

引用格式: GAO Xiaoyu, BAI Jingyuan, HUANG Yangzhi, et al. Hyperspectral Image Denoising Based on Fast Tri-factorization and Group Sparsity Regularized[J]. Acta Photonica Sinica, 2023, 52(4):0430002

高小雨,白静远,黄扬智,等.基于快速三因子分解和组稀疏正则化的高光谱图像去噪[J].光子学报,2023,52(4):0430002

# 基于快速三因子分解和组稀疏正则化的 高光谱图像去噪

高小雨<sup>1</sup>,白静远<sup>1</sup>,黄扬智<sup>2</sup>,宁纪锋<sup>1</sup>

(1 西北农林科技大学 信息工程学院,杨凌 712100)

(2 西北农林科技大学 理学院,杨凌 712100)

**摘要:**为了有效去除高光谱图像中噪声带来的干扰,提升图像质量,在局部低秩和全局组稀疏结合的框架内提出了一种基于快速三因子分解和组稀疏正则化的去噪模型。首先,将高光谱图像分解成若干三维重叠图块并将其逐波段列化成矩阵,在快速三因子分解的框架下将这些矩阵分解为两个正交因子矩阵和一个核心矩阵,对核心矩阵添加  $L_{2,1}$  范数最小化约束;其次,对高光谱图像空间和光谱方向的梯度张量分别添加组稀疏正则化约束;最后,将低秩矩阵的三因子分解和全局组稀疏正则化结合,可以充分挖掘图像的局部低秩和稀疏的先验信息,并去除各种混合噪声。在三个数据集上与五种经典模型相比,该模型的各项评价指标更高,去噪图像保留了更多细节信息,去噪效果更好。

**关键词:**图像处理;图像去噪;高光谱图像;交替方向乘子法;局部低秩;组稀疏

中图分类号:TP301.6

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20235204.0430002

## 0 引言

使用光谱仪对同一场景获取不同光谱的图像被称为高光谱图像(Hyperspectral Image, HSI), HSI能提供丰富的光谱信息,被各领域<sup>[1-3]</sup>广泛应用。然而,由于光照条件、传输条件和成像仪器等多种客观因素的限制,数据在采集和传输过程中不可避免地受到各种噪声的污染,并且由于其丰富的光谱维,其受到的噪声干扰可能性相对更大,噪声会降低图像的辨识度,影响图像质量,并且限制了分类<sup>[4-5]</sup>和解混<sup>[6]</sup>等后续处理任务的精度。因此,作为预处理步骤,HSI去噪是一个重要的研究课题。

目前许多针对HSI的去噪模型<sup>[7-8]</sup>都是基于HSI中的两大重要先验信息,即光谱域的低秩性和空间域的稀疏性。

HSI的光谱维度存在低秩先验,即HSI提供了被观测对象同一场景下数十个至数百个连续波段的光谱信息,所以不同波段之间存在着高相关性,然而直接求解秩函数最小化是一个凸优化问题,CANDES E J等<sup>[9]</sup>提出的鲁棒主成分分析模型(Robust Principal Component Analysis, RPCA)利用非凸的核范数对秩函数进行凸逼近,取得了良好的性能。ZHANG Hongyan和HE Wei等<sup>[10]</sup>在RPCA的框架下对图像进行块处理,然后沿光谱维将三维立方体展开成矩阵,最后使用低秩矩阵复原(Low-Rank Matrix Recover, LRMR)模型恢复矩阵,该做法更好地保存了局部细节和纹理信息,取得了较好的去噪效果。有研究<sup>[11-12]</sup>指出,RPCA模型中的核范数虽然便于计算但是在逼近秩函数时不准确,因此,研究者们致力于开发更精确的低秩近似表示。HUANG Xinjian等<sup>[13]</sup>使用加权核范数来约束低秩先验,提升对秩函数逼近的性能。ZENG Haijin等<sup>[14]</sup>直接定义了张量的秩,提出 $\gamma$ 范数来描述HSI局部块的低秩性质。这些基于低秩矩阵逼近(Low-Rank

基金项目:国家重点研发计划(No. 2016YFD0200700),国家级大学生创新创业训练项目(No. 202110712185)

