动量但频率相反(正/负)的波之间会发生共振干涉,新谐波的产生可以支持参量放大。具体而言,与空间周期性的情况不同,在时间周期性的情况下,带隙间消失的本征态不一定会在空间中衰减,它们可以在时间维度上呈指数增长,产生参量放大效应。其次,在时间高对称性点附近,Floquet系统的电磁响应会在这些正/负频耦合所形成的带隙内发生显著改变。近期,相关重要成果在非线性光学和光子学^[52]等前沿领域都有报道,该现象可以用来诱导参数增益^[60]和诱导相变^[57,61],进而可以实现非线性光学器件的动态设计和调控^[62]。

1.2 物理实现平台

对光子系统的折射率进行谐波调制,可以人为引入一个等效规范势,这种等效规范势可以产生光学Aharonov-Bohm效应。此时,系统的时间反演对称性会被打破,为实现各种新奇拓扑现象提供了重要物理实现平台^[63,64]。由于光子是中性粒子,因此不存在与光子耦合的自然规范势。在文献^[63]中,人们研究了动态调制材料介电常数引起的光子跃迁^[65,67]现象,并表明调制的相位可以用来构建光子的等效规范势,这一概念可用于诱导光子Aharonov-Bohm效应(如图1所示)。基于这一思想,人们展示了利用光子Aharonov-Bohm效应构建片上非磁性光子隔离器的设计,使用这样的规范势概念可以大大简化动态隔离器的设计。2013年,FAN Shanhui等^[68]报道了一个光子Aharonov-Bohm效应的实验演示(如图1(c)所示),该实验使用电子二极管的非线性电流-电压关系来实现电磁波的非互易性。此外,由于实验中不需要使用谐振效应,系统工作的带宽会更宽。随后,研究人员提出利用光子-声子相互作用来证明光子Aharonov-Bohm效应的存在^[69]。基于声光晶体中光子-声子的相互作用,人们通过引入光子的非互易相位,实验观察到可见光范围内的光子规范势(实验装置如图1(d)所示),证明了光子Aharonov-Bohm效应,该结果向人们展示了一种操控光子的新途径,即利用等效规范势来进行控制。

此外,研究人员还提出了一种在光学领域产生等效磁场的具体实现方案^[40]。如图2(a)所示,他们采用谐振腔晶格系统,其中谐振腔之间的耦合常数随时间谐波调制。通过精细配置晶格之间随时间周期变化的相位分布,可以构建一个与光子耦合的等效磁场。这种等效磁场打破了时间反演对称性,能够在物理空间中形成Floquet拓扑态。如图2(c)所示,由于光子受到类洛伦兹力驱动,光子在等效磁场中的运行轨迹表现为圆弧形。此外,如图2(i)所示,光会沿着动态调制谐振腔晶格的边缘进行单向传播,表现出典型的拓扑传

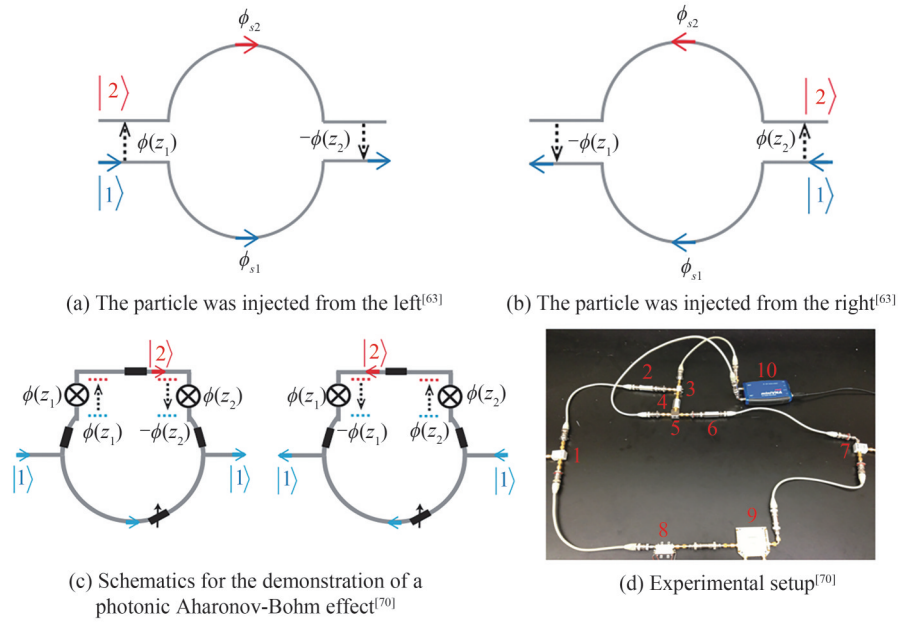
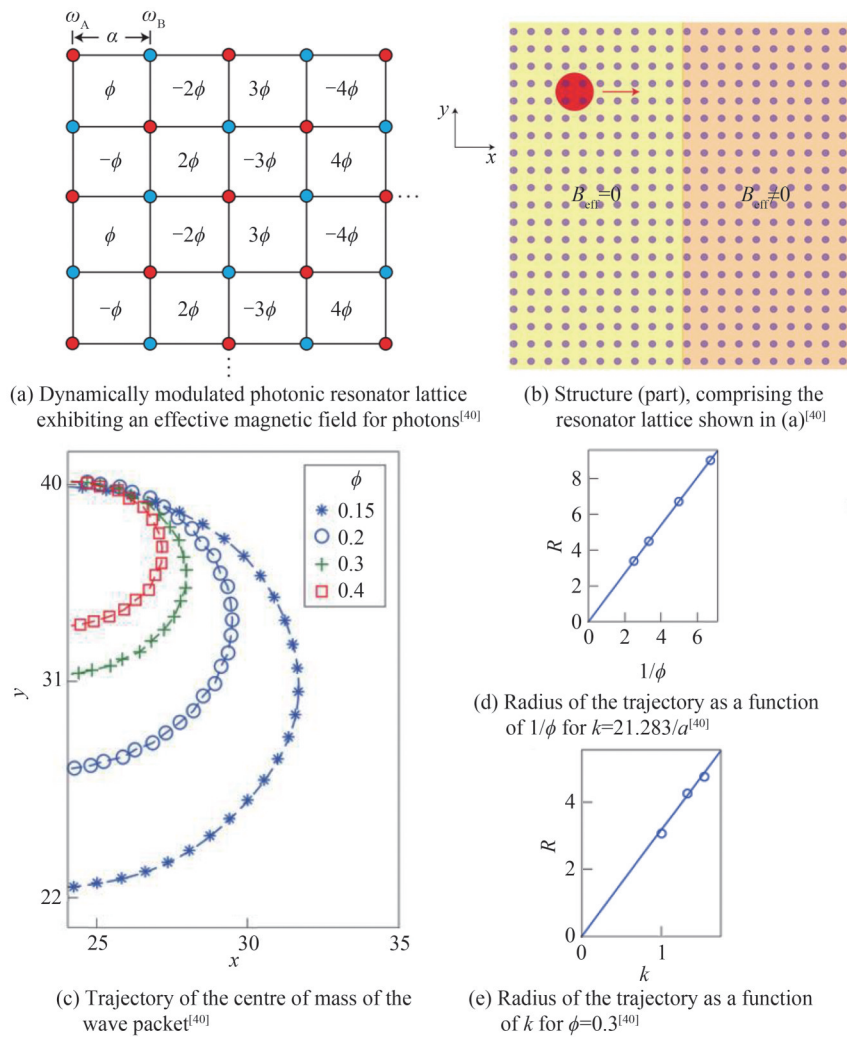


图1 电子和光子的 Aharonov-Bohm 效应^[63,70]
 Fig. 1 The Aharonov-Bohm effect for both an electron and a photon^[63,70]



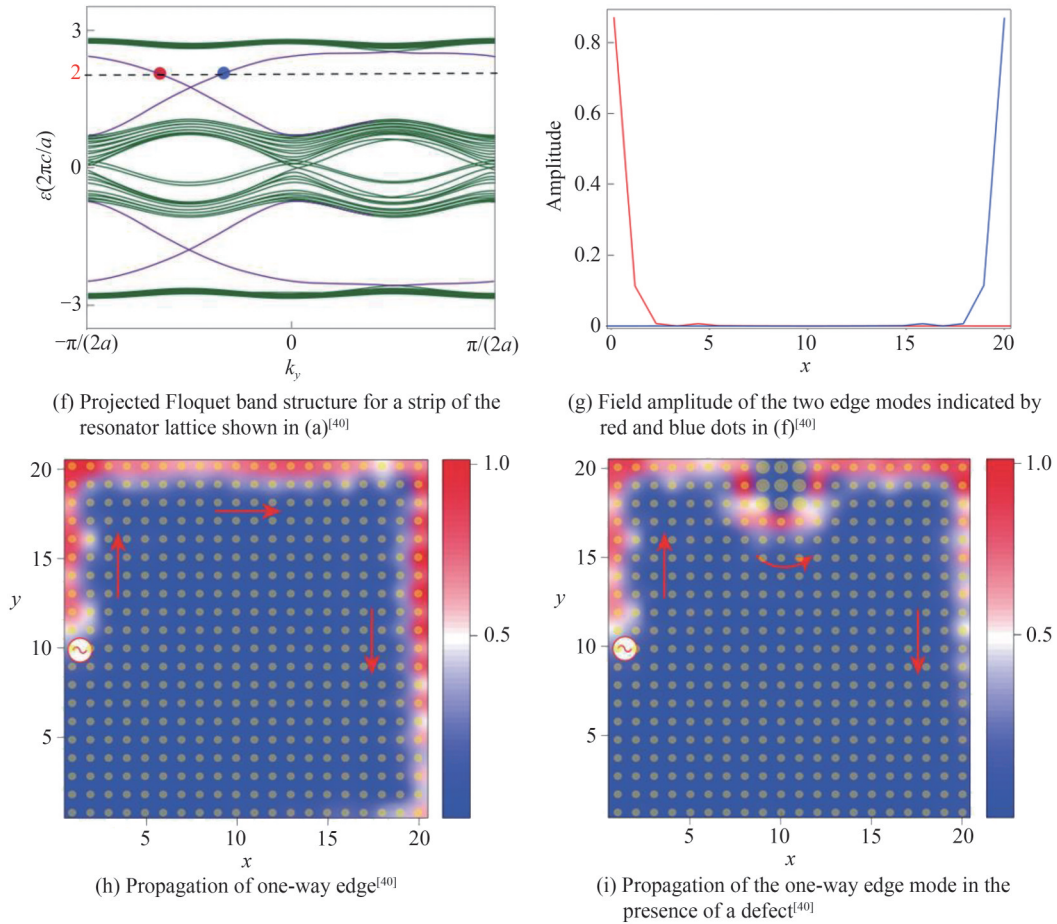

 图2 通过控制动态调制的相位实现光子的等效磁场^[40]

 Fig. 2 Controlling the phase of dynamic modulation to realize effective magnetic field^[40]

播特征,这种拓扑传播态对无序干扰具有很好的鲁棒性,而无需使用磁光效应。

与此同时,研究人员还利用片上硅基拉姆齐干涉仪来构建等效磁场^[70],并使用这个干涉仪测量了光子态的相位。其中,硅波导耦合结构的折射率由外加电压调制,这些工作是动态调制引起的光子规范势概念的重要证明。此外,在动态调制谐振腔中产生等效规范势的实验促成了后续许多通过调制相位操纵光的研究,研究人员表明动态结构中的时间自由度在控制电磁波于空间中传播的方面也非常有用^[71]。不同于空间自由度,相位调制在器件制备后仍然可以动态调控。在静态结构中,除非使用磁光材料,打破时间反演对称性得到的非互易性很难在静态结构中实现。因此,采用时间周期调制的光子规范场具有传统空间周期调制不具有的灵活调控特性。如图3(a)所示,以一个光子谐振腔晶格为例,相邻谐振腔之间的耦合强度被时间周期调制。通过调制相位的不同空间分布,可以对光子谐振腔晶格施加不同的非均匀等效磁场。数值结果表明,该系统可以观察到多种奇异的传播效应,包括负折射、单向反射等。此外,研究人员基于此前提出的光子等效规范势和磁场的概念,用数值方法证明了光子的de Haas-van Alphen效应^[72]。如图3(b)所示,他们证明了在动态调制的光子谐振腔中,晶格会表现出磁场效应。此时,光束在给定频率下的传播轨迹和非磁光子晶体等能轮廓图非常类似。为了阐明静态和动态驱动二维系统之间的关键区别,RUDNER M S等^[73]构造了一个新的拓扑不变量,如图3(d)所示,该不变量在时间周期驱动下会产生拓扑边态。为了解释时间周期驱动系统中“反常”光谱的起源,他们给出了时域和频域理论公式,并讨论了在固态和冷原子系统中实现这些现象的可能性。

为了有效的实现光学等效磁场(如图3(e)所示),人们深入分析了与时间相关的哈密顿量^[74],该哈密顿量最早在文献[40]中提出,用于实现针对光子的等效磁场。然而,与文献[40]不同的是,这里人们关注的是旋波近似不再有效的超强耦合体系。在实验上,利用目前的光子技术^[70],即考虑一个经历光子跃迁的动态

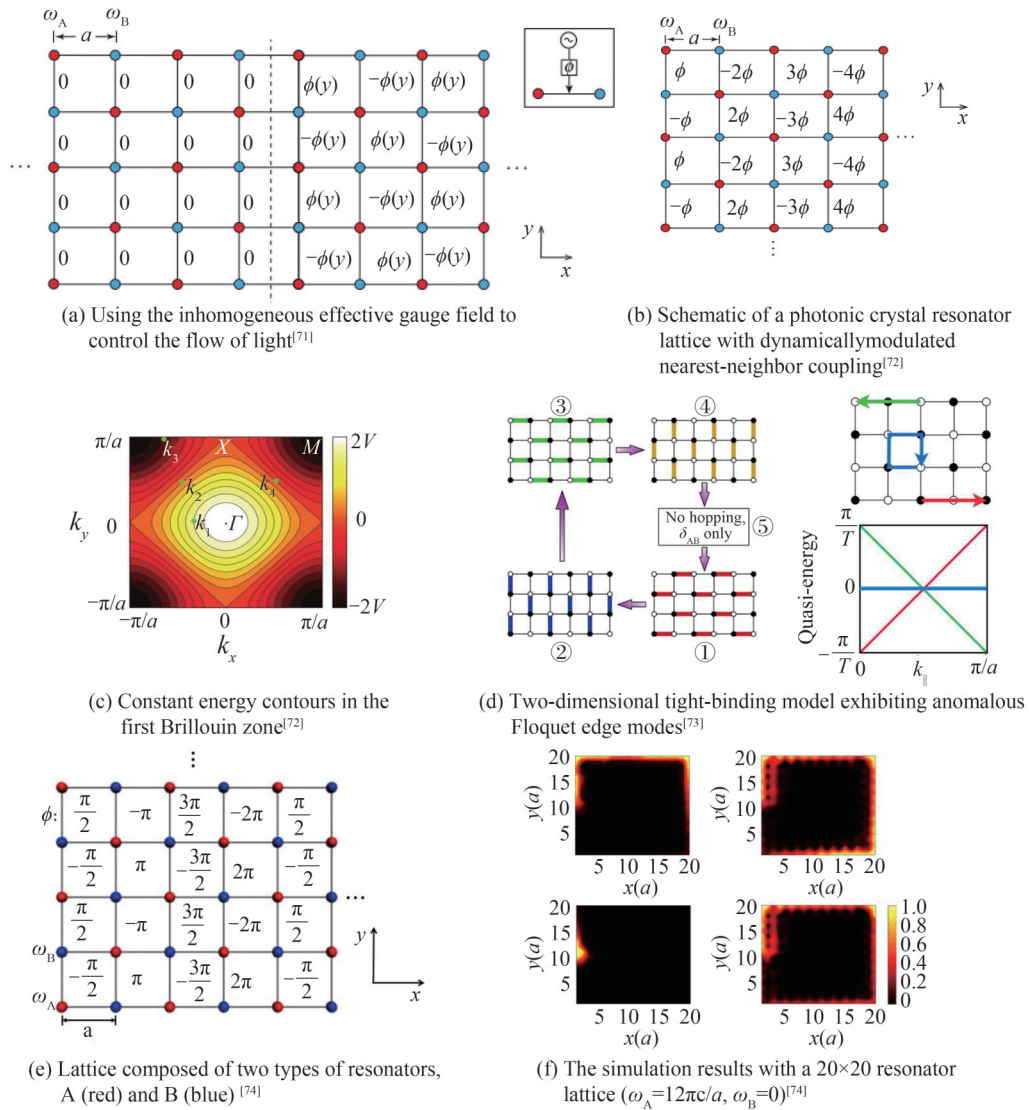


图3 动态调制光子谐振腔晶格系统^[71-74]

Fig. 3 Dynamically modulated photonic resonator lattice systems^[71-74]

调制光子谐振腔晶格系统(如图3(f)所示),达到这样的超强耦合状态实际上是相对简单的。对于这种系统,在超强耦合状态下,研究人员证明了单向传播的拓扑边态可以在较宽的参数范围内持续存在。研究还表明,随着调制强度的变化,存在一种与超强耦合体系唯一相关的拓扑相变,而在弱耦合系统中没有与之对应的拓扑相变。