第一作者:高小雨,2017013078@nwafu.edu.cn

通讯作者:宁纪锋,njf@nwafu.edu.cn

收稿日期:2022-10-09;录用日期:2023-01-03

<http://www.photon.ac.cn>

Matrix Approximation, LRMA)的方法,是通过引入非凸函数来逼近矩阵的秩,但是这会涉及到奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD),存在计算复杂度高的缺点。为解决以上难题,LIU Yuanyuan等<sup>[15]</sup>对低秩矩阵进行快速三因子分解(Fast Tri-Factorization, FTF),将矩阵分解为两个正交因子矩阵和一个秩为 $r$ 的核心矩阵。FTF计算复杂度低,速度快,并且还将低秩约束转移到规模更小的核心矩阵上,所以探索矩阵的低秩性有更高的效率。LIU Qiang等<sup>[16]</sup>在FTF框架下提出了一种基于QR分解的 $L_{2,1}$ 范数最小化方法。该方法在对核心矩阵的约束上,用 $L_{2,1}$ 范数最小化来替换核范数最小化,这两种约束具有相同的最优解,而且使用 $L_{2,1}$ 范数相较于核范数能够带来计算速度上的显著提升。同时,HSI空间维的稀疏性也是常用于去噪的重要先验信息。对于HSI,不同波段的成像场景相同,不同波段的分段平滑结构也应该相同,即所有波段的差分图像在光谱维度上应服从组稀疏结构。这启发研究者们考虑用组稀疏正则化<sup>[17-18]</sup>去表示不同波段的差分图像之间的内部结构特征。CHEN Yong等<sup>[19]</sup>用组稀疏正则化去除条纹,取得了比使用稀疏正则化更好的效果。文献[20]利用加权 $L_{2,1}$ 范数最小化来约束空间差分图像,但是只对两个空间维度上的差分图像进行约束,没有考虑到光谱维度。

现有的去噪模型对于矩阵秩最小化问题,多采用核范数最小化进行不断迭代求解,而每次迭代都涉及到SVD,所以这些算法有很高的计算复杂度;除此之外,全变差(Total Variation, TV)项无法探索空间差分图像的共享组稀疏模式。为了更快速地表示低秩,更精确地表示稀疏,同时保证去噪效果的提升,在FTF与全局组稀疏的启发下,本文提出了基于快速三因子分解和组稀疏正则化的高光谱图像降噪(Fast Tri-factorization And Group Sparsity Regularized Hyperspectral Image Denoising, FTFGS)模型,以更有效地表达HSI的低秩性和全局组稀疏。

## 1 相关工作

### 1.1 HSI的退化模型

假设HSI受到不同种类噪声的污染,该退化模型可表示为

$$O = L + S + N, O, L, S, N \in \mathbb{R}^{M \times N \times p} \quad (1)$$

式中, $O$ 是观测到的含噪图像; $L$ 是清晰的图像; $S$ 表示包括脉冲噪声、死线、条带等稀疏噪声; $N$ 是高斯噪声; $M \times N$ 表示HSI的空间大小, $p$ 表示波段数。

### 1.2 局部RPCA

文献[21]指出局部空间内像素属于同一地物的可能性更大,具有更强的相似性,并利用RPCA模型来探索这种局部低秩先验,提出局部RPCA模型。基于此,定义取块算子 $P_{i,j}: O \rightarrow O_{i,j} = O_{i,j}$ ,表示从高光谱图像 $O$ 的空间位置 $(i,j)$ 截取大小为 $m \times n \times p$ 的子块并逐波段列化成矩阵 $O_{i,j}$ 。相应的, $L_{i,j}$ 和 $S_{i,j}$ 分别是清晰HSI和稀疏噪声张量对应的子矩阵, $\lambda$ 是正则化参数, $\epsilon$ 表示高斯噪声的噪声水平。那么,局部RPCA去噪模型可表示为

$$\min_{L_{i,j}, S_{i,j}} \sum_{i,j} \|L_{i,j}\|_* + \lambda \|S_{i,j}\|_1, \text{ s.t. } \|O_{i,j} - L_{i,j} - S_{i,j}\|_F^2 \leq \epsilon \quad (2)$$

文献[8, 21]等指出局部RPCA以分块方式进行研究具有诸多优势。首先,在局部区域中探索低秩属性更符合HSI的物理特性;其次,局部模型可以减少对噪声是独立同分布这一假设的依赖;最后,这种做法避免了直接将HSI列化后形成病态矩阵,有利于保护局部图块中的细节信息。

### 1.3 快速三因子分解

文献[15]为了降低核范数最小化问题的计算成本,提出了一种基于QR分解的FTF方法。对于秩为 $r$ 的矩阵 $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,它的求解模型为

$$\min_{A, B, C} \|B\|_*, \text{ s.t. } M = ABC, A^T A = I, CC^T = I \quad (3)$$

式中, $A \in \mathbb{R}^{m \times r}$ 是列正交矩阵, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ 是行正交矩阵,核心矩阵 $B \in \mathbb{R}^{r \times r}$ , $r \ll \min(m, n)$ 。FTF模型将矩阵 $M$ 的低秩性转移到核心矩阵 $B$ 的低秩性,即

$$\|M\|_* = \|B\|_* \quad (4)$$

文献[16]对 $B$ 的秩进一步约束,即不仅对 $r$ 进行限制,而且使用 $L_{2,1}$ 范数最小化来替换核范数最小化,提出模型

$$\min_{A,B,C} \|B\|_{2,1}, \text{ s.t. } M=ABC, A^T A=I, CC^T=I \quad (5)$$

式中, $A$ 和 $C$ 可通过QR分解快速求解且计算复杂度仅是SVD的10%<sup>[16]</sup>。相比于传统的SVD,在FTF框架下采用基于QR的 $L_{2,1}$ 范数不但降低了计算的复杂度,而且利用对核心矩阵的秩和范数的约束可以更准确、快速地体现图像的局部低秩特性。

#### 1.4 SSTV的组稀疏表示

由于HSI波段间的高度相关性,不同波段的分段平滑结构也应相同,即,一波段的某一区域是边界,那么相邻波段也是边界;如果该区域平滑,相邻波段也是平滑的。对HSI进行梯度操作之后,边界都非零,平滑区域近似为0,这一物理特性就是HSI的组稀疏特性。文献[20]采用加权的 $L_{2,1}$ 范数探索了HSI空间上两个维度梯度张量的组稀疏结构,其数学表示为

$$\|w \odot FL\|_{2,1} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_x(i,j) \|F_x L(i,j,:)\|_2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_y(i,j) \|F_y L(i,j,:)\|_2 \quad (6)$$

式中, $F=[F_x, F_y]$ ,  $F_x$ 和 $F_y$ 是空间维度的两个差分算子,  $F_x L=L(x+1, y, z)-L(x, y, z)$ ,  $F_y L=L(x, y+1, z)-L(x, y, z)$ ;  $w=[w_x, w_y]$ 中 $w_x$ 和 $w_y$ 表示对空间上两个维度添加的权重。

## 2 基于FTFGS的HSI去噪模型

### 2.1 FTFGS模型

在图1中,对HSI的三个梯度张量每个像素处的梯度光谱曲线求 $L_2$ 范数,并画出它们的直方图。从直方图分布来看绝大多数 $L_2$ 范数值集中在固定的值,表明HSI的梯度张量具有组稀疏的特性,而且这种组稀疏特性不仅存在于空间梯度张量中,也存在于光谱方向的梯度张量中。为了探索HSI每个梯度方向上的组稀疏结构,本文提出一个全新的加权空谱组稀疏正则化 $\|w \odot FL\|_{2,1}$ ,即

$$\|w \odot FL\|_{2,1} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_x(i,j) \|F_1 L(i,j,:)\|_2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_y(i,j) \|F_2 L(i,j,:)\|_2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_z(i,j) \|F_3 L(i,j,:)\|_2 \quad (7)$$