近年来,由于其独特的物理特性,量子系统和经典系统中的拓扑相备受关注。Floquet拓扑绝缘体作为拓扑相的可能载体之一,目前主要局限于厄米势的时间调制。然而,在许多物理系统中,如声学 and 光学系统中,调制损耗或增益可以更直接地实现,但迄今为止还没有证明非厄米 Floquet 势能产生任何新的拓扑相。因此,探索周期晶格中时间调制的非厄米势和相关拓扑相同样具有重要意义。2019年,ALÙ A等^[75]研究了时间周期非厄米势对拓扑平庸厄米系统的影响。如图4(a)所示,他们以非厄米 Floquet kagome 晶格为例进行了深入研究,结果表明在时间动态驱动的非厄米系统中,可以产生非平庸 Chern Floquet 拓扑态和反常拓扑态。此外,他们还发现,通过在时间驱动周期内调制增益和损耗,该系统中的拓扑边态可以实现无耗散特性。另外,如图4(b)所示,非厄米 Floquet 系统可以被时间周期驱动进入纯粹的放大或耗散边缘传输模式,这对于诸如拓扑激光器等具有非常重要的应用价值^[76-77]。

时空驱动周期性调制是形成 Floquet 拓扑态的一种重要方式,提供了鲁棒的非互易拓扑保护,从而突破了时间调制的互易性,这种方法在集成和实际实现^[6,22-23]方面具有优势。然而,在光子系统^[24-26]中,以往的

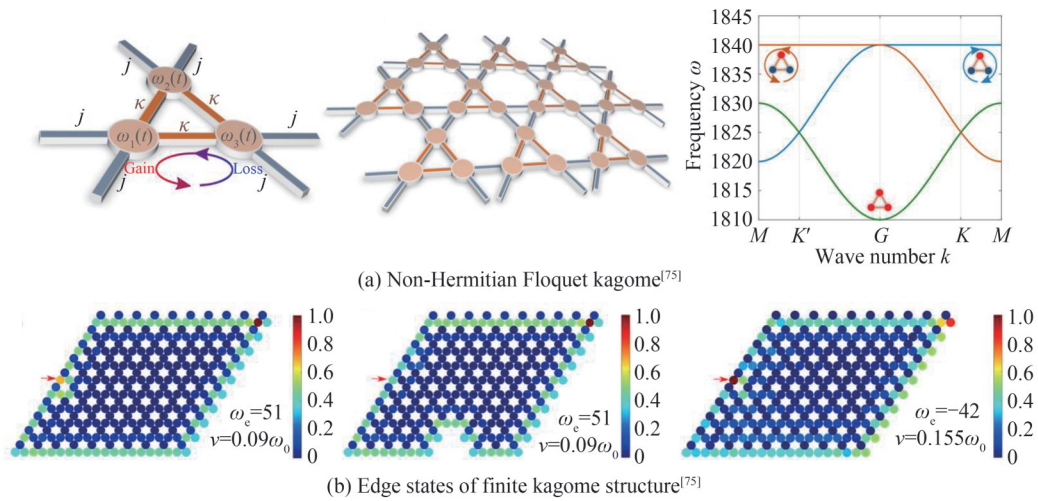
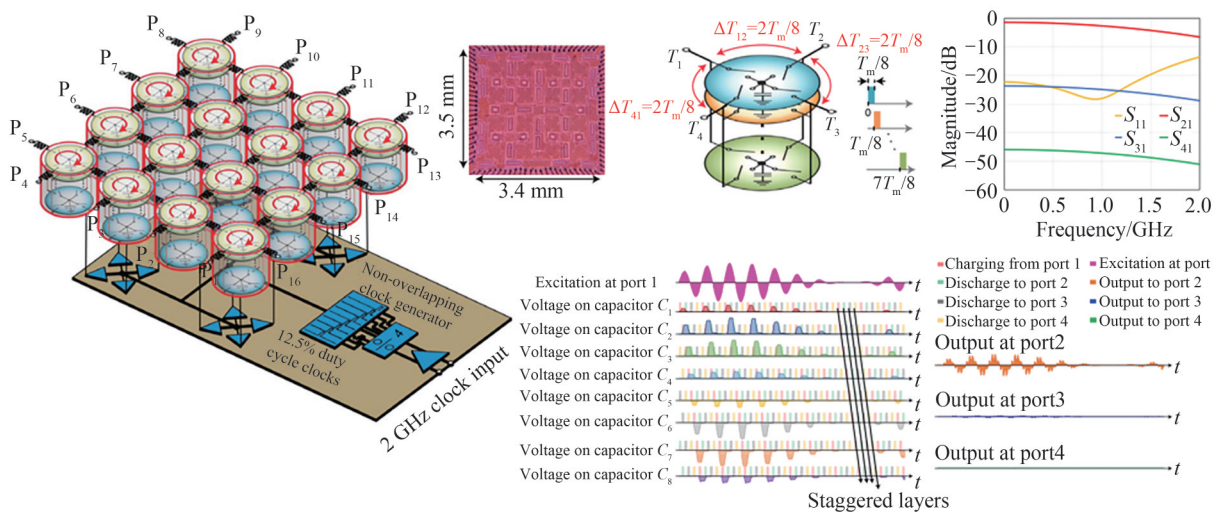


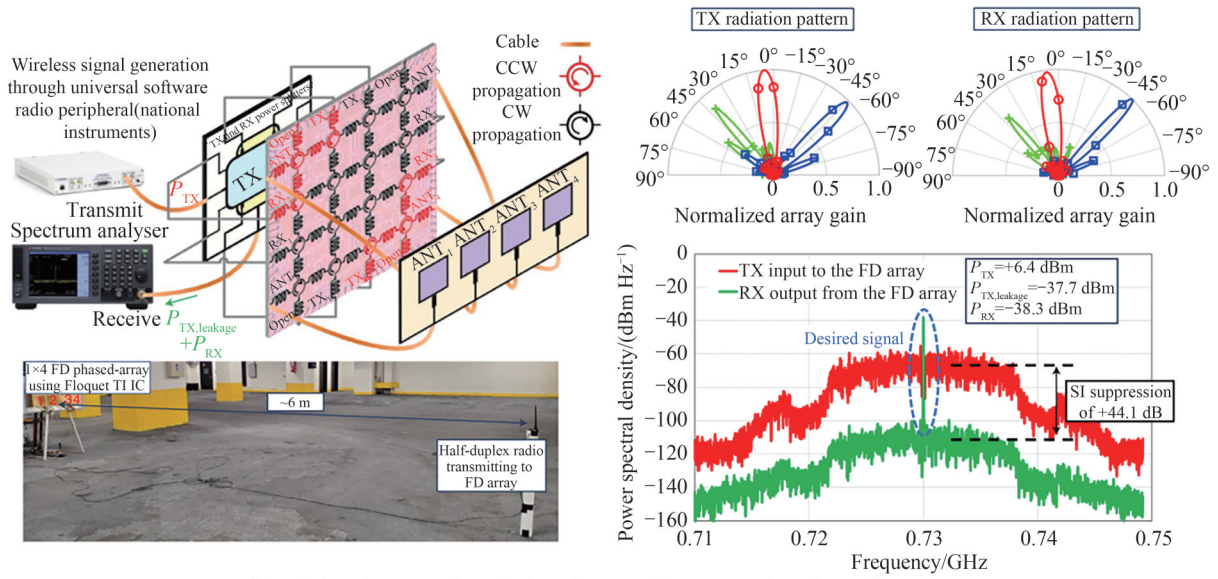
图4 非厄米Floquet绝缘体中的非互易边缘状态^[75]
 Fig. 4 Nonreciprocal edge states in non-Hermitian Floquet insulators^[75]

Floquet拓扑绝缘体实验实现完全依赖于用相关的空间维度替换时间,导致倏逝耦合光波导阵列沿传播方向在空间中缓慢调制。这些系统并没有明显地打破时间反演对称性,因此,它们不能提供隔离和强拓扑保护。此外,真正的Floquet拓扑绝缘体需要在一个大的阵列中通过加载相位同步的时间调制信号来实现^[78-79],因此实验验证十分困难。

最近,ALÙ A等基于合成角动量偏置开发了弹性动力学Floquet拓扑绝缘体^[79]。然而,该方法很难在更大尺度或集成小型化结构中实现。Floquet拓扑光子绝缘体还通常表现出一个拓扑保护带隙,限制在一个狭窄的工作波长范围内,因此限制了它们的实际影响^[41,43,78-82]。2022年,ALÙ A等^[83]报道了一种新型的电磁波Floquet拓扑绝缘体,即Floquet拓扑电磁电路。该拓扑绝缘体的单元通过准静电可切换电容网络实现宽带合成旋度^[84]。与传统的构造拓扑绝缘体方法相比,该方法每个单元的旋转实际上都是准静电的,因此整个Floquet晶格的占用空间可以缩小到亚波长,并且更容易进行相位同步调制,而不需要一个波长数量级的晶格周期来打开带隙,从而占用较小的面积。ALÙ A等还展示了该方法在实际5G无线系统中的应用,提供了比以前的拓扑光子绝缘体系统宽几个数量级的带宽。此外,这种方法适合于紧凑的亚波长外形,克服了与调制信号分布相关的挑战,并允许集成到CMOS芯片中。这些结果为可重构拓扑绝缘体的实际应用提供了一条途径,可以作为无线通信系统、雷达和量子信息处理系统的互易/非互易信号复用器。如图5(b)所示,为了说明该Floquet拓扑绝缘体的实际应用价值,它被用作5G相控阵的可重构天线接口。此外,它也可以用于超宽带脉冲雷达波束赋形以及多比特量子计算中。



(a) 4×4 dispersion-free Floquet TI using helicoidally rotating, quasi-electrostatic unit elements^[83]



(b) Wireless demonstration of a four-element 730 MHz FD phased array^[83]

图5 用于5G无线系统的芯片级Floquet拓扑绝缘体^[83]

Fig. 5 Chip-scale Floquet topological insulator used in 5G wireless systems^[83]

2 基于空间调制的Floquet拓扑光子绝缘体

考虑到基于时间调制的Floquet拓扑光子绝缘体理论方面受限于二维紧束缚模型本身固有的局限性,以及实验方面有源电子器件开关切换频率无法满足实验需求这两个因素,该领域的实验演示受到了很大的限制。为解决这个问题,国内外研究学者们开始探索其他的途径。其中,基于空间调制的Floquet拓扑光子绝缘体是一个备受关注的新方向。该方法使用空间 z 维替代时间维度,在不需要过高的电子器件开关切换频率的情况下,仍能够实现Floquet拓扑光子绝缘体的相关拓扑特性,因此在该领域受到了极大的关注并获得了极大的发展。

2.1 基本原理

2013年,RECHTSMAN M C等^[41]理论提出并实验验证了一种可以在没有外加磁场下存在无散射边缘传输的拓扑光子绝缘体。该系统由一组倏逝耦合的螺旋波导^[88]排列在石墨烯状蜂窝状晶格^[85-87]中组成。光的近轴衍射用薛定谔方程描述,其中传播坐标(z)等效为“时间”轴^[89],波导的螺旋度打破了Floquet拓扑光子绝缘体在 z 轴方向的空间反演对称性。这种结构导致单向态在拓扑上受到保护,不受散射影响。

在该研究中,薛定谔型(Schrödinger-type)方程被用来描述光在光子晶格中的近轴传播^[41]

$$i\partial_z \psi(x, y, z) = -\frac{1}{2k_0} \nabla^2 \psi(x, y, z) - \frac{k_0 \Delta n(x, y, z)}{n_0} \psi(x, y, z) \quad (6)$$

式中, $\psi(x, y, z)$ 为 $E(x, y, z) = \psi(x, y, z) \exp(ik_0 z - i\omega t)$ 定义的电场包络函数; E 是电场, x 是单位向量, t 是时间; ∇^2 为拉普拉斯算子,局限于横(x - y)平面; $k_0 = \frac{2\pi n_0}{\lambda}$ 为背景介质中的波数; $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ 为光频; c 和 λ 分别是光速和波长。背景介质是折射率 $n_0 = 1.45$ 的熔融二氧化硅, $\Delta n(x, y, z)$ 是“有效势”,即与背景折射率的偏差。该研究采用飞秒激光写入法制作阵列;每个椭圆波导有一个截面,其长轴直径和小轴直径分别为 $11 \mu\text{m}$ 和 $4 \mu\text{m}$ 。光子晶格是一种倏逝耦合波导阵列,排列在蜂窝状结构中,最邻近间距为 $15 \mu\text{m}$ 。总传播长度(在 z 方向)是 10 cm ,对应于完成一个单一波导模式的波函数 ψ ,在从 $z=0$ 到 $z=10 \text{ cm}$ 的传播过程中,相位上有20个周期,与波导相关的折射率增加 $\Delta n = 7 \times 10^{-4}$ 。式中的量子力学模拟描述了粒子随时间演化的传播,例如固体中的电子。此处,波导可以构建出势阱,类比于固体中的原子核。因此,光在螺旋波导阵列中沿 z 方向的传播,就相当于电子在二维晶格中运动时的时间演化,即电子围绕原子在二维晶格中随时间旋转的过程。

图6(a)和6(b)展示了光子晶格的显微镜图像以及其排列在蜂窝晶格中的螺旋波导示意图。由于螺旋

波导的周期非常小,导模可以沿着弯曲的波导绝热地传播。该研究将坐标转换为一个参考系,其中波导在 z 方向上是不变的(即直的),即 $x'=x+R\cos(\Omega z)$, $y'=y+R\sin(\Omega z)$ 和 $z'=z$,其中 R 是螺旋半径, $\Omega=\frac{2\pi}{Z}=2\pi/1\text{ cm}$ 是旋转频率($Z=1\text{ cm}$ 是周期)。在变换后的坐标中,光的演化被描述为^[41]

$$i\partial_z\psi' = -\frac{1}{2k_0}(\nabla' + iA(z'))^2\psi' - \frac{k_0 R^2 \Omega^2}{2}\psi' - \frac{k_0 \Delta n(x', y')}{n_0}\psi' \quad (7)$$

式中, $\psi' = \psi(x', y', z')$, $A(z') = k_0 R \Omega [\sin(\Omega z'), -\cos(\Omega z'), 0]$ 等价于与空间均匀圆极化电场相关的矢量势。导模的绝热性和矢量势的存在引出一个耦合模方程,通过Peierls替换^[40]

$$i\partial_z\psi_n(z') = \sum_{\langle m \rangle} c e^{iA(z')r_{nm}} \psi_m(z') \quad (8)$$

对相邻波导求和,式中, $\psi_n(z')$ 是第 n 个波导的振幅, c 是波导之间的耦合常数, r_{nm} 是波导 m 和 n 之间的位移。由于式(8)中右边的式子与 z 相关,因此不存在静态本征模。相反,该解用Floquet模式描述,形式为 $\psi_n(z') = \exp(i\beta z')\varphi_n(z')$,其中函数 $\varphi_n(z')$ 为 Z 周期的。这就产生了 β (Floquet特征值或“准能量”)作为Bloch波矢(k_x, k_y)的函数的频谱,以及它们相关的Floquet特征模。 z 方向上的Floquet本征模等价于 x - y 平面上的Bloch模。因此,输入光束(初始波函数)激发了Floquet模的叠加。非螺旋波导($R=0$)的带结构如图6(c)所示。第一和第二带之间的锥形交点是“狄拉克点”,这是石墨烯作为半金属的一个特征。当波导被做成螺旋形($R>0$),Floquet光谱中的带隙打开,如图6(d)所示,光子晶格演变为具有拓扑边态的Floquet拓扑光子绝缘体。

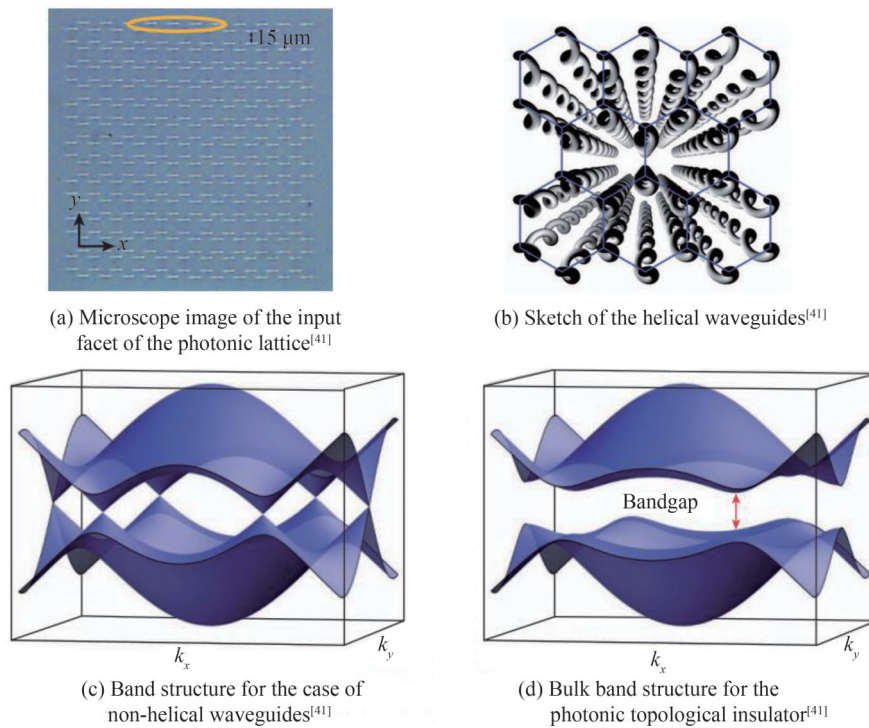


图6 蜂窝Floquet拓扑光子绝缘体晶格的几何和能带结构^[41]

Fig. 6 Geometry and band structure of honeycomb photonic Floquet topological insulator lattice^[41]