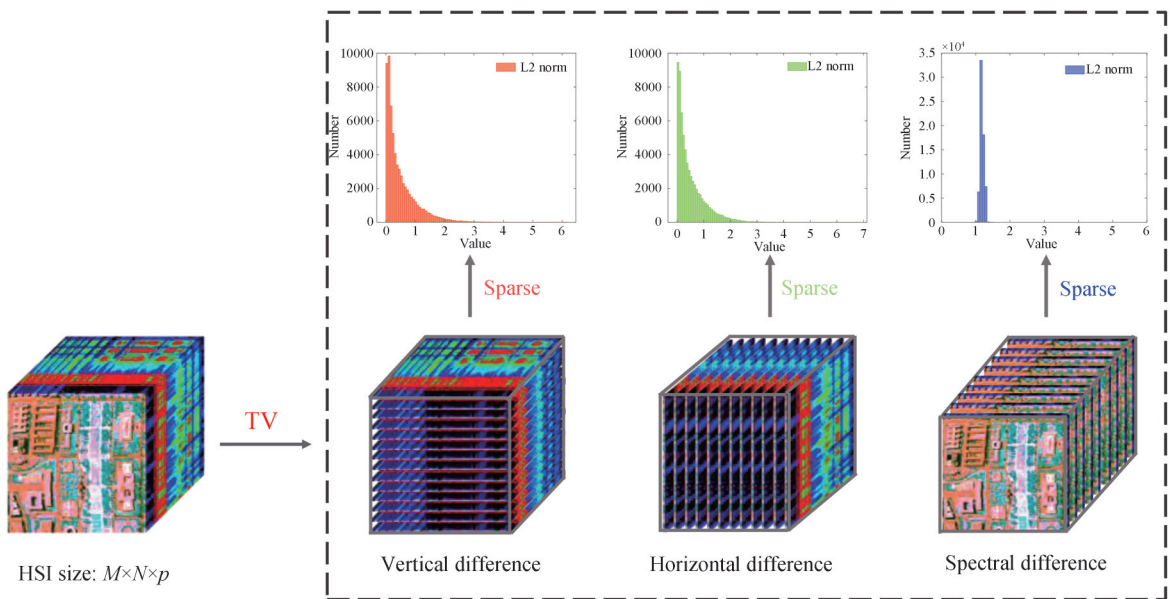


图1 探索HSI的组稀疏性  
Fig. 1 Exploring group sparsity in HSI

式中,  $F = [F_1, F_2, F_3] = [b_x F_x, b_y F_y, b_z F_z]$ , 约束因子  $b$  可以控制不同方向的梯度对模型的影响,  $F_x$ 、 $F_y$  和  $F_z$  分别是空间维度和光谱维度的三个差分算子;  $w = [w_x, w_y, w_z]$  则是对三个维度添加的权重。相较于只对空间维进行约束, 对 HSI 空间和光谱维度的梯度张量都进行组稀疏正则化, 会取得更好的效果。

本文将全局组稀疏和局部 FTF 的低秩表示相结合提出 FTFGS 模型, 即

$$\min_L \sum_{i,j} \left( \|D_{i,j}\|_{2,1} + \lambda \|S_{i,j}\|_1 + \gamma \|N_{i,j}\|_F^2 \right) + \tau \|w \odot FL\|_{2,1}$$

$$\text{s.t. } \|O_{i,j} - L_{i,j} - S_{i,j} - N_{i,j}\| \leq \varepsilon, L_{i,j} = C_{i,j} D_{i,j} R_{i,j}, C_{i,j}^T C_{i,j} = I, R_{i,j} R_{i,j}^T = I \quad (8)$$

式中,  $C_{i,j}$ 、 $D_{i,j}$  和  $R_{i,j}$  分别是将  $L_{i,j}$  进行 FTF 之后得到的列正交矩阵、核心矩阵和行正交矩阵,  $\lambda$ 、 $\gamma$  和  $\tau$  都是正则化参数, 以平衡各个正则项达到更好的去噪效果。从式(8)可以看出 FTFGS 模型的提出侧重于为低秩和稀疏分量分别开发更精确的近似表示, 并在保证最优解的同时带来速度的提升。

模型的整体架构如图 2 所示。可以清楚地看到, 局部模块采用局部 RPCA 模型探索 HSI 低秩性, 不仅符合 HSI 的物理特性, 避免形成病态矩阵, 而且可以更好地保护局部图块中的细节信息。在处理小规模矩阵时, 不同于使用传统 SVD 方法<sup>[10]</sup>, FTF 可以达到速度更快、复杂度更低的效果。在对核心矩阵进行处理时, 不仅对  $r$  进行限制, 而且用  $L_{2,1}$  范数最小化在得到最优解的同时也能够带来计算速度上的显著提升。在全局上, 提出一个全新的加权空谱组稀疏正则化, 相较于只在空间维度进行约束的模型<sup>[20]</sup>, 能充分探索 HSI 三个维度的组稀疏特性从而取得更好的效果, 并且可以有效抑制高斯噪声, 消除分块处理带来的人为结构。FTFGS 模型实现了局部低秩模块和全局组稀疏模块的有效联动, 迭代求解模型至收敛条件, 最终不仅可以去除各种混合噪声, 而且减少了对噪声独立同分布假设的依赖, 有效抑制与结构相关的噪声。

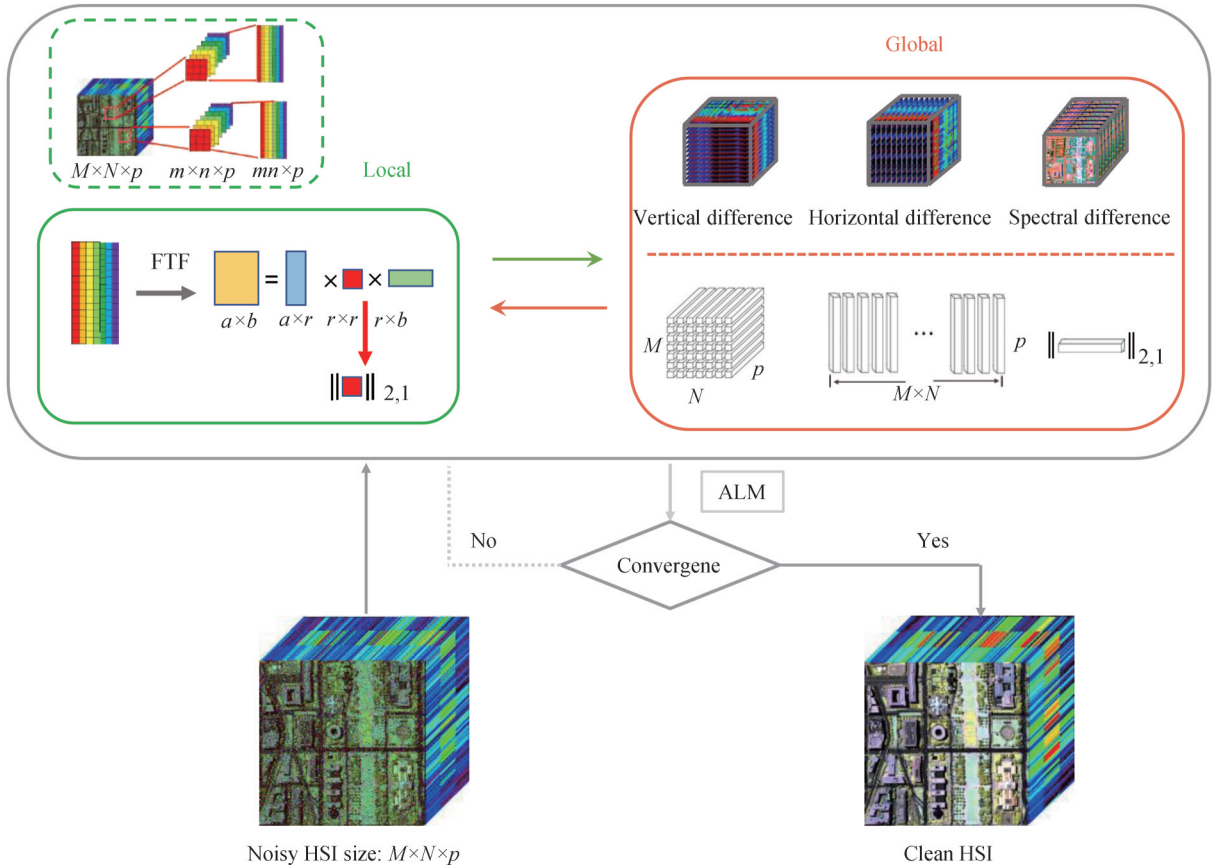


图 2 模型架构  
Fig. 2 Model architecture

## 2.2 模型求解

采用交替乘法<sup>[22]</sup> (Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM) 求解目标函数, 并引入辅助变

量  $J, X \in \mathbb{R}^{M \times N \times \rho}, U \in \mathbb{R}^{M \times N \times \rho \times 3}$ , 式(8)可改写成

$$\min_L \sum_{i,j} \left( \|D_{i,j}\|_{2,1} + \lambda \|S_{i,j}\|_1 + \gamma \|N_{i,j}\|_F^2 \right) + \tau \|w \odot U\|_{2,1}$$

$$\text{s. t. } \|O_{i,j} - L_{i,j} - S_{i,j} - N_{i,j}\| \leq \varepsilon, L_{i,j} = C_{i,j} D_{i,j} R_{i,j}, C_{i,j}^T C_{i,j} = I, R_{i,j} R_{i,j}^T = I, L_{i,j} = J_{i,j}, J = X, U = FX \quad (9)$$