2.2 物理实现平台

2013年,CRESPIA等^[90]通过调节光波导晶格来等效实现时间调制的石墨烯模型系统,分别实验证明了在线性和圆极化单色光的照射下,会发生价带和导带的部分和完全坍塌。实验中使用了飞秒激光直写的波导阵列(如图7(a)~(c)所示),并在基于光传输的光子模型中进行了验证。同年,LUMER等^[91]提出了拓扑光子绝缘体中的孤子现象:在非线性拓扑光子绝缘体中形成了自束缚的波包,产生了拓扑边态。尽管这些自生实体在体中,但却表现出类似于它们的线性对应物在拓扑绝缘体边缘的单向传输特性(如图7(d)所示)。在Floquet拓扑绝缘体中,当波包通过非线性诱导螺旋光波导的蜂窝晶格中的缺陷区域时,形成孤子,同时波包填充该区域的连续旋转的外(或内)边态。

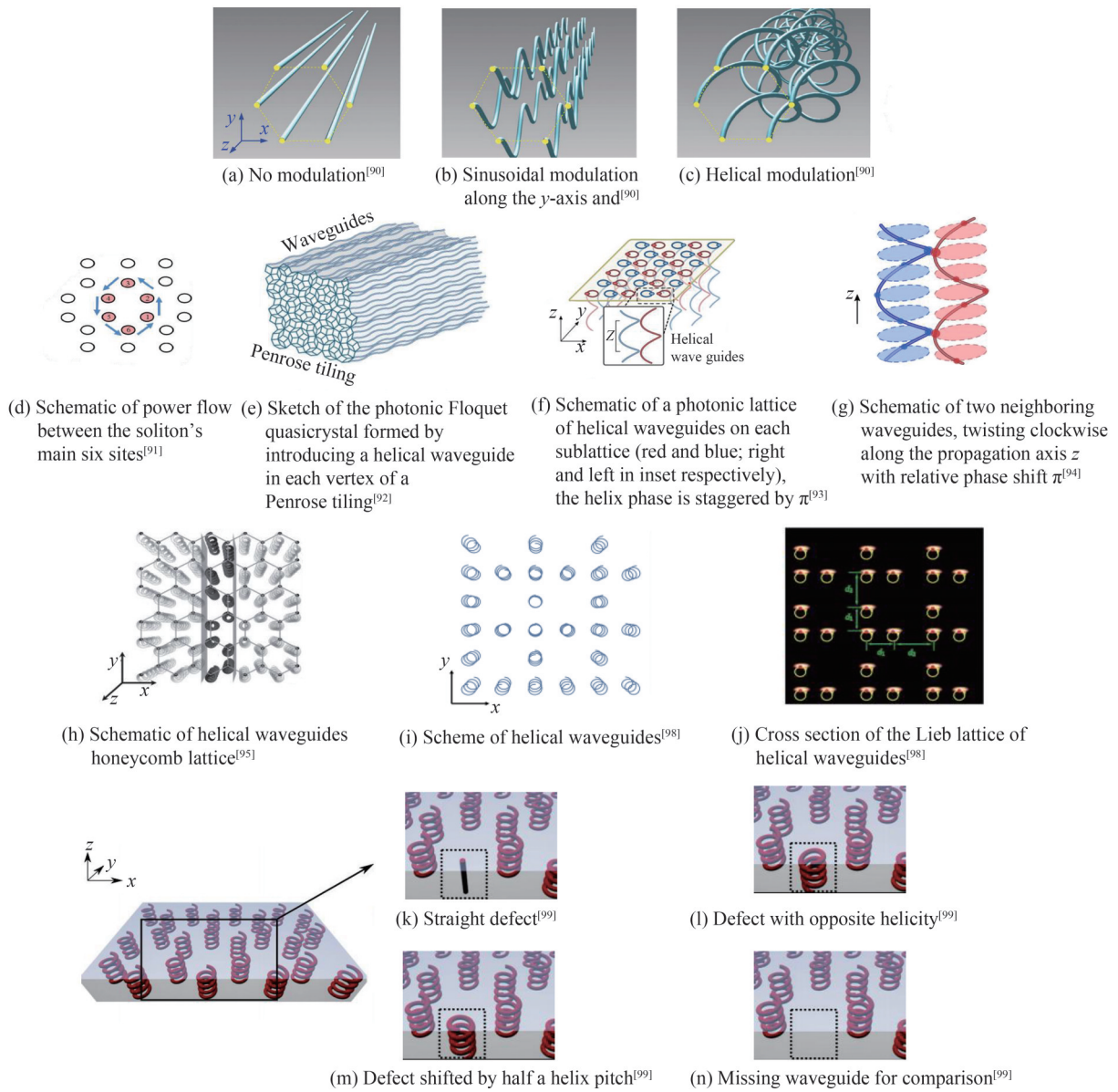


图7 早期基于空间调制的Floquet拓扑光子绝缘体的物理实现平台^[90-95,98-99]
 Fig. 7 Initial platforms of FTPI based on spatial modulation^[90-95,98-99]

2016年, BANDRES M A等^[92]证明了在没有施加任何磁场的情况下,通过动态调制引入一个人工规范场,二维准晶体可能具有一个拓扑相位。这种拓扑准晶体表现出沿系统边缘扩展的无散射单向边态,与普通准晶体系统的状态相反,其特征是指数衰减。他们发现,该Floquet拓扑准晶体的光谱表现出丰富的拓扑“微小带隙”分形结构,表现出一个全新的现象:分形拓扑系统。这些拓扑小间隙只有在系统尺寸足够大时才会形成,因为它们的无间隙边态会深入到体中。在他们的设置中,在彭罗斯镶嵌(Penrose tiling)的每个顶点放置一个螺旋波导,形成一个光子准晶体,如图7(e)所示,且波导的耦合随着波导间距离 d 的指数衰减。LEYKAM等^[93]理论上证明了拓扑光子绝缘体可以支持强自束缚并沿晶格边缘单向传播的边缘孤子。在具有局部Kerr非线性的介质中,拓扑光子绝缘体由耦合螺旋波导的Floquet晶格组成。孤子的行为受到线性晶格拓扑相位的强烈影响。他们演示了使用孤子通过窄通道进行选择滤波,并使用孤子碰撞进行光开关的过程。光子晶格如图7(f)所示,由二维方形晶格交错组成,使相邻的波导(在不同的子晶格中)具有 π 的螺旋相移。因此,在每个螺旋周期中,各波导依次接近其四个相邻波导。

同年, LEYKAM D等^[94]提出了一种基于交错螺旋晶格(如图7(g)所示)的Floquet拓扑光子绝缘体,并提出了一种计算其Floquet能带结构的高效数值方法。该晶格支持具有零陈数和可调拓扑相变的反常

Floquet拓扑绝缘体相位。在拓扑相变的临界点,能带结构有一个未配对狄拉克锥,从而产生奇异的传输效应:锥形衍射的离散类比物,不受谷间散射限制的弱反局域化效应,以及安德森局域化的抑制。与以往的设计不同,等效的规范场强度可以通过螺旋间距离等晶格参数来控制,显著降低辐射损耗,并使可切换拓扑波导等应用成为可能。同年,LUMERY等^[95]分析了非线性玻色子拓扑绝缘体中扩展的边态的稳定性。他们发现,尽管在线性系统中边态是受拓扑保护的,这些非线性态总是不稳定的。为了使结果更加具体,他们使用光子平台,将结果推广到其他玻色子系统,并给出了低非线性和高非线性两种极端情况下的详细描述,并讨论了非线性边态分解为光孤子的问题(如图7(h)所示)。2017年,GUGLIELMONJ等^[96]预测近轴光通过倏逝耦合的螺旋波导阵列传播时的拓扑相变。作为相变的结果,他们观察到一个拓扑边态反转其横向传播方向。

外尔费米子(Weyl fermions)是一对重叠的具有相反手性的新粒子,这种神奇的粒子带有电荷,不具有质量,它是赫尔曼·外尔(Hermann Weyl)于1929年提出。三维波矢空间中的两个能带之间的线性简并点被称为“外尔点”,外尔点是产生贝里曲率(Berry Curvature)的拓扑源,因此外尔点又被称作动量空间中的磁单极。对微波光子晶体和半金属TaAs中的外尔点的观察引起了研究人员的极大兴趣。2017年,NOHJ等^[97]报道了在光学频率下的“II型”外尔光点的实验观察,其中光子在一个空间方向上具有严格的正群速度。他们使用由激光波导组成的三维结构,当频率调谐到外尔点时,通过观察沿单轴的圆锥形方向来显示II型外尔点的存在,并观察了类费米弧的表面态。在光学频率上的外尔点的实现为进一步探索这些新的电磁模式在线性、非线性和量子光学的背景下提供了可能。同年,LONGYang等^[98]研究了光子Floquet-Lieb晶格中的Landau-Zener Bloch振荡,其中构造了二聚螺旋波导(如图7(i),(j)所示),通过Floquet机制实现了人造自旋-轨道相互作用,能够研究从平庸间隙到非平庸间隙的拓扑相变的影响。由Lieb晶格局部对称支持的平坦带的紧凑局域态将与拓扑不变量陈数相关联,并参与Bloch振荡过程中的Landau-Zener跃迁。2017年,JÖRG C等^[99]在研究拓扑绝缘体中缺陷随时间变化的情况下,探究了边态对缺陷的鲁棒性是否依然成立。该研究着重研究了时变耦合缺陷对螺旋弯曲波导Floquet系统沿边缘传输鲁棒性的影响(如图7(k)~(n)所示)。波导阵列是通过直接激光写入负性光刻胶中制造的。结果表明,即使在时间调制很强时,单个动态缺陷也不会破坏手性边缘电流的存在。

由于拓扑保护,拓扑绝缘体会沿其边缘表现出鲁棒性和无散射传输,并独立于系统和边缘的微小细节。为了在没有附加对称性的情况下对二维系统的拓扑特性进行分类,人们通常使用陈数,因为它们的总和来自特定带隙以下的所有带,等于穿过该带隙的手性边态的净数量。然而,这只在静态哈密顿量的设置中才能严格等效。陈数不能给出周期驱动系统的拓扑性质的完整描述。针对这一问题,MACZEWSKY L J等^[81]于2017年研究了空间周期性驱动的光子波导(如图8(d)所示),并在这种反常Floquet拓扑绝缘体中演示了受拓扑保护的无散射边缘传输。2017年,MUKHERJEE S等^[80]展示了第一个实验观测到的反常拓扑边态。他们在一个超快激光内切光子晶格(如图8(b)所示)中演示了这种制造技术,其中每个键都是独立和动态的寻址,晶格中存在的四种不同的键(如图8(a)所示)能够产生一个丰富的带结构,具有鲁棒的反常手性边态和完美局域体态的潜力(如图8(c)所示)。在波导阵列中,传播方向 z 起着类似于时间的作用。2018年,GUGLIELMONJ等^[100]在一个由倏逝耦合的螺旋波导组成的光子系统中(如图8(e),(f)所示)展示了Floquet系统,即当通过增加驱动场的振幅来远离弱场状态时,可能会遇到一系列的拓扑相变,使系统处于不同的拓扑相。他们通过实验证明了在弱驱动和强驱动状态之间移动,可以诱导一个相变,其中体拓扑不变量改变符号,并且相关的拓扑边态反转其传播方向。

2019年,HÖCKENDORF B等^[101]证明了在非厄米Floquet拓扑光子绝缘体中,可以解除体-边对应关系对边界传输的限制(如图8(g),(h)所示)。该研究通过探索具有非厄米时间反演对称性的Floquet拓扑绝缘体的可能性,利用非厄米性对边态进行工程设计,可以独立于体来修改边态,而不牺牲其拓扑性质。该研究揭示了非厄米性质在拓扑绝缘体中的重要作用,并为进一步探索非厄米拓扑物理提供了新的可能性。同年,AMRITHANATH A K等^[102]研究了Floquet拓扑光子绝缘体的特性,该系统允许光沿其边缘无散射传播,由蜂窝晶格排列的螺旋波导构成。当用PFTI边缘的输入光束照射时,光从波导系统的一端沿着边缘传播到另一端。从理论上发现,光的强度和最终位置取决于波导的核心和包层的折射率的差异。IVANOV S

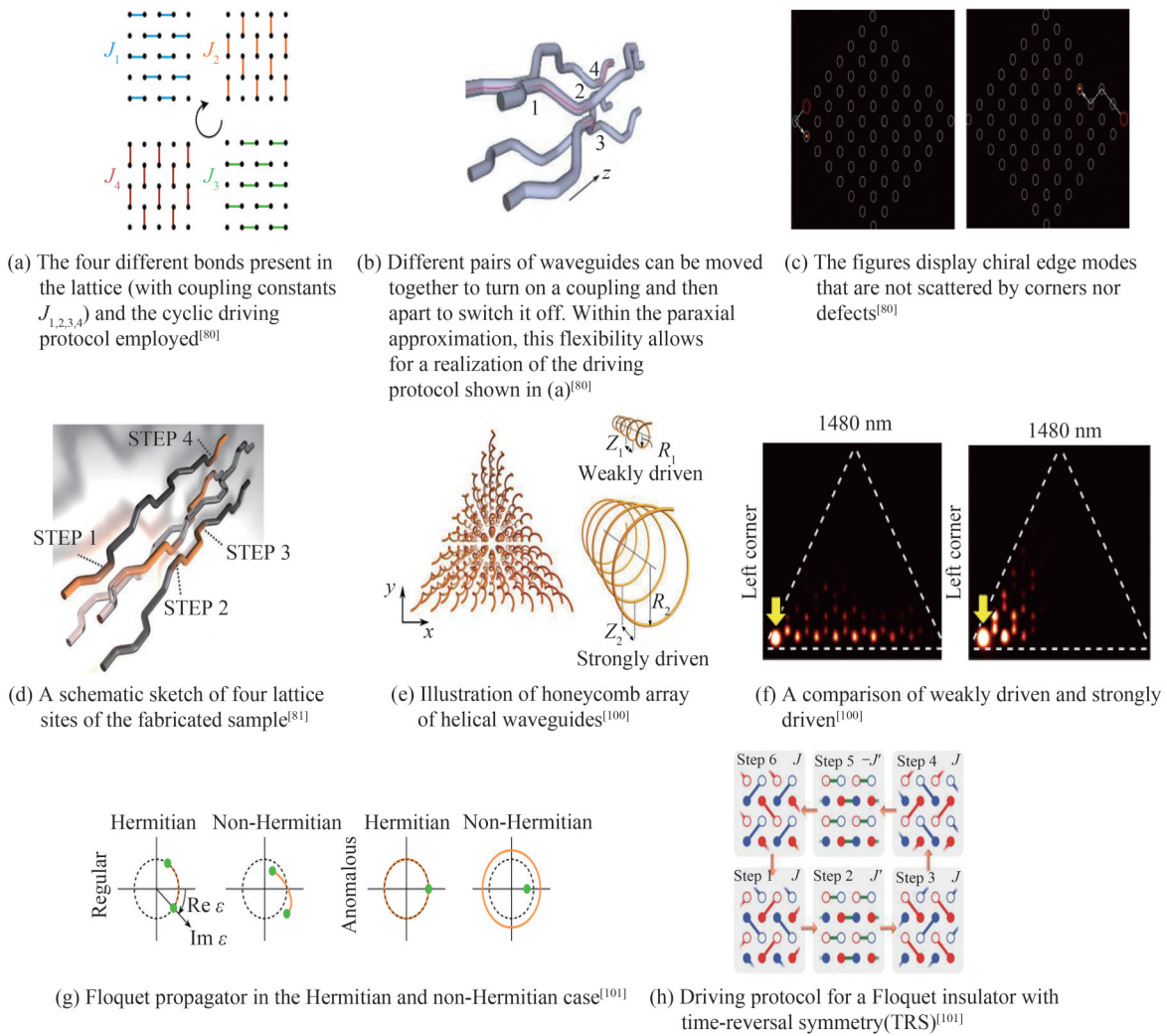


图8 近期基于空间调制的Floquet拓扑光子绝缘体的物理实现平台^[80-81,100-101]

Fig. 8 Recent platforms of FTPI based on spatial modulation^[80-81,100-101]

K等^[109]介绍了一类基于Floquet拓扑光子绝缘体概念的拓扑激光器。该系统被实现为激光螺旋波导的截断阵列(如图9(a)所示),其中赝磁场由波导沿传播方向的扭曲而产生,打破了时间反演对称性,打开了一个拓扑带隙。当在阵列的边缘通道中提供足够的增益时,系统就会进入拓扑边态。研究结果表明,拓扑激光仅在Bloch动量的一定间隔内是稳定的,这确保了线性放大和非线性吸收之间稳定的动态平衡。此外,他们还通过模拟晶格缺陷和波导的三角形排列来说明边缘电流的拓扑鲁棒性。LUSTIG E等^[103]实验验证了一个在合成维度上的拓扑光子绝缘体(如图9(b)所示)。这种合成维度的实验光子系统研究开启了大量未探索的物理现象,如PT对称、拓扑绝缘体激光器等。ZHONG Hua等^[104]利用理论和数值方法研究了kagome螺旋波导阵列的拓扑绝缘体性质。螺旋度打破了kagome晶格的时间反演对称性,形成了一个拓扑光子绝缘体。该研究通过计算能带结构的贝里曲率和陈数验证了螺旋度变化引起的拓扑相变,并证明了边态在一定动量值下的单向传播特性和拓扑保护特性。研究还发现,Kagome螺旋波导阵列可以支持一种沿相同边界但相反的传播方向拓扑边态。