式中,  $F(\cdot)$  是空谱TV算子,  $U = [u_1, u_2, u_3] = [F_1 X, F_2 X, F_3 X]$ 。

利用增广拉格朗日乘子法, 式(9)优化问题可以转化成

$$\begin{aligned} \min_L \sum_{i,j} & \left\{ \|D_{i,j}\|_{2,1} + \lambda \|S_{i,j}\|_1 + \gamma \|N_{i,j}\|_F^2 + \langle \Gamma_{i,j}^O, O_{i,j} - L_{i,j} - S_{i,j} - N_{i,j} \rangle + \frac{\mu}{2} \|O_{i,j} - L_{i,j} - S_{i,j} - N_{i,j}\|_F^2 + \right. \\ & \left. \langle \Gamma_{i,j}^D, L_{i,j} - C_{i,j} D_{i,j} R_{i,j} \rangle + \frac{\mu}{2} \|L_{i,j} - C_{i,j} D_{i,j} R_{i,j}\|_F^2 + \langle \Gamma_{i,j}^L, L_{i,j} - J_{i,j} \rangle + \frac{\mu}{2} \|L_{i,j} - J_{i,j}\|_F^2 \right\} + \\ & \langle \Gamma^X, J - X \rangle + \frac{\mu}{2} \|J - X\|_F^2 + \tau \|w \odot U\|_{2,1} + \langle \Gamma, U - FX \rangle + \frac{\mu}{2} \|U - FX\|_F^2, \text{ s. t. } C_{i,j}^T C_{i,j} = I, R_{i,j} R_{i,j}^T = I \quad (10) \end{aligned}$$

式中,  $\Gamma_{i,j}^O, \Gamma_{i,j}^D, \Gamma_{i,j}^L, \Gamma^X$  和  $\Gamma$  是拉格朗日乘子,  $\mu$  是惩罚参数。在第  $k$  次迭代中, 问题的解可以转化为局部低秩分解子问题与基于SSTV的组稀疏子问题, 即

$$\begin{cases} (C^{k+1}, D^{k+1}, R^{k+1}, L^{k+1}, S^{k+1}, N^{k+1}) = \arg \min_{C,D,R,L,S,N} l(C, D, R, L, S, N, J^k) \\ (J^{k+1}, X^{k+1}, U^{k+1}) = \arg \min_{J,X,U} l(L^{k+1}, J, X, U) \end{cases}$$

2.2.1 固定其他参数, 求解子优化问题  $(C, D, R, L, S, N)$

1) 求解  $C_{i,j}, R_{i,j}$  和  $D_{i,j}$

$$\arg \min_{C_{i,j}, D_{i,j}, R_{i,j}} \left( \|D_{i,j}\|_{2,1} + \langle \Gamma_{i,j}^D, L_{i,j} - C_{i,j} D_{i,j} R_{i,j} \rangle + \frac{\mu}{2} \|L_{i,j} - C_{i,j} D_{i,j} R_{i,j}\|_F^2 \right), \text{ s. t. } C_{i,j}^T C_{i,j} = I, R_{i,j} R_{i,j}^T = I \quad (11)$$

求解  $C_{i,j}$ , 目标式(11)变为

$$\arg \min_{C_{i,j}} \left\| \left( L_{i,j} + \frac{\Gamma_{i,j}^D}{\mu} \right) R_{i,j}^T - C_{i,j} D_{i,j} \right\|_F^2, \text{ s. t. } C_{i,j}^T C_{i,j} = I \quad (12)$$

基于QR分解求  $L_{2,1}$  范数最小化方法<sup>[16]</sup>得到

$$[Q, \sim] = qr \left( \left( L_{i,j} + \frac{\Gamma_{i,j}^D}{\mu} \right) R_{i,j}^T \right) \quad (13)$$

按列求解  $C_{i,j}$  得

$$C_{i,j} = Q(:, 1:r) \quad (14)$$

求解  $R_{i,j}$ , 目标式(11)变为

$$\arg \min_{R_{i,j}} \left\| \left( L_{i,j} + \frac{\Gamma_{i,j}^D}{\mu} \right)^T C_{i,j} - R_{i,j}^T D_{i,j} \right\|_F^2, \text{ s. t. } R_{i,j} R_{i,j}^T = I \quad (15)$$

类似  $C_{i,j}$  求解步骤, 可得

$$[Q, \sim] = qr \left( \left( L_{i,j} + \frac{\Gamma_{i,j}^D}{\mu} \right)^T C_{i,j} \right) \quad (16)$$

按行求解  $R_{i,j}$  得

$$R_{i,j} = Q(1:r, :) \quad (17)$$

求解  $D_{i,j}$ , 将式(11)改写成

$$\arg \min_{D_{i,j}} \|D_{i,j}\|_{2,1} + \frac{\mu}{2} \|D_{i,j} - D_T\|_F^2 \quad (18)$$

式中,  $D_T = C_{i,j}^T \left( L_{i,j} + \frac{\Gamma_{i,j}^D}{\mu} \right) R_{i,j}^T$ , 可利用LNMS<sup>[16]</sup>方法进行求解, 即

$$D_{i,j}(:, k) = \frac{\max \{ \|D_{\tau}(:, k)\|_2 - \frac{1}{\mu}, 0 \}}{\|D_{\tau}(:, k)\|_2} D_{\tau}(:, k), k = 1, 2, \dots, r \quad (19)$$

2) 求解  $L_{i,j}$

$$\arg \min_{L_{i,j}} \langle \Gamma_{i,j}^O, O_{i,j} - L_{i,j} - S_{i,j} - N_{i,j} \rangle + \frac{\mu}{2} \|O_{i,j} - L_{i,j} - S_{i,j} - N_{i,j}\|_F^2 + \langle \Gamma_{i,j}^D, L_{i,j} - C_{i,j} D_{i,j} R_{i,j} \rangle + \frac{\mu}{2} \|L_{i,j} - C_{i,j} D_{i,j} R_{i,j}\|_F^2 + \langle \Gamma_{i,j}^L, L_{i,j} - J_{i,j} \rangle + \frac{\mu}{2} \|L_{i,j} - J_{i,j}\|_F^2 \quad (20)$$

计算得到

$$L_{i,j} = \frac{1}{3} \left[ \left( O_{i,j} - S_{i,j} - N_{i,j} + \frac{\Gamma_{i,j}^O}{\mu} \right) + \left( C_{i,j} D_{i,j} R_{i,j} - \frac{\Gamma_{i,j}^D}{\mu} \right) + \left( J_{i,j} - \frac{\Gamma_{i,j}^L}{\mu} \right) \right] \quad (21)$$

3) 求解  $S_{i,j}$

$$\arg \min_{S_{i,j}} \lambda \|S_{i,j}\|_1 + \langle \Gamma_{i,j}^O, O_{i,j} - L_{i,j} - S_{i,j} - N_{i,j} \rangle + \frac{\mu}{2} \|O_{i,j} - L_{i,j} - S_{i,j} - N_{i,j}\|_F^2 \quad (22)$$

可利用软阈值收缩算子计算,即

$$S_{i,j} = \text{Soft} \left( O_{i,j} - L_{i,j} - N_{i,j} + \frac{\Gamma_{i,j}^O}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu} \right) \quad (23)$$

4) 求解  $N_{i,j}$

$$\arg \min_{N_{i,j}} \gamma \|N_{i,j}\|_F^2 + \langle \Gamma_{i,j}^O, O_{i,j} - L_{i,j} - S_{i,j} - N_{i,j} \rangle + \frac{\mu}{2} \|O_{i,j} - L_{i,j} - S_{i,j} - N_{i,j}\|_F^2 \quad (24)$$

计算可得

$$N_{i,j} = \frac{\mu(O_{i,j} - L_{i,j} - S_{i,j}) + \Gamma_{i,j}^O}{2\gamma + \mu} \quad (25)$$

2.2.2 固定其他参数,求解子优化问题( $J, X, U$ )

1) 求解  $J$

$$\arg \min_J \sum_{i,j} \left( \langle \Gamma_{i,j}^L, L_{i,j} - J_{i,j} \rangle + \frac{\mu}{2} \|L_{i,j} - J_{i,j}\|_F^2 \right) + \langle \Gamma^X, J - X \rangle + \frac{\mu}{2} \|J - X\|_F^2 \quad (26)$$

凸优化模型得到解析解

$$J = \left( \sum_{i,j} P_{i,j}^T \left( L_{i,j} + \frac{\Gamma_{i,j}^L}{\mu} \right) + X - \frac{\Gamma^X}{\mu} \right) / \left( I + \sum_{i,j} P_{i,j}^T P_{i,j} \right) \quad (27)$$