2020年,YANG Zhaoju等^[105]提出了Floquet分形拓扑绝缘体,其中光子被限制在由螺旋波导组成的分形晶格中,形成拓扑边缘态(如图9(c)所示)。螺旋调制可以构建人工规范场,进一步诱导拓扑相变。研究表明即使在无序情况下,光波包也可以沿着分形晶格外边缘传播,且不会穿透体或发生后向散射(如图9(d)所示)。此外,当分形达到足够高时,分形格的内边缘也表现出鲁棒的传输。最后,他们发现,尽管从二维过渡到分形维数,拓扑边态仍可以从蜂窝格的边缘传播到分形结构的边缘,几乎没有散射。同年,IVANOV S

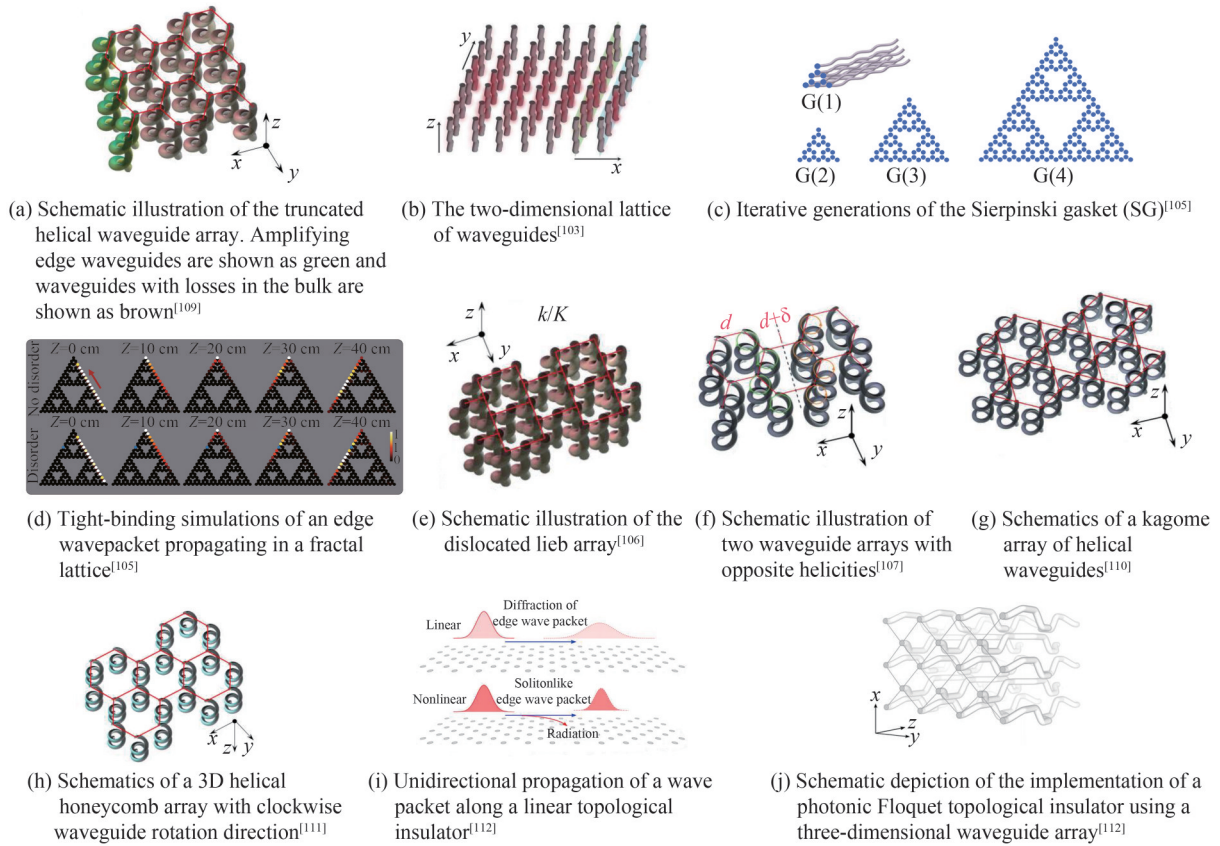

 图9 最近基于空间调制的Floquet拓扑光子绝缘体的物理实现平台^[103, 105-107, 109-112]

 Fig. 9 Current platforms of FTPI based on spatial modulation^[103, 105-107, 109-112]

K等^[106]描述了螺旋波导的连续错位Lieb阵列中的拓扑边态光孤子(如图9(e)所示)。该结构的线性Floquet谱表现出两个拓扑间隙,由于边态的传播常数对Bloch动量的非单调依赖性,可以构造出沿同一边界向不同方向传播的拓扑边态光孤子。这使得他们能够研究沿相反方向的边缘孤子的碰撞。这种孤子总是相互穿透,而没有明显的辐射损失。同年,该研究组^[107]研究了由两个具有相反螺旋度的相同波导组成的蜂窝阵列所构成的Floquet拓扑绝缘体(如图9(f)所示)。阵列之间的分界面支持两种不同的拓扑边态,可以通过调制弱纵向折射率进行谐振耦合。在Kerr非线性存在的情况下,这种耦合的边态使拓扑Bragg孤子成为可能。同年,IVANOV S K等^[108]在一个非线性光学介质中研究了由两个旋转方向相反的螺旋波导的蜂窝阵列组成的矢量拓扑边态光孤子,该结构由两个锯齿形边的蜂窝阵列组成,这两个边界在两个不同的拓扑结构之间形成锯齿形-锯齿形分界面。在线性情况下,该光子绝缘体在两个阵列之间的界面上同时支持两个拓扑保护的左手性边态。当非线性存在时,Floquet边态光孤子会从线性拓扑边态分裂出来。这种孤子是单向的,由于非线性自聚焦效应,它会沿着边缘在两个方向上聚焦,并跨越边缘形成边态。具有相同平均群速度的两个边态的存在使得稳定的拓扑矢量边缘孤子得以稳定的存在,如非线性耦合的亮孤子和暗孤子,它们从拓扑Floquet边态的不同分支中分裂出来。研究提出了一种新的数学描述,用于描述连续系统中的标量和矢量小振幅Floquet包络孤子。对于未来基于Floquet边缘孤子的光子器件的设计来说,研究者发现这种孤子可以用非线性薛定谔方程来描述,而模态包络可以通过在演化坐标上的一个旋转周期上平均得到。

随后,IVANOV S K等^[110]提出了一种基于kagome螺旋波导阵列的Floquet拓扑绝缘体中传播的偶极子拓扑光孤子的理论模型(如图9(g)所示)。该光孤子会劈裂,分解成不同对称性的明亮包络:一个分量是基本的,另一个分量是偶极子的。偶极孤子的形成依赖于kagome阵列独特的光谱特征,该特征允许来自同一边界上不同间隙的两个拓扑边态同时共存。研究组推导了描述偶极孤子分量的包络方程,并在全连续模拟中证明了这种状态可以在数百个螺旋周期内存活,而没有任何明显的辐射进入体。同研究组^[111]还研究了一个Floquet拓扑绝缘体,其结构为在弱双折射介质中印迹的螺旋波导的蜂窝阵列(如图9(h)所示)。该系统

解释了由于Floquet相位匹配而引起的一系列共振中所产生的四波混合现象。随后,IVANOV S K等^[113]于2022年给出了 $\chi^{(2)}$ 非线性介质中第一个由参数相互作用支持的拓扑边态光孤子的例子(如图10(e)所示)。这种孤子存在于Floquet拓扑绝缘体中,是由相位匹配的 $\chi^{(2)}$ 材料制成的螺旋波导阵列实现的。Floquet边缘孤子在沿结构边缘移动时,在大大超过螺旋周期的传播距离上保持局域束缚特性。此外,该研究组还发展了一个关于这种状态的理论。结果表明,Floquet系统中的多色孤子存在于由Floquet相位匹配条件确定的线性共振集附近。2021年,MUKHERJEE S等^[112]通过实验实现了背散射免疫单向类孤子非线性态,其存在于由激光写入的波导组成的拓扑光子绝缘体边缘(如图9(i),(j)所示)。该孤子波包由周围玻璃的光学Kerr非线性形成,具有长寿命的准定域相干结构,能量缓慢地辐射进入体和沿边缘辐射。这种类孤子边态的实现为理解非线性和相互作用的拓扑系统提供了可能。同年,SHI Zhiwei等^[114]研究了由两个螺旋度相反的螺旋波导阵列组成的胡须边缘(Bearded-Bearded Edge, BBE)和扶手椅边缘(Armchair-Armchair Edge, AAE)上的线性和非线性拓扑边态。通过控制螺旋半径、入射角和晶格势的振幅,可以调节线性拓扑边态的鲁棒性。在非线性状态下,他们发现AAE存在具有一定可饱和非线性因子的拟多极晶格准孤子。基于准孤子的强度模式和“质心”的演化过程,他们对这种准孤子的长距离传播动力学进行了数值研究。相反,在相同的条件下,BBE不存在准孤子。

此外,ZHU Weiwei等^[115]研究了周期性驱动的双粒子系统(如图10(a)~(b)所示),该系统包含Floquet高阶拓扑绝缘体(Floquet Higher-Order Topological Insulators, FHOTI)相,并预测该晶格可以在实验中真实的光波导阵列中实现,类似于以前用于研究反常Floquet绝缘体的平台。该模型通过调整耦合强度参数,在不破坏晶格对称性的情况下,表现出了从一阶拓扑相向二阶拓扑相的新奇相变。在FHOTI相中,晶格在特征相0或 π 处存在角态,该角态对个体耦合的无序具有鲁棒性。2022年,BECK J等^[118]介绍了一种新型的Floquet拓扑绝缘体,该绝缘体同时具有Chern数型和反常边态。同年,BIESENTHAL T等^[116]对由边缘位置组成的精确分形拓扑绝缘体进行了研究(如图10(c)所示)。研究表明,螺旋波导的光子晶格支持拓扑保护的手性边态(如图10(d)所示)。同年,LI Chunyan等^[117]研究了具有锯齿形边缘的螺旋波导蜂窝状阵列(如图10(f)所示),可以支持Floquet中的连续体的束缚态(Bound states in the continuum, BICs)。折射率的梯度导致了Floquet-Bloch光谱的强烈不对称性。由于折射率的梯度效应,系统中几乎所有状态都是局域化的,但拓扑边态比其他模态表现出更强的局域化。于此同时,这种强局域的Floquet BICs可以与局域的Wannier-Stark-like体态共存。PYRIALAKOS G G等^[119]通过实验证明,在蜂窝光子晶格中,对增益和损耗

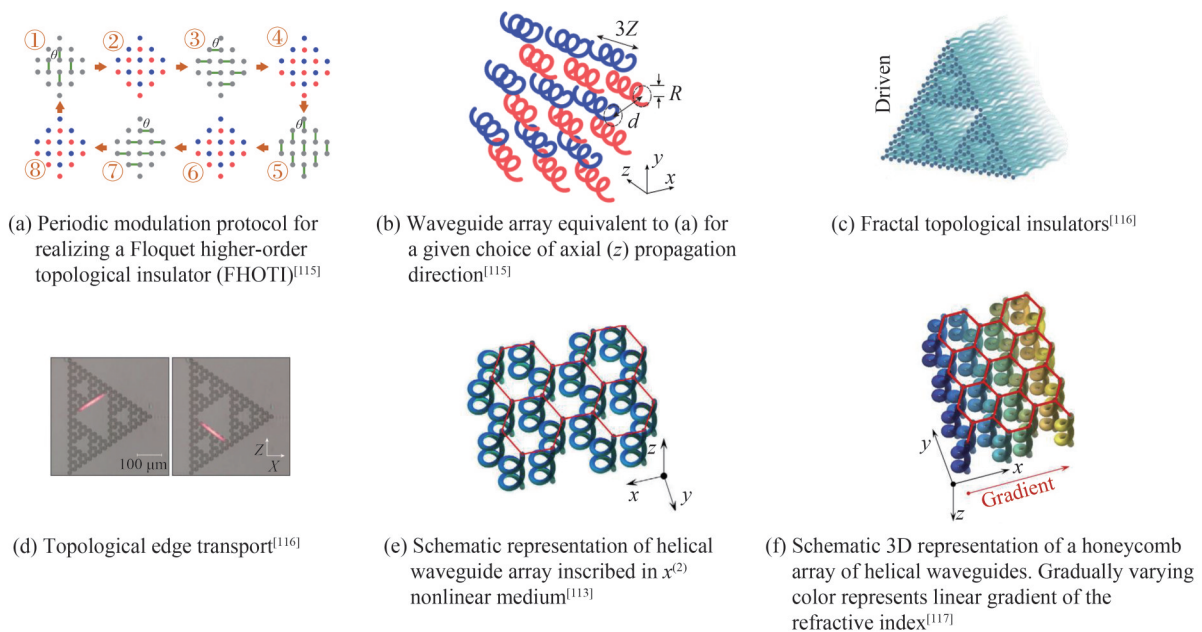


图10 当前基于空间调制的Floquet拓扑光子绝缘体的物理实现平台^[113,115-117]
 Fig. 10 Developing platforms of FTPI based on spatial modulation^[113,115-117]

的合理调制可以产生非平庸的拓扑相位,并证明了具有实特征值的单向边态。作者通过研究一个具有周期性驱动的系统来关注一类Floquet拓扑绝缘体,引入了一种独特的方法,即引入沿系统传播轴的PT对称,来实现非平庸的拓扑相。WICHMANN J等^[120]报道了一个四带类Lieb光子晶格中的拓扑保护边态,结果表明通过采用不同的边缘阶段方式可以人为调控拓扑边态的群速度和振荡模式。

3 基于耦合谐振的Floquet拓扑光子绝缘体

当前受限于磁场与集成微光学系统之间存在的不兼容性,实现在半导体平台上的时间维度调制和空间 z 方向维度调制的集成仍然是一个极具挑战性的难题。为探索并解决这一问题,国内外研究学者做了诸多探索。目前,二维结构的耦合谐振腔光波导(Coupled Resonator Optical Waveguide, CROW)已成为研究拓扑光子绝缘体的有力平台,这归因于其独特的结构以及与传统光子集成电路的兼容性。随着具有拓扑保护的边缘态的CROW理论的提出和相关实验的证明,基于耦合谐振的Floquet拓扑光子绝缘体的研究正在引起越来越多的关注和研究热潮。

拓扑光子学从维度调控出发,可将耦合谐振平台分为一维、二维和三维。一维最具代表性的模型就是Su-Schrieffer-Heeger (SSH)模型,可适用于光学耦合体系,以及一些其他一维结构如一维CROW系统。而二维耦合平台相较而言是最多的,如四方点阵结构、铁磁光子晶体、光学耦合腔、光子晶体板、动态调制谐振器等,Floquet拓扑光子绝缘体作为二维光子系统中拓扑绝缘体的一种类似物,已经在各种平台上进行了研究,如在体积平行板波导中专门设计的光子晶体,在硅晶圆或结构化金属表面上的耦合谐振腔,准晶构型以及网络模型的Floquet构型等。对于三维耦合平台,则主要集中在双螺旋光子晶体,金属劈裂谐振腔,三维立方光子晶体等。本章我们主要聚焦于CROW、耦合环谐振腔系统、表面等离子体激元结构以及周期微环结构(如强耦合八角谐振腔晶格)这几种耦合谐振平台,对其进行了系统地梳理与总结。

3.1 基本原理

HAFEZIM等^[42]于2011年首次提出了利用光学环形谐振腔晶格实现“边缘态”的概念,并开创了基于耦合谐振的Floquet拓扑光子绝缘体的研究。在文献^[42]的研究中,他们模拟了具有简并模(顺时针和逆时针)的二维磁性的紧束缚模型的哈密顿量,并发现了类似传统量子霍尔系统的关键特征,包括霍夫斯塔特蝴蝶^[119-120]和鲁棒的边缘态传输。这种方法并不需要明确的时间反演对称性被破坏^[3,7,123-125],但简并模-时间反转对在电子的量子自旋霍尔效应(Quantum Spin Hall Effect, QSHE)^[23,26,126]中表现类似于自旋-轨道耦合的自旋,并经历一个自旋相关的磁场(如图11(a)所示)。当顺时针和逆时针两种模式被解耦时,他们可以选择性地驱动每个模式,并通过观察量子霍尔行为发现,此时不会打破紧束缚模型的哈密顿量的时间反演对称性。他们表明,光子边缘态对无序不敏感,可以为鲁棒性光学器件奠定基础,因此设计了一种具有拓扑保护功能的鲁棒性光学延迟线。与最先进的一维CROW系统^[127-128]相比,该方法可以更好地抵抗无序散射和制造误差。

该研究提出的系统由光学微环谐振腔组成,能够支持顺时针和逆时针的简并模式(图11(a)),这些模式可视为赝自旋的两个分量,即顺时针自旋($\sigma=-1$ 或赝自旋向下)和逆时针自旋($\sigma=+1$ 或赝自旋向上)。在一维CROW的背景下,谐振腔之间的渐逝耦合已经被广泛研究^[129],其中耦合导致了光子的紧束缚模型和相应的光子能带结构。通过在二维排列中耦合这些模式,该光子系统的动力学由方形晶格上的带电玻色子的哈密顿量描述,但额外增加了一个垂直的、赝自旋相关的等效磁场^[42]

$$H_0 = -\kappa \left(\sum_{\sigma,x,y} \hat{a}_{\sigma,x+1,y}^\dagger \hat{a}_{\sigma,x,y} e^{-i2\pi\alpha y\sigma} + \hat{a}_{\sigma,x,y}^\dagger \hat{a}_{\sigma,x+1,y} e^{i2\pi\alpha y\sigma} + \hat{a}_{\sigma,x,y+1}^\dagger \hat{a}_{\sigma,x,y} + \hat{a}_{\sigma,x,y}^\dagger \hat{a}_{\sigma,x,y+1} \right) \quad (9)$$

式中, κ 为光模式的耦合效率, $\hat{a}_{\sigma,x,y}^\dagger$ 为谐振腔 (x,y) 处的光子产生算符,其具有不同的赝自旋成分($\sigma=\pm 1$),当光子绕着晶格传播时,会获得 $2\pi\alpha\sigma$ 的相位^[130-131]。

为了推导出哈密顿量描述,考虑两个耦合谐振腔,这里只关注每个谐振腔内部的逆时针模式。连接波导的长度选择使得光子分别在波导环路(谐振腔)内进行破坏性(构造性)干涉,因此,它们将被限制在谐振腔而不是波导中。此外,波导上分支和下分支的长度不同,因此当光子从左谐振腔跳到右谐振腔时,它获得的相位与从相反方向跳到右谐振腔时不同。这可以用标准的输入-输出形式进行正式验证^[132]。特别地,左谐振器的边界条件可以写成

$$\hat{E}_x^{\text{out}} = \hat{E}_x^{\text{in}} + \sqrt{2\kappa} \hat{a}_x \quad (10)$$

式中, \hat{E}_x 为第 x 个谐振腔附近的波导电场算符, \hat{a}_x 为谐振腔电场算符。谐振腔场的运动方程是 $\partial_t \hat{a}_x = -\kappa \hat{a}_x - \sqrt{2\kappa} \hat{E}_x^{\text{in}}$, 右谐振器也同样如此。光子在谐振腔之间自由传播, 因此, $\hat{E}_{x+1}^{\text{in}} = -i\hat{E}_x^{\text{out}} e^{-2\pi i \alpha}$ 对于上分支成立, 下分支亦是如此。通过消除波导场, 左、右谐振腔的场动力学将由 $\partial_t \hat{a}_{x(x+1)} = i\kappa e^{\pm 2\pi i \alpha} \hat{a}_{x+1(x)}$ 描述, 与谐振腔之间的光子隧穿一致。两个谐振腔的相应哈密顿量的形式为^[42]

$$H_{\text{two-res}} = -\kappa \hat{a}_{x+1}^\dagger \hat{a}_x e^{-2\pi i \alpha} - \kappa \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_{x+1} e^{2\pi i \alpha} \quad (11)$$

在光学环形谐振腔晶格中, 对逆时针模式(赝自旋向上 $\hat{a}_{\uparrow, x, y}$)的分析表明, 在没有背向散射的情况下, 与顺时针方向模式(赝自旋向下 $\hat{a}_{\downarrow, x, y}$)从时间反演角度是解耦的。同时, 赝自旋向下分量将经历一个与赝自旋向上分量类似但符号相反的磁场($\alpha \rightarrow -\alpha$)。通过在晶格结构中连接谐振腔, 并调整连接波导的相位, 可以将每个晶格周围的获得的相位排列均匀。相位可以通过改变连接波导的长度或通过将环形谐振腔耦合到波导的两侧来调谐。朗道规范实际上是 QSHE 哈密顿量的常见形式(图 11(a)), 类似于固态体系中的时间反转不变的自旋-轨道相互作用^[23, 26, 126], 其中规范场对两个赝自旋分量具有相反的方向。

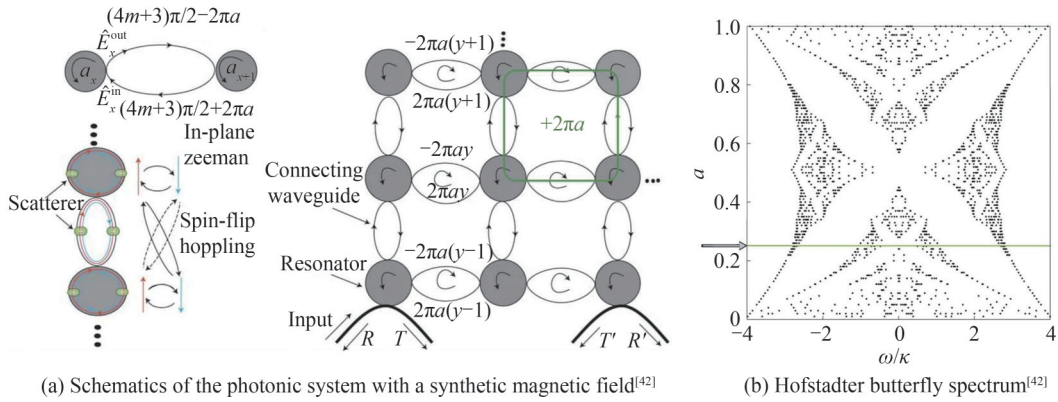


图 11 光学环形谐振腔晶格实现边缘态的理论模型^[42]

Fig. 11 Theoretical model for the realization of edge states in optical toroidal resonant cavity lattices^[42]

3.2 物理实现平台

在过去的研究中, 实现类磁哈密顿量的光子系统通常依赖于外部场, 例如应变^[133]或光学机械诱导的非互易性^[134]。然而, 近期的研究表明外部场并不是实现类磁哈密顿量的必要条件, 因此研究者开始更加关注光子拓扑特性的研究。目前, 在一维光子系统中, 类磁哈密顿量已被广泛探讨^[135]。HAFEZIM 等^[136]首次报道了二维光子系统中类磁哈密顿量的实现, 通过诱导赝自旋-轨道相互作用, 实现了一个合成规范势。由于谐振器的尺寸较大, 这种类磁性哈密顿量的光子可以通过光学成像直接观察波函数, 证明了利用光子学实现拓扑的可行性。然而, 该系统的设计和开发仍存在一定程度的不便, 因为光学或机械系统中的时间调制本身就是一项具有挑战性的任务, 因此相关工作仍停留在理论上。相比之下, 等效调制创造了 Floquet 拓扑绝缘体实际实现的可能性。目前, 大多数等效调制是基于耦合环谐振腔系统。2013年, LIANG G Q 等^[138]提出了一种新的等效调制方法, 证明了零场谐振腔晶格可以支持拓扑绝缘体相。该系统形成一个拓扑光子绝缘体。此前, KHANIKAEV A B 等^[5]也提出了一种不同的拓扑光子绝缘体, 它也不需要非周期性耦合。然而, 该系统依赖于超材料的特殊性能, 而文献^[138]中的系统使用普通的介电材料, 因此可行性和通用性大大提高。

随后, PASEK 等^[135]提出了一项重大的理论创新, 他们指出谐振腔和波导拓扑光子绝缘体^[42, 136, 138]可以建模为 20 世纪 80 年代由 CHALKER J T 和 CODDINGTON P D 开发的网络, 该网络用于研究量子霍尔系统中的 Anderson 相变过程^[139-142](如图 12 所示)。周期性网络模型的 Bloch 模式可以映射到驱动单元格的 Bloch-Floquet 态上^[143]。虽然网络模型的思想在当时未被广泛应用于研究, 但近年来引起了越来越多的关注^[144-149]。网络图允许基于绝热泵浦来制定拓扑不变量^[150-152], 将投影带结构中拓扑保护边缘状态的数量与网络边缘反射系数的圈数联系起来。随后, GAO Fei 等^[43]首次证明了基于网络模型(图 12(b))的反常 Floquet 拓扑绝缘体(AFTI)相位, 他们报道了在微波环境下实现的拓扑设计器表面等离子体激元结构, 该结

构类似于我们熟悉的等离子体激元模式的EM模式。这个高度可调的平台可以在各种不同的缺陷条件下实现探测拓扑边缘状态的鲁棒性。此外,他们提出的表面等离子体激元结构可以作为AFTI的显式实现,这是一个凝聚态环境中尚未实现的拓扑相。在实验中,图12(d)显示了具体的实验样品设置,它由紧密间隔的亚波长金属棒组成,并放置在平坦的金属表面上。每一对相邻的晶格环(设置在一个平方的晶格中)由一个耦合环连接。在此基础上,研究者们深入讨论了AFTI对各种缺陷类别的鲁棒性,并指出这种设计进一步适用于更加灵活的场景。

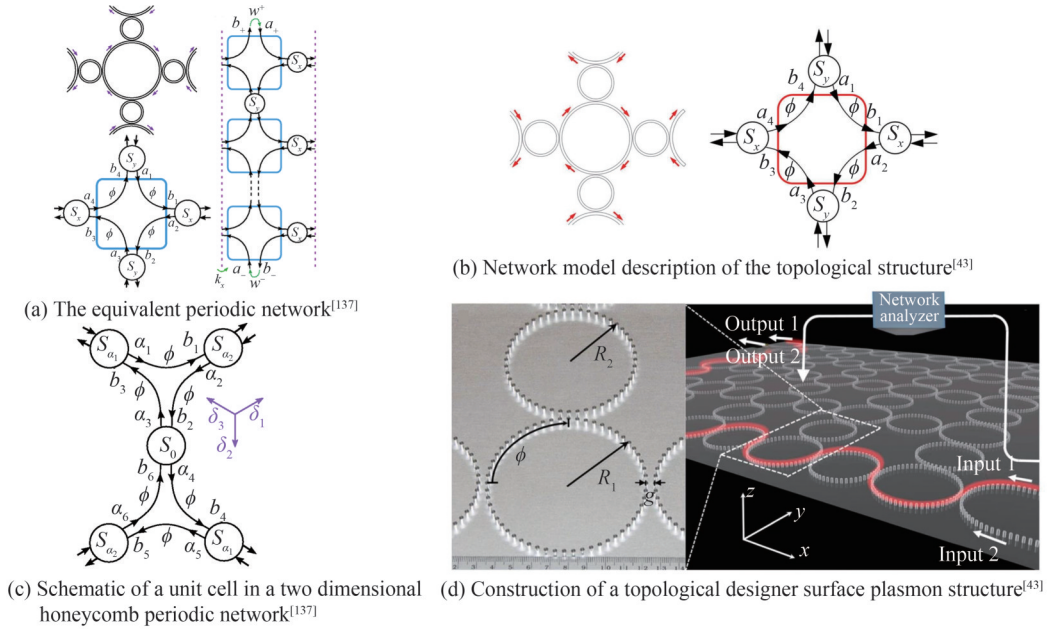


图12 谐振腔和波导拓扑光子绝缘体的周期网络建模^[43, 137]

Fig. 12 Periodic network model of resonant cavities and waveguide photonic topological insulators^[43, 137]

在2014年,HAFEZI M研究组^[157]成功将光子规范场的实验研究从微波领域^[8, 38, 158]拓展到了光学领域。该研究首次观察到了拓扑保护边缘态在使用传输特性统计分析时的鲁棒性。考虑Wigner时延分布^[159-160],可以清晰地从局域体态中区分出损耗边界状态下的非局域扩散输运。该研究提出的系统为研究其他规范场的影响铺平了道路。此外,该研究还通过实验证明边缘的选择性操作可以用来测量拓扑不变量^[161]。这项工作为通过光谱流探索具有合成规范场的系统中的拓扑态提供了一种有趣的方式。拓扑光子绝缘体作为光学系统中的拓扑绝缘体,已经在各种平台上得到了研究^[162-163],但所有这些拓扑光子绝缘体都是刚性的。在技术层面上,柔性电子学^[164-166]和柔性光子学^[167-171]非常需要灵活性。可弯曲和折叠的柔性拓扑绝缘体允许空间拓扑参与操纵拓扑保护的边界状态。2018年,GAO Zhen等^[172]成功地实现了一种纸状柔性拓扑光子绝缘体。无论柔性拓扑光子绝缘体是平坦的还是弯曲的,都可以在其上形成具有拓扑保护的光子态。该研究表明,通过在柔性拓扑系统中引入空间拓扑,可以控制拓扑边界状态的传播。折叠柔性拓扑光子绝缘体所获得的空间拓扑提供了新的自由度,可以用来控制拓扑光子态的传播。这项工作成功地弥合了拓扑光子学领域和柔性光子学领域之间的差距。

此外,YIN Chenxuan等^[173]演示了实验中合成磁场的模拟光子紧束缚哈密顿量,观测到基于氮化硅的CMOS兼容平台上二维CROWs的拓扑鲁棒光子边缘态。结合氮化硅平台和拓扑光子学,他们为未来光子应用的鲁棒延迟线和低成本集成非线性提供了一个新的探索方向。ZHU Xueyi研究组^[174-175]接着提出了一种实验可行的二维蜂窝CROW光子结构设计方案。该光学系统在布里渊带的不同位置具有双重和三重狄拉克点。赝自旋-轨道相互作用实现的等效规范场通过狄拉克点,打开了拓扑非平庸带隙。基于蜂窝状CROW晶格,他们设计了形状无关拓扑腔和分束器,证明了其在广泛的光子应用中的相关性,为量子模拟提供了一个非常好的光学平台。

AO Yutian等^[175]从实际耦合条件出发,探索了CROW系统的实际带结构,并提出了新颖的解决方案。

该研究主要探究两种具有不同物理起源的边缘态,即 IQHE 和 QSHE。在带结构中,前一种类型导致带分裂,边缘状态出现在子带之间的间隙中。通过计算边缘态的数量,可以得到霍夫施塔特蝴蝶谱。而对于后一种边缘态,两种旋转模式不仅是时间反转,而且是赝自旋的。随着耦合强度的增大,两个带逐渐形成狄拉克锥。该方法可以准确地预测特定 CROW 系统的全局属性,从而使其更容易指导应用程序和设备设计。此外,由于耦合在实践中涉及的变量更多,该研究构造了一个三角形晶格 CROW 系统平台(图 13(b)),得到的分形谱仍然与电子系统的结果一致。基于这些结果,他们提出了拓扑保护下具有稳定传输的可重构多路径器件的概念。该课题组还对 CROW 系统在非厄米拓扑光子学方面进行了相关研究,证明了 PT 对称 CROW 系统中拓扑相变的存在性^[44]。厄米 CROW 系统(图 13(c)和(d))由位点环和链接环阵列构成,其中位点环可以看作方格单位点,链接环实现相互作用。研究导出了 $\tan \gamma = \cosh 2\kappa$ 的关系式,揭示了 PT 对称体系中拓扑相变发生的精确条件取决于耦合强度 γ 和增益-损失 κ 的数量。该研究为拓扑相变的调制提供了新的自由度,为拓扑态主动调控的实现提供指导,并为探索高维非厄米系统的拓扑相变提供了条件。2022 年, WANG Wei 研究组^[176]通过对二维光学谐振器阵列中相邻场环与耦合环之间的耦合强度分析,得出了拓扑边缘状态出现的临界条件。该研究采用了时域有限差分法对 CROW 系统进行了仿真,探讨了相邻场环和耦合环之间的耦合对带结构的影响,并对系统达到拓扑状态时的传输性能进行了评估。这些结果为基于拓扑绝缘体的光子通信应用打下了基础。

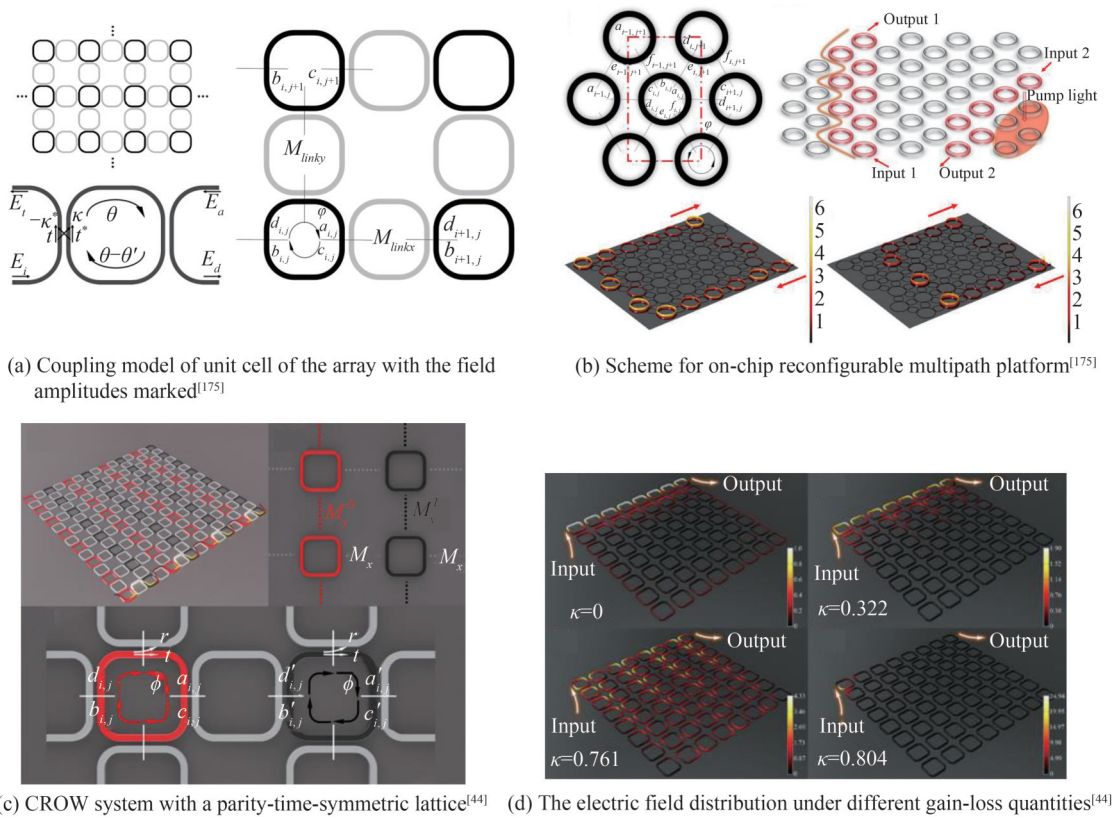


图 13 基于 Floquet-Bloch 理论的 CROW 系统^[44,175]
 Fig. 13 CROW systems based on Floquet-Bloch theory^[44,175]

HAFEZI M 研究组^[177]提出了一种可重构的拓扑光子系统,与以往的耦合环拓扑模型不同,该系统是平移不变的。研究人员证明了在平移不变光学谐振腔晶格中,次近邻耦合提供了一种实现可重构拓扑相位的实用方法,并演示了该系统的可重构性。该研究组^[178]在 2019 年使用耦合环谐振器的周期二维棋盘式晶格模拟了纳米光子的反常量子霍尔系统,此前净通量为零的周期晶格一直无法实现异常量子霍尔相位。通过将晶格中的光强分布进行成像,该研究组揭示了间隙中的拓扑边缘状态,即对缺陷具有鲁棒性,甚至可以在直角周围传播而不散射到中间区域。研究人员通过选择性激发赝自旋,证明了每个解耦赝自旋扇区内的时

间反演对称性被等效地打破,与两个赝自旋相关的边缘状态向相反的方向传播。此外,物质的拓扑相用Berry相位来表征的。研究人员推广了Berry相位和极化量子化之间的基本关系,从偶极矩到多极矩,提出了一类新的拓扑相位,称为高阶拓扑相。这些发现为研究拓扑光子学提供了新的视角。HAFEZI M研究组^[179]还提出了一个集成光子四极子拓扑系统,该系统支持鲁棒角态,并且免疫于耦合强度和现场势的无序扰动。通用集成光学平台为探索更高阶拓扑相下更丰富的物理现象开辟了新的研究路径。

KUDYSHEV Z A等^[180]实验展示了可调谐拓扑相变的概念。他们采用一组加热元件进行积分计算,并引入附加的传播相位,该方法为控制规范磁场提供了一种精确的新途径,从而实现了光子系统拓扑结构的按需和灵活调控。这种拓扑调控是实现拓扑保护光子存储/逻辑器件的关键一步,也是量子通信系统和量子计算领域所需的重要进展之一。此后,该研究组^[181]提出了一种可用于研究拓扑光子态的超快全光调控混合平台。他们理论证明利用透明导电氧化物与绝缘体上的硅相结合的动态特性,为拓扑光子态的超快全光调控提供了一条途径。该方法使用一组强耦合环谐振器,在合成磁场情况下,可以支持光子量子霍尔效应。因此,光子系统拓扑态的超快调控在光子学、凝聚态物理学和量子光学领域开辟了新的前沿。

文献^[182]介绍了利用纳米光学平台实现费米型拓扑绝缘体的实验,具体来说,在强耦合八角谐振腔晶格(图14(a))上实现了反常量子霍尔效应,利用光在每个微环周围的周期演化来模拟哈密顿量,并通过同步和异步耦合之间的差异,在每个单元中实现了强大而非对称的直接耦合。该实验观察到了具有反常拓扑效应的独特光学性质。此外,改变谐振腔之间的耦合系数,可以观察到晶格中的拓扑相变,并且可以通过体带隙中边缘模的形成来识别不同拓扑相图中Floquet和Chern绝缘体的存在。该研究引入了一个新的、多功能的集成光学平台,用于研究强耦合二维系统中的Floquet拓扑特性。

ZIMMERLING T J等^[45]首次报告了Floquet拓扑光子绝缘体晶格(图14(d)和(e))中局域体模共振增强的四波混频效应。该效应是通过驱动序列的周期性扰动诱导的紧凑、无腔的共振效应实现的。强局域的

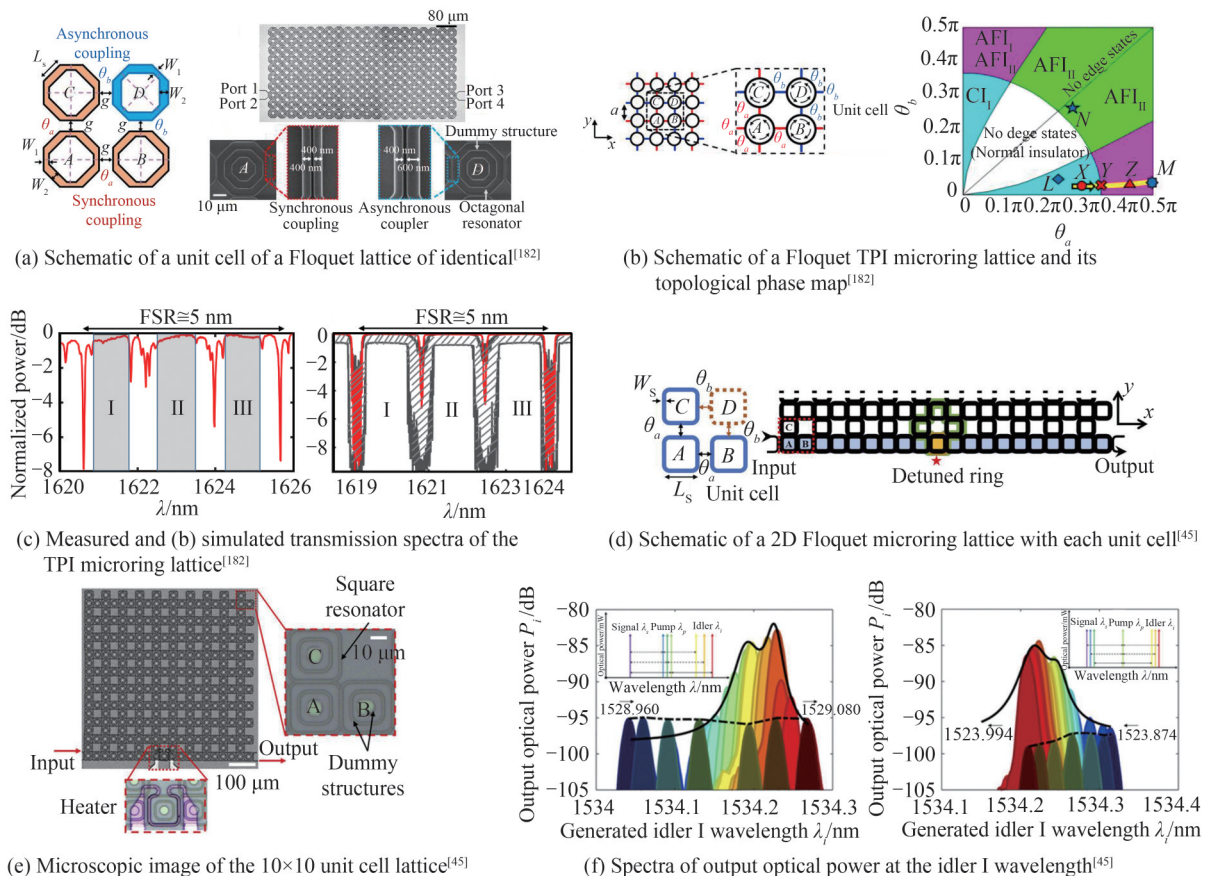


图14 Floquet拓扑光子绝缘体基于实验的理论进展^[45,182]

Fig. 14 Experiment-based theoretical advances in Floquet topological optical insulators^[45,182]

FDMR具有可调谐的准能量,可以跨越光学拓扑绝缘体带隙,提供高品质因子和低色散,从而实现在宽带宽上的高效波长转换。该系统结合了Floquet边缘模式的拓扑保护,为非线性光学应用提供了一个鲁棒的拓扑光子平台。

BANDRES M A 课题组^[183]提出了一种独特的利用拓扑效应的激光器——拓扑绝缘体激光器。这种激光器由于其潜在的拓扑特性而具有高效率、对缺陷和无序的鲁棒性以及能够在非常高的增益下实现单模激光的特点。这种激光器的问世改变了我们对无序和激光之间相互作用的认识,并在拓扑物理学领域开辟了新的发展可能,例如具有增益的系统中的拓扑保护输运。此外,他们在文献^[77]中还实际应用领域设计了一种非磁性拓扑绝缘体激光器,该激光系统的拓扑特性使其具有单模激光、抗制造缺陷的鲁棒性和比同类产品更高的效率。这些研究结果为开发一类新的有源拓扑光子器件,特别是半导体激光器阵列,提供了一种具有高斜率效率的相干工作方式。2021年,MERLO J M等^[46]证实了基于环形波导电路的理论预测。即使相关的Chern数为零,该预测也可以精确地映射到驱动Floquet系统,并支持受保护的边缘态。他们提出使用基于环形波导对称排列的PTIs来配置全光逻辑门。通过在晶格中插入缺陷,该研究团队展示了该器件的鲁棒性(如图15(c)所示)。该研究团队还演示了第一个基于TPES的全光二进制计算器(如图15(b)所示),该设计可以应用于较宽的频率范围和数量较多的逻辑门来执行复杂的计算。

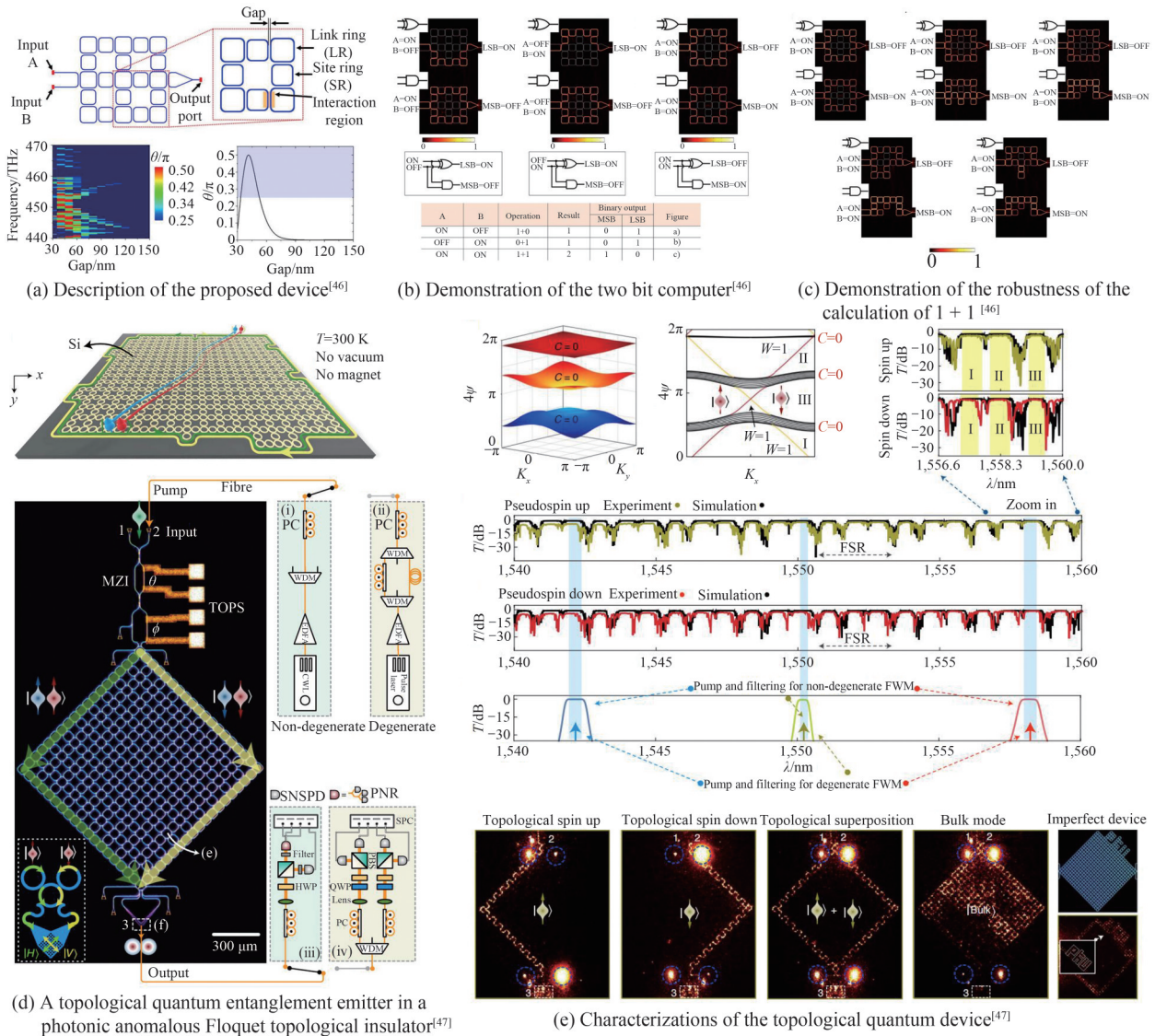


图15 基于耦合谐振的Floquet拓扑光子绝缘体的应用^[46-47]

Fig. 15 Applications of Floquet topological photonic insulators based on coupled resonance^[46-47]

粒子的纠缠态对环境具有内在的敏感性,而物质的拓扑相对环境扰动具有天然的鲁棒性。利用拓扑结构来保护纠缠对实现可靠的量子应用具有很大的潜力。然而,生成拓扑保护纠缠仍然是一个重大挑战,需要在极端条件下操作复杂的量子器件。最近,GONG Qihuang 研究组^[47]报道了从单片集成硅光子芯片中发射拓扑保护纠缠发射机的拓扑 Einstein-Podolsky-Rosen 纠缠态和多光子纠缠态。如图 15(d)所示,他们设计的拓扑保护的纠缠发射器集成了所有的光子组件,结构紧凑,相位稳定,最重要的是对某些缺陷的鲁棒性。通过对德布罗意波长的观察,该研究组在实验上证明了嵌入人工诱导结构缺陷的发射体中纠缠态的拓扑保护,以及拓扑边界上四光子纠缠态的产生。这一研究结果表明,利用拓扑保护纠缠来实现可靠的量子应用具有很大的潜力,同时,此研究也为拓扑量子器件在量子计算和量子拓扑物理研究中的应用提供了有力的支持。

4 总结和展望

Floquet 拓扑光子绝缘体以其独特的物理实现机制和潜在的广泛应用前景,催生了众多新颖的光学器件,引起了学术界的广泛关注。本文综述了基于时间调制、基于空间调制和基于耦合谐振调制的 Floquet 拓扑光子绝缘体的实现方式,分析了相关研究进展,具体内容包括:1)基于时间调制的 Floquet 拓扑光子绝缘体最初由 FAN Shanhui 等人提出,但受限于实验条件,大部分研究停留在理论研究和仿真阶段。直到最近,ALÛ A 等人报道了一种基于准静电螺旋形旋转元件网络的 Floquet 拓扑电路,实验验证了基于时间调制的 Floquet 拓扑光子绝缘体;2)为了克服时间调制的物理实现问题,基于空间调制的 Floquet 拓扑光子绝缘体以某个周期变化的空间维度替代时间维度进行周期性驱动,这种方法易于物理实现,引起了光学领域的极大关注;3)考虑到基于时间调制和空间调制的 Floquet 拓扑光子绝缘体与半导体平台集成的困难,HAFEZI M 等人提出基于耦合谐振调制的 Floquet 拓扑光子绝缘体,人们随后探索了多种基于耦合谐振调制的 Floquet 拓扑光子绝缘体,推动了该领域的快速发展。

展望未来,当前基于时间调制的 Floquet 拓扑光子绝缘体在物理实验平台上依然面临诸多挑战,电磁波激励频率、外部周期调制频率和材料响应频率三者之间还存在很大差距,因而无法深入探索基于时间调制 Floquet 拓扑光子绝缘体的奇异光学特性和独特的物理工作机制。尽管目前基于时间调制 Floquet 拓扑光子绝缘体的研究仍处于起步阶段,实验验证相对困难,然而相较于其他两种调制方式,基于时间调制的方法能够真正打破时间反演对称性。因此,若能克服基于时间调制的物理实现难题,我们有理由相信,Floquet 拓扑光子绝缘体将会取得快速发展。这将进一步推动拓扑光子学、含时系统、基础物理学以及应用物理学等多个相关领域的繁荣发展。对于基于空间调制的 Floquet 拓扑光子绝缘体,当前面临的主要挑战是其三维空间结构所导致的小型化应用限制。因此,发展基于二维空间调制的 Floquet 拓扑光子绝缘体已成为该领域的一个关键研究方向。此外,当前基于空间调制 Floquet 拓扑光子绝缘体的制备材料也相对比较单一,探究如何结合低损耗、高非线性等高性能新兴材料也是该领域的另一个重要研究方向。基于耦合谐振的 Floquet 拓扑光子绝缘体由于结构简单,体积小等优势,具备巨大的应用潜力。该方向当前主要的研究趋势是开发功能多样的拓扑光电器件,但当前主要是在经典物理体系下实现不同功能的光电器件,未来可以在量子体系下研发拓扑量子器件。最后,值得注意的是,人工智能技术正在加速和完善传统光电器件的逆向设计。类似的技术在未来有望应用于 Floquet 拓扑光子绝缘体的设计中,从而帮助研究者在设计过程中考虑更多的自由度。综上所述,Floquet 拓扑光子绝缘体在克服当前挑战后将具有巨大的基础科学研究价值和广泛的应用前景。

参考文献

- [1] CHENG X, JOUVAUD C, NI X, et al. Robust reconfigurable electromagnetic pathways within a photonic topological insulator [J]. *Nature Materials*, 2016, 15(5): 542-548.
- [2] WU L H, HU X. Scheme for achieving a topological photonic crystal by using dielectric material [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(22): 223901.
- [3] NALITOV A, MALPUECH G, TERÇAS H, et al. Spin-orbit coupling and the optical spin hall effect in photonic graphene [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(2): 026803.
- [4] YANG Y, XU Y F, XU T, et al. Visualization of a unidirectional electromagnetic waveguide using topological photonic crystals made of dielectric materials [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(21): 217401.

- [5] KHANIKAEV A B, HOSSEIN MOUSAVI S, TSE W K, et al. Photonic topological insulators [J]. *Nature Materials*, 2013, 12(3): 233-239.
- [6] HALDANE F D M, RAGHU S. Possible realization of directional optical waveguides in photonic crystals with broken time-reversal symmetry [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(1): 013904.
- [7] WANG Z, CHONG Y, JOANNOPOULOS J D, et al. Reflection-free one-way edge modes in a gyromagnetic photonic crystal [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(1): 013905.
- [8] WANG Z, CHONG Y, JOANNOPOULOS J D, et al. Observation of unidirectional backscattering-immune topological electromagnetic states [J]. *Nature*, 2009, 461(7265): 772-775.
- [9] SKIRLO S A, LU L, IGARASHI Y, et al. Experimental observation of large Chern numbers in photonic crystals [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(25): 253901.
- [10] MUKHERJEE S, CHANDRASEKHARAN H K, ÖHBERG P, et al. State-recycling and time-resolved imaging in topological photonic lattices [J]. *Nature Communications*, 2018, 9(1): 4209.
- [11] HAFEZI M, LUKIN M D, TAYLOR J M. Non-equilibrium fractional quantum Hall state of light [J]. *New Journal of Physics*, 2013, 15(6): 063001.
- [12] HARDER G, BARTLEY T J, LITA A E, et al. Single-mode parametric-down-conversion states with 50 photons as a source for mesoscopic quantum optics [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116(14): 143601.
- [13] BARIK S, KARASAHIN A, FLOWER C, et al. A topological quantum optics interface [J]. *Science*, 2018, 359(6376): 666-668.
- [14] CHEN W J, JIANG S J, CHEN X D, et al. Experimental realization of photonic topological insulator in a uniaxial metacrystal waveguide [J]. *Nature Communications*, 2014, 5(1): 5782.
- [15] CHEN Y, CHEN H, CAI G. High transmission in a metal-based photonic crystal [J]. *Applied Physics Letters*, 2018, 112(1): 013504.
- [16] KLITZING K V, DORDA G, PEPPER M. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance [J]. *Physical Review Letters*, 1980, 45(6): 494.
- [17] THOULESS D J, KOHMOTO M, NIGHTINGALE M P, et al. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential [J]. *Physical Review Letters*, 1982, 49(6): 405.
- [18] KOHMOTO M. Topological invariant and the quantization of the Hall conductance [J]. *Annals of Physics*, 1985, 160(2): 343-354.
- [19] JACKIW R, REBBI C. Solitons with fermion number $\frac{1}{2}$ [J]. *Physical Review D*, 1976, 13(12): 3398.
- [20] HATSUGAI Y. Chern number and edge states in the integer quantum Hall effect [J]. *Physical Review Letters*, 1993, 71(22): 3697.
- [21] HATSUGAI Y. Edge states in the integer quantum Hall effect and the Riemann surface of the Bloch function [J]. *Physical Review B*, 1993, 48(16): 11851.
- [22] QI X L, WU Y S, ZHANG S C. General theorem relating the bulk topological number to edge states in two-dimensional insulators [J]. *Physical Review B*, 2006, 74(4): 045125.
- [23] KANE C L, MELE E J. Quantum spin Hall effect in graphene [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(22): 226801.
- [24] KANE C L, MELE E J. Z_2 topological order and the quantum spin Hall effect [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(14): 146802.
- [25] BERNEVIG B A, HUGHES T L, ZHANG S C. Quantum spin Hall effect and topological phase transition in HgTe quantum wells [J]. *Science*, 2006, 314(5806): 1757-1761.
- [26] BERNEVIG B A, ZHANG S C. Quantum spin Hall effect [J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(10): 106802.
- [27] KONIG M, WIEDMANN S, BRUNE C, et al. Quantum spin hall insulator state in HgTe quantum wells [J]. *Science*, 2007, 318(5851): 766-770.
- [28] HASAN M Z, KANE C L. Colloquium: topological insulators [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2010, 82(4): 3045.
- [29] QI X L, ZHANG S C. Topological insulators and superconductors [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2011, 83(4): 1057.
- [30] YOU J W, LAN Z, MA Q, et al. Topological metasurface: From passive toward active and beyond [J]. *Photonics Research*, 2023, 3(11): B65-B102.
- [31] YOU J W, MA Q, ZHANG L, et al. Electromagnetic metamaterials: from classical to quantum [J]. *Electromagnetic Science*, 2023, 1(1): 1-33.
- [32] CHIU C K, TEO J C, SCHNYDER A P, et al. Classification of topological quantum matter with symmetries [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2016, 88(3): 035005.
- [33] VOLOVIK G E. *The universe in a helium droplet* [M]. OUP Oxford, 2003.
- [34] COOPER N R. Rapidly rotating atomic gases [J]. *Advances in Physics*, 2008, 57(6): 539-616.
- [35] DALIBARD J, GERBIER F, JUZELIŪNAS G, et al. Colloquium: artificial gauge potentials for neutral atoms [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2011, 83(4): 1523.

- [36] GOLDMAN N, JUZELIŪNAS G, ÖHBERG P, et al. Light-induced gauge fields for ultracold atoms [J]. *Reports on Progress in Physics*, 2014, 77(12): 126401.
- [37] GOLDMAN N, BUDICH J C, ZOLLER P. Topological quantum matter with ultracold gases in optical lattices [J]. *Nature Physics*, 2016, 12(7): 639-645.
- [38] RAGHU S, HALDANE F D M. Analogs of quantum-hall-effect edge states in photonic crystals [J]. *Physical Review A*, 2008, 78(3): 033834.
- [39] WIMBERGER S, GUARNERI I, FISHMAN S. Classical scaling theory of quantum resonances [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(8): 084102.
- [40] FANG K, YU Z, FAN S. Realizing effective magnetic field for photons by controlling the phase of dynamic modulation [J]. *Nature Photonics*, 2012, 6(11): 782-787.
- [41] RECHTSMAN M C, ZEUNER J M, PLOTNIK Y, et al. Photonic floquet topological insulators [J]. *Nature*, 2013, 496(7444): 196-200.
- [42] HAFEZI M, DEMLER E A, LUKIN M D, et al. Robust optical delay lines with topological protection [J]. *Nature Physics*, 2011, 7(11): 907-912.
- [43] GAO F, GAO Z, SHI X, et al. Probing topological protection using a designer surface plasmon structure [J]. *Nature Communications*, 2016, 7(1): 11619.
- [44] AO Y, HU X, YOU Y, et al. Topological phase transition in the non-Hermitian coupled resonator array [J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(1): 013902.
- [45] ZIMMERLING T J, AFZAL S, VAN V. Broadband resonance-enhanced frequency generation by four-wave mixing in a silicon Floquet topological photonic insulator [J]. *APL Photonics*, 2022, 7(5): 056104.
- [46] MERLO J M, WU X, KEMPA K, et al. All-optical logic gates based on anomalous Floquet photonic topological insulator structures [J]. *Journal of Optics*, 2021, 23(6): 065001.
- [47] DAI T, AO Y, BAO J, et al. Topologically protected quantum entanglement emitters [J]. *Nature Photonics*, 2022, 16(3): 248-257.
- [48] NOVOSELOV K S, MISHCHENKO A, CARVALHO O A, et al. 2D materials and van der Waals heterostructures [J]. *Science*, 2016, 353(6298): aac9439.
- [49] CAO Y, FATEMI V, FANG S, et al. Unconventional superconductivity in magic-angle graphene superlattices [J]. *Nature*, 2018, 556(7699): 43-50.
- [50] RICKHAUS P, DE VRIES F K, ZHU J, et al. Correlated electron-hole state in twisted double-bilayer graphene [J]. *Science*, 2021, 373(6560): 1257-1260.
- [51] BENDER C M, BOETTCHER S. Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry [J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(24): 5243.
- [52] DISA A S, NOVA T F, CAVALLERI A. Engineering crystal structures with light [J]. *Nature Physics*, 2021, 17(10): 1087-1092.
- [53] RUDNER M S, LINDNER N H. Band structure engineering and non-equilibrium dynamics in Floquet topological insulators [J]. *Nature Reviews Physics*, 2020, 2(5): 229-244.
- [54] DUTT A, MINKOV M, LIN Q, et al. Experimental band structure spectroscopy along a synthetic dimension [J]. *Nature Communications*, 2019, 10(1): 3122.
- [55] KOUTSERIMPAS T T, FLEURY R. Electromagnetic fields in a time-varying medium: exceptional points and operator symmetries [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2020, 68(9): 6717-6724.
- [56] MOORE F, ROBINSON J, BHARUCHA C, et al. Observation of dynamical localization in atomic momentum transfer: A new testing ground for quantum chaos [J]. *Physical Review Letters*, 1994, 73(22): 2974.
- [57] FAUSTI D, TOBEY R, DEAN N, et al. Light-induced superconductivity in a stripe-ordered cuprate [J]. *Science*, 2011, 331(6014): 189-191.
- [58] MI X, IPPOLITI M, QUINTANA C, et al. Time-crystalline eigenstate order on a quantum processor [J]. *Nature*, 2022, 601(7894): 531-536.
- [59] OKA T, KITAMURA S. Floquet engineering of quantum materials [J]. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2019, 10: 387-408.
- [60] CARTELLA A, NOVA T F, FECHNER M, et al. Parametric amplification of optical phonons [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2018, 115(48): 12148-12151.
- [61] MCIVER J W, SCHULTE B, STEIN F U, et al. Light-induced anomalous Hall effect in graphene [J]. *Nature Physics*, 2020, 16(1): 38-41.
- [62] SHAN J-Y, YE M, CHU H, et al. Giant modulation of optical nonlinearity by Floquet engineering [J]. *Nature*, 2021, 600(7888): 235-239.
- [63] FANG K, YU Z, FAN S. Photonic Aharonov-Bohm effect based on dynamic modulation [J]. *Physical Review Letters*,

- 2012, 108(15): 153901.
- [64] AHARONOV Y, BOHM D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory [J]. *Physical Review*, 1959, 115(3): 485.
- [65] WINN J N, FAN S, JOANNOPOULOS J D, et al. Interband transitions in photonic crystals [J]. *Physical Review B*, 1999, 59(3): 1551.
- [66] DONG P, PREBLE S F, ROBINSON J T, et al. Inducing photonic transitions between discrete modes in a silicon optical microcavity [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(3): 033904.
- [67] YU Z, FAN S. Complete optical isolation created by indirect interband photonic transitions [J]. *Nature Photonics*, 2009, 3(2): 91-94.
- [68] FANG K, YU Z, FAN S. Experimental demonstration of a photonic Aharonov-Bohm effect at radio frequencies [J]. *Physical Review B*, 2013, 87(6): 060301.
- [69] LI E, EGGLETON B J, FANG K, et al. Photonic Aharonov-Bohm effect in photon-phonon interactions [J]. *Nature Communications*, 2014, 5(1): 3225.
- [70] TZUANG L D, FANG K, NUSSENZVEIG P, et al. Non-reciprocal phase shift induced by an effective magnetic flux for light [J]. *Nature Photonics*, 2014, 8(9): 701-705.
- [71] FANG K, FAN S. Controlling the flow of light using the inhomogeneous effective gauge field that emerges from dynamic modulation [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(20): 203901.
- [72] FANG K, YU Z, FAN S. Photonic de Haas-van Alphen effect [J]. *Optics Express*, 2013, 21(15): 18216-18224.
- [73] RUDNER M S, LINDNER N H, BERG E, et al. Anomalous edge states and the bulk-edge correspondence for periodically driven two-dimensional systems [J]. *Physical Review X*, 2013, 3(3): 031005.
- [74] YUAN L, FAN S. Topologically nontrivial Floquet band structure in a system undergoing photonic transitions in the ultrastrong-coupling regime [J]. *Physical Review A*, 2015, 92(5): 053822.
- [75] LI M, NI X, WEINER M, et al. Topological phases and nonreciprocal edge states in non-Hermitian Floquet insulators [J]. *Physical Review B*, 2019, 100(4): 045423.
- [76] BAHARI B, NDAO A, VALLINI F, et al. Nonreciprocal lasing in topological cavities of arbitrary geometries [J]. *Science*, 2017, 358(6363): 636-640.
- [77] BANDRES M A, WITTEK S, HARARI G, et al. Topological insulator laser: Experiments [J]. *Science*, 2018, 359(6381): eaar4005.
- [78] FLEURY R, KHANIKAEV A B, ALU A. Floquet topological insulators for sound [J]. *Nature Communications*, 2016, 7(1): 11744.
- [79] DARABI A, NI X, LEAMY M, et al. Reconfigurable Floquet elastodynamic topological insulator based on synthetic angular momentum bias [J]. *Science Advances*, 2020, 6(29): eaba8656.
- [80] MUKHERJEE S, SPRACKLEN A, VALIENTE M, et al. Experimental observation of anomalous topological edge modes in a slowly driven photonic lattice [J]. *Nature Communications*, 2017, 8(1): 1-7.
- [81] MACZEWSKY L J, ZEUNER J M, NOLTE S, et al. Observation of photonic anomalous Floquet topological insulators [J]. *Nature Communications*, 2017, 8(1): 1-7.
- [82] PENG Y G, QIN C Z, ZHAO D G, et al. Experimental demonstration of anomalous Floquet topological insulator for sound [J]. *Nature Communications*, 2016, 7(1): 13368.
- [83] NAGULU A, NI X, KORD A, et al. Chip-scale floquet topological insulators for 5G wireless systems [J]. *Nature Electronics*, 2022, 5(5): 300-309.
- [84] TYMCHENKO M, SOUNAS D, NAGULU A, et al. Quasielectrostatic wave propagation beyond the delay-bandwidth limit in switched networks [J]. *Physical Review X*, 2019, 9(3): 031015.
- [85] PELEG O, BARTAL G, FREEDMAN B, et al. Conical diffraction and gap solitons in honeycomb photonic lattices [J]. *Physical Review Letters*, 2007, 98(10): 103901.
- [86] BAHAT-TREIDEL O, PELEG O, SEGEV M. Symmetry breaking in honeycomb photonic lattices [J]. *Optics Letters*, 2008, 33(19): 2251-2253.
- [87] FEFFERMAN C, WEINSTEIN M. Honeycomb lattice potentials and Dirac points [J]. *Journal of the American Mathematical Society*, 2012, 25(4): 1169-1220.
- [88] SZAMEIT A, NOLTE S. Discrete optics in femtosecond-laser-written photonic structures [J]. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2010, 43(16): 163001.
- [89] LEDERER F, STEGEMAN G I, CHRISTODOULIDES D N, et al. Discrete solitons in optics [J]. *Physics Reports*, 2008, 463(1-3): 1-126.
- [90] CRESPI A, CORRIELLI G, DELLA VALLE G, et al. Dynamic band collapse in photonic graphene [J]. *New Journal of Physics*, 2013, 15(1): 013012.
- [91] LUMER Y, PLOTNIK Y, RECHTSMAN M C, et al. Self-localized states in photonic topological insulators [J].

- Physical Review Letters, 2013, 111(24): 243905.
- [92] BANDRES M A, RECHTSMAN M C, SEGEV M. Topological photonic quasicrystals: fractal topological spectrum and protected transport [J]. Physical Review X, 2016, 6(1): 011016.
- [93] LEYKAM D, CHONG Y D. Edge solitons in nonlinear-photonic topological insulators [J]. Physical Review Letters, 2016, 117(14): 143901.
- [94] LEYKAM D, RECHTSMAN M, CHONG Y. Anomalous topological phases and unpaired Dirac cones in photonic Floquet topological insulators [J]. Physical Review Letters, 2016, 117(1): 013902.
- [95] LUMER Y, RECHTSMAN M C, PLOTNIK Y, et al. Instability of bosonic topological edge states in the presence of interactions [J]. Physical Review A, 2016, 94(2):021801.
- [96] GUGLIELMON J, HUANG S, CHEN K, et al. Prediction and realization of a photonic topological phase transition[C]. Proceedings of the 2017 Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO), 2017.
- [97] NOH J, HUANG S, LEYKAM D, et al. Experimental observation of optical Weyl points and Fermi arc-like surface states [J]. Nature Physics, 2017, 13(6): 611-617.
- [98] LONG Y, REN J. Topological Landau-Zener Bloch oscillations in photonic Floquet Lieb lattices [J]. arXiv preprint arXiv:170601107, 2017.
- [99] JÖRG C, LETSCHER F, FLEISCHHAUER M, et al. Dynamic defects in photonic Floquet topological insulators [J]. New Journal of Physics, 2017, 19(8): 083003.
- [100] GUGLIELMON J, HUANG S, CHEN K P, et al. Photonic realization of a transition to a strongly driven Floquet topological phase [J]. Physical Review A, 2018, 97(3): 031801.
- [101] HOCKENDORF B, ALVERMANN A, FEHSKE H. Non-Hermitian boundary state engineering in anomalous floquet topological insulators [J]. Physical Review Letters, 2019, 123(19): 190403.
- [102] AMRITHANATH A K, WEI H, KRISHNASWAMY S. Direct laser writing of optical biosensor based on photonic Floquet topological insulator for protein detection [C]. Proceedings of the Frontiers in Biological Detection: From Nanosensors to Systems XI, SPIE, 2019.
- [103] LUSTIG E, WEIMANN S, PLOTNIK Y, et al. Photonic topological insulator in synthetic dimensions [J]. Nature, 2019, 567(7748): 356-360.
- [104] ZHONG H, WANG R, YE F, et al. Topological insulator properties of photonic kagome helical waveguide arrays [J]. Results in Physics, 2019, 12: 996-1001.
- [105] YANG Z, LUSTIG E, LUMER Y, et al. Photonic Floquet topological insulators in a fractal lattice [J]. Light: Science & Applications, 2020, 9(1): 1-7.
- [106] IVANOV S K, KARTASHOV Y V, MACZEWSKY L J, et al. Edge solitons in Lieb topological Floquet insulator [J]. Optics Letters, 2020, 45(6): 1459-1462.
- [107] IVANOV S K, KARTASHOV Y V, MACZEWSKY L J, et al. Bragg solitons in topological Floquet insulators [J]. Optics Letters, 2020, 45(8): 2271-2274.
- [108] IVANOV S K, KARTASHOV Y V, SZAMEIT A, et al. Vector topological edge solitons in Floquet insulators [J]. ACS Photonics, 2020, 7(3): 735-45.
- [109] IVANOV S K, ZHANG Y, KARTASHOV Y V, et al. Floquet topological insulator laser [J]. APL Photonics, 2019, 4(12): 126101.
- [110] IVANOV S K, KARTASHOV Y V, HEINRICH M, et al. Topological dipole Floquet solitons [J]. Physical Review A, 2021, 103(5): 053507.
- [111] IVANOV S K, KARTASHOV Y V, KONOTOP V V. Four-wave mixing Floquet topological solitons [J]. Optics Letters, 2021, 46(19): 4710-4713.
- [112] MUKHERJEE S, RECHTSMAN M C. Observation of unidirectional solitonlike edge states in nonlinear Floquet topological insulators [J]. Physical Review X, 2021, 11(4): 041057.
- [113] IVANOV S K, KARTASHOV Y V, SZAMEIT A, et al. Floquet edge multicolor solitons [J]. Laser & Photonics Reviews, 2021, 16(3): 2100398.
- [114] SHI Z, ZUO M, LI H. Edge states supported by different boundaries of two helical lattices with opposite helicity [J]. Results in Physics, 2021, 24: 104191.
- [115] ZHU W, CHONG Y D, GONG J. Floquet higher-order topological insulator in a periodically driven bipartite lattice [J]. Physical Review B, 2021, 103(4) 041402.
- [116] BIESENTHAL T, MACZEWSKY L J, YANG Z, et al. Fractal photonic topological insulators [J]. Science, 2022, 376(6597): 1114-1119.
- [117] LI C, KARTASHOV Y V, KONOTOP V V. Topological Floquet bound states in the continuum [J]. Optics Letters, 2022, 47(19): 5160-5163.
- [118] BECK J, PYRIALAKOS G G, HEINRICH M, et al. Observation of a bimorphic Floquet topological insulator [C].

- Proceedings of the CLEO, 2022.
- [119] PYRIALAKOS G G, BECK J, HEINRICH M, et al. A Floquet topological phase induced by PT-symmetry in 2D photonic lattices[C]. Proceedings of the CLEO, 2022.
- [120] WICHMANN J, HANAFI H, IMBROCK J, et al. Rabi-like oscillations in topologically protected edge states of a photonic Floquet topological insulator[C]. Proceedings of the Nonlinear Photonics, 2022.
- [121] AZBEL M Y. Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field [J]. Soviet Physics JETP-USSR, 1964, 19(3): 634-645.
- [122] KUHL U, STÖCKMANN H J. Microwave realization of the Hofstadter butterfly [J]. Physical Review Letters, 1998, 80(15): 3232.
- [123] CHO J, ANGELAKIS D G, BOSE S. Fractional quantum Hall state in coupled cavities [J]. Physical Review Letters, 2008, 101(24): 246809.
- [124] OTTERBACH J, RUSECKAS J, UNANYAN R, et al. Effective magnetic fields for stationary light [J]. Physical Review Letters, 2010, 104(3): 033903.
- [125] KOCH J, HOUCK A A, LE HUR K, et al. Time-reversal-symmetry breaking in circuit-QED-based photon lattices [J]. Physical Review A, 2010, 82(4): 043811.
- [126] HALDANE F D M. Model for a quantum Hall effect without Landau levels: Condensed-matter realization of the “parity anomaly” [J]. Physical Review Letters, 1988, 61(18): 2015.
- [127] XIA F, SEKARIC L, VLASOV Y. Ultracompact optical buffers on a silicon chip [J]. Nature Photonics, 2007, 1(1): 65-71.
- [128] COOPER M L, GUPTA G, SCHNEIDER M A, et al. Statistics of light transport in 235-ring silicon coupled-resonator optical waveguides [J]. Optics Express, 2010, 18(25): 26505-26516.
- [129] YARIV A, XU Y, LEE R K, et al. Coupled-resonator optical waveguide: a proposal and analysis [J]. Optics Letters, 1999, 24(11): 711-713.
- [130] LANGBEIN D. The tight-binding and the nearly-free-electron approach to lattice electrons in external magnetic fields [J]. Physical Review, 1969, 180(3): 633.
- [131] HOFSTADTER D R. Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields [J]. Physical Review B, 1976, 14(6): 2239.
- [132] GARDINER C W, COLLETT M J. Input and output in damped quantum systems: quantum stochastic differential equations and the master equation [J]. Physical Review A, 1985, 31(6): 3761.
- [133] RECHTSMAN M C, ZEUNER J M, TÜNNERMANN A, et al. Strain-induced pseudomagnetic field and photonic Landau levels in dielectric structures [J]. Nature Photonics, 2013, 7(2): 153-158.
- [134] HAFEZI M, RABL P. Optomechanically induced non-reciprocity in microring resonators [J]. Optics Express, 2012, 20(7): 7672-7684.
- [135] KRAUS Y E, LAHINI Y, RINGEL Z, et al. Topological states and adiabatic pumping in quasicrystals [J]. Physical Review Letters, 2012, 109(10): 106402.
- [136] HAFEZI M, MITTAL S, FAN J, et al. Imaging topological edge states in silicon photonics [J]. Nature Photonics, 2013, 7(12): 1001-1005.
- [137] PASEK M, CHONG Y. Network models of photonic Floquet topological insulators [J]. Physical Review B, 2014, 89(7): 075113.
- [138] LIANG G, CHONG Y. Optical resonator analog of a two-dimensional topological insulator [J]. Physical Review Letters, 2013, 110(20): 203904.
- [139] CHALKER J, CODDINGTON P. Percolation, quantum tunnelling and the integer Hall effect [J]. Journal of Physics C: Solid State Physics, 1988, 21(14): 2665.
- [140] LEE D H, WANG Z, KIVELSON S. Quantum percolation and plateau transitions in the quantum Hall effect [J]. Physical Review Letters, 1993, 70(26): 4130.
- [141] LEE D H. Network models of quantum percolation and their field-theory representations [J]. Physical Review B, 1994, 50(15): 10788.
- [142] KRAMER B, OHTSUKI T, KETTEMANN S. Random network models and quantum phase transitions in two dimensions [J]. Physics Reports, 2005, 417(5-6): 211-342.
- [143] JANSSEN M, METZLER M, ZIRNBAUER M R. Point-contact conductances at the quantum Hall transition [J]. Physical Review B, 1999, 59(24): 15836.
- [144] OKA T, AOKI H. Photovoltaic Hall effect in graphene [J]. Physical Review B, 2009, 79(8): 081406.
- [145] INOUE J I, TANAKA A. Photoinduced transition between conventional and topological insulators in two-dimensional electronic systems [J]. Physical Review Letters, 2010, 105(1): 017401.
- [146] KITAGAWA T, RUDNER M S, BERG E, et al. Exploring topological phases with quantum walks [J]. Physical

- Review A, 2010, 82(3): 033429.
- [147] KITAGAWA T, BERG E, RUDNER M, et al. Topological characterization of periodically driven quantum systems [J]. *Physical Review B*, 2010, 82(23): 235114.
- [148] LINDNER N H, REFAEL G, GALITSKI V. Floquet topological insulator in semiconductor quantum wells [J]. *Nature Physics*, 2011, 7(6): 490-495.
- [149] GU Z, FERTIG H, AROVAS D P, et al. Floquet spectrum and transport through an irradiated graphene ribbon [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 107(21): 216601.
- [150] LAUGHLIN R B. Quantized hall conductivity in two dimensions [J]. *Physical Review B*, 1981, 23(10): 5632.
- [151] MEIDAN D, MICKLITZ T, BROUWER P W. Topological classification of adiabatic processes [J]. *Physical Review B*, 2011, 84(19): 195410.
- [152] FULGA I C, HASSLER F, AKHMEROV A R. Scattering theory of topological insulators and superconductors [J]. *Physical Review B*, 2012, 85(16): 165409.
- [153] HARVEY A. Periodic and guiding structures at microwave frequencies [J]. *IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1960, 8(1): 30-61.
- [154] PENDRY J, MARTIN-MORENO L, GARCIA-VIDAL F. Mimicking surface plasmons with structured surfaces [J]. *Science*, 2004, 305(5685): 847-848.
- [155] HIBBINS A P, EVANS B R, SAMBLES J R. Experimental verification of designer surface plasmons [J]. *Science*, 2005, 308(5722): 670-672.
- [156] YU N, WANG Q J, KATS M A, et al. Designer spoof surface plasmon structures collimate terahertz laser beams [J]. *Nature Materials*, 2010, 9(9): 730-735.
- [157] MITTAL S, FAN J, FAEZ S, et al. Topologically robust transport of photons in a synthetic gauge field [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(8): 087403.
- [158] ZANDBERGEN S R, DE DOOD M J. Experimental observation of strong edge effects on the pseudodiffusive transport of light in photonic graphene [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(4): 043903.
- [159] CHABANOV A, STOYTCHEV M, GENACK A. Statistical signatures of photon localization [J]. *Nature*, 2000, 404(6780): 850-853.
- [160] CHABANOV A, GENACK A. Statistics of dynamics of localized waves [J]. *Physical Review Letters*, 2001, 87(23): 233903.
- [161] MITTAL S, GANESHAN S, FAN J, et al. Measurement of topological invariants in a 2D photonic system [J]. *Nature Photonics*, 2016, 10(3): 180-183.
- [162] POO Y, WU R X, LIN Z, et al. Experimental realization of self-guiding unidirectional electromagnetic edge states [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(9): 093903.
- [163] MA T, KHANIKAEV A B, MOUSAVI S H, et al. Guiding electromagnetic waves around sharp corners: topologically protected photonic transport in metawaveguides [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(12): 127401.
- [164] ROGERS J A, SOMEYA T, HUANG Y. Materials and mechanics for stretchable electronics [J]. *Science*, 2010, 327(5973): 1603-1607.
- [165] KO H C, STOYKOVICH M P, SONG J, et al. A hemispherical electronic eye camera based on compressible silicon optoelectronics [J]. *Nature*, 2008, 454(7205): 748-753.
- [166] GELINCK G H, HUITEMA H E A, VAN VEENENDAAL E, et al. Flexible active-matrix displays and shift registers based on solution-processed organic transistors [J]. *Nature Materials*, 2004, 3(2): 106-110.
- [167] HU J, LI L, LIN H, et al. Flexible integrated photonics: where materials, mechanics and optics meet [J]. *Optical Materials Express*, 2013, 3(9): 1313-1331.
- [168] LI L, LIN H, QIAO S, et al. Integrated flexible chalcogenide glass photonic devices [J]. *Nature Photonics*, 2014, 8(8): 643-649.
- [169] XU X, SUBBARAMAN H, CHAKRAVARTY S, et al. Flexible single-crystal silicon nanomembrane photonic crystal cavity [J]. *Acs Nano*, 2014, 8(12): 12265-12271.
- [170] CHEN Y, LI H, LI M. Flexible and tunable silicon photonic circuits on plastic substrates [J]. *Scientific Reports*, 2012, 2(1): 1-6.
- [171] AKSU S, HUANG M, ARTAR A, et al. Flexible plasmonics on unconventional and nonplanar substrates [J]. *Advanced Materials*, 2011, 23(38): 4422-4430.
- [172] GAO Z, GAO F, ZHANG Y, et al. Flexible photonic topological insulator [J]. *Advanced Optical Materials*, 2018, 6(17): 1800532.
- [173] YIN C, CHEN Y, JIANG X, et al. Realizing topological edge states in a silicon nitride microring-based photonic integrated circuit [J]. *Optics Letters*, 2016, 41(20): 4791-4794.
- [174] ZHU X Y, GUPTA S K, SUN X C, et al. Z₂ topological edge state in honeycomb lattice of coupled resonant optical

- waveguides with a flat band [J]. *Optics Express*, 2018, 26(19): 24307–24317.
- [175] AO Y, HU X, LI C, et al. Topological properties of coupled resonator array based on accurate band structure [J]. *Physical Review Materials*, 2018, 2(10): 105201.
- [176] WANG W, MO W, FANG J, et al. Study on the critical state of 2-D resonators topological insulator [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2021, 58(2): 1–5.
- [177] LEYKAM D, MITTAL S, HAFEZI M, et al. Reconfigurable topological phases in next-nearest-neighbor coupled resonator lattices [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(2): 023901.
- [178] MITTAL S, ORRE V V, LEYKAM D, et al. Photonic anomalous quantum Hall effect [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(4): 043201.
- [179] MITTAL S, ORRE V V, ZHU G, et al. Photonic quadrupole topological phases [J]. *Nature Photonics*, 2019, 13(10): 692–696.
- [180] KUDYSHEV Z A, KILDISHEV A V, BOLTASSEVA A, et al. Photonic topological phase transition on demand [J]. *Nanophotonics*, 2019, 8(8): 1349–1356.
- [181] KUDYSHEV Z A, KILDISHEV A V, BOLTASSEVA A, et al. Tuning topology of photonic systems with transparent conducting oxides [J]. *ACS Photonics*, 2019, 6(8): 1922–1930.
- [182] AFZAL S, ZIMMERLING T J, REN Y, et al. Realization of anomalous Floquet insulators in strongly coupled nanophotonic lattices [J]. *Physical Review Letters*, 2020, 124(25): 253601.
- [183] HARARI G, BANDRES M A, LUMER Y, et al. Topological insulator laser: Theory [J]. *Science*, 2018, 359(6381): eaar4003.

Research Progress of Floquet Topological Photonic Insulators (Invited)

WU Xiongwei, ZHANG Jianan, CHEN Long, LOU Zhuochen, MA Qian,

LIU Shuo, YOU Jianwei

(*State Key Laboratory of Millimeter Waves, School of Information Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 211189, China*)

Abstract: Topological photonics is an important and rapidly growing field that offers a powerful way to manipulate light. The geometric and topological ideas in this field have thoroughly changed our understanding of light propagation. Floquet topological insulators are an important branch of topological photonics, where many novel physical phenomena are waiting to be explored. This is mainly due to the condensed matter community, which utilizes periodically driven systems to reveal new phases of matter that do not exist in equilibrium systems. This paper reviews the research on Floquet topological optical insulators over the last decade, starting from a classification of their implementations as time-based modulation, space-based modulation and resonator-coupling-based modulation of Floquet topological photonic insulators. More specifically, time-modulated Floquet topological photonic insulators represent a unique class of artificial photonic structures with special topological properties, characterized by the dynamic modulation of topological phase through a periodic time function. This modulation method introduces a distinct control mechanism to photonic systems, leading to an unprecedented light transport. A key feature of time-modulated Floquet topological photonic insulators is the realization of topological edge states by breaking time-reversal symmetry. These edge states can propagate unidirectionally along the system boundaries and exhibit robustness against defects and back-scattering. Compared with traditional static topological photonic insulators, the time-based modulation method introduces a new degree of freedom in the temporal domain, thereby offering a wider range of control strategies and application potential. Given the theoretical limitations of time-modulated Floquet topological photonic insulators along with experimental constraints due to the inability of active switching frequencies to meet experimental demands, practically experimental demonstrations in this field have encountered significant restrictions. To address this challenge, researchers have initiated the exploration of alternative methodologies. Among these, space-based Floquet topological photonic insulators have emerged as a noteworthy direction. This approach employs one spatial dimension as a surrogate for the time dimension, thereby enabling the realization of pertinent topological properties in Floquet topological photonic insulators without requiring

additionally high switching frequencies. Therefore, this approach has garnered significant attention and achieved substantial progress in the field. However, due to the incompatibility with integrated photonic systems, the integration of temporal or spatial modulation on a semiconductor platform remains a challenge. To address this issue, the two-dimensional structure of coupled resonator optical waveguides has emerged as a robust platform for the study of topological photonic insulators, thanks to its unique structure and compatibility with traditional photonic integrated circuits. So far, research on Floquet topological photonic insulators based on coupled resonances is garnering increasing attention. In summary, we have demonstrated the unique topological properties and amazing physical phenomena as well as the broad research progress in applications are presented from both theoretical and applied aspects. The achievements and challenges in this field are reviewed and discussed, and further research on Floquet topological photonic insulators is foreseen.

Key words: Topological photonics; Floquet topological photonic insulators; Time modulation; Space modulation; Resonator-coupling modulation

OCIS Codes: 260.2110; 160.5298; 160.3918; 190.4400; 140.3600; 230.7370