式中,  $I \in \mathbb{R}^{M \times N \times P}$  是元素全为1的张量,  $P_{i,j}$  是取样算子,  $P_{i,j}^T$  是其逆算子。

2) 求解  $X$

$$\arg \min_X \langle \Gamma^X, J - X \rangle + \frac{\mu}{2} \|J - X\|_F^2 + \langle \Gamma, U - FX \rangle + \frac{\mu}{2} \|U - FX\|_F^2 \quad (28)$$

利用快速傅里叶求解  $X$  得

$$X = \text{ifftn} \left[ \frac{\text{fftn} \left( \left( J + \frac{\Gamma^X}{\mu} \right) + F^T \left( U + \frac{\Gamma}{\mu} \right) \right)}{1 + \text{fftn}^2(F_1) + \text{fftn}^2(F_2) + \text{fftn}^2(F_3)} \right] \quad (29)$$

式中,  $\text{fftn}(\cdot)$  表示快速傅里叶变换,  $\text{ifftn}(\cdot)$  是其逆变换。

3) 求解  $U$

$$\arg \min_U \tau \|w \odot U\|_{2,1} + \langle \Gamma, U - FX \rangle + \frac{\mu}{2} \|U - FX\|_F^2 = \arg \min_U \tau \|w \odot U\|_{2,1} + \frac{\mu}{2} \left\| U - \left( FX - \frac{\Gamma}{\mu} \right) \right\|_F^2 \quad (30)$$

根据文献[23]给出的引理计算  $U$

$$U(i, j, :) = \begin{cases} \frac{\|U_T(i, j, :)\|_2 - \frac{\mathbf{w}(i, j)\tau}{\mu}}{\|U_T(i, j, :)\|_2} U_T(i, j, :), & \|U_T(i, j, :)\|_2 > \frac{\mathbf{w}(i, j)\tau}{\mu} \\ 0, & \|U_T(i, j, :)\|_2 \leq \frac{\mathbf{w}(i, j)\tau}{\mu} \end{cases} \quad (31)$$

式中,  $U_T = FX - \frac{\Gamma}{\mu}$ 。

更新拉格朗日乘子和惩罚参数为

$$\begin{cases} \Gamma_{i,j}^O = \Gamma_{i,j}^O + \mu(O_{i,j} - L_{i,j} - S_{i,j} - N_{i,j}) \\ \Gamma_{i,j}^D = \Gamma_{i,j}^D + \mu(L_{i,j} - C_{i,j}D_{i,j}R_{i,j}) \\ \Gamma_{i,j}^L = \Gamma_{i,j}^L + \mu(L_{i,j} - J_{i,j}) \\ \Gamma^X = \Gamma^X + \mu(J - X) \\ \Gamma = \Gamma + \mu(U - FX) \\ \mu = \min(\rho\mu, \mu_{\max}) \end{cases} \quad (32)$$

在每次迭代中组稀疏权重  $\mathbf{w}(i, j)$  更新为

$$\mathbf{w}(i, j) = \frac{1}{\|U_T(i, j, :)\|_2 + \text{eps}} \quad (33)$$

综上所述,得到FTFGS模型的求解步骤为:

1) 输入观测到的HSI图像  $O$ , 图块大小  $\text{blocksize}$ , 步长  $\text{stepsize}$ , 秩大小  $r$ , 正则化参数  $\lambda, \gamma, \tau, (b_x, b_y, b_z)$ , 迭代终止条件  $\epsilon$  以及参数更新率  $\rho$ 。

2) 初始化变量  $L = J = X = 0, U = 0, \Gamma_{i,j}^O = \Gamma_{i,j}^D = \Gamma_{i,j}^L = \Gamma^X = \Gamma = 0, \mu = 0$ 。

3) 进入重复迭代: 基于式(14)、(19)、(17)、(21)、(23)和(25)更新  $(C_{i,j}, D_{i,j}, R_{i,j}, L_{i,j}, S_{i,j}, N_{i,j})$ ; 基于式(32)更新拉格朗日乘数和惩罚参数; 基于式(33)更新权重。

4) 重复迭代直至最后迭代到最大迭代次数或满足收敛条件  $\max\{\|O_{i,j} - L_{i,j} - S_{i,j} - N_{i,j}\|_\infty, \|L_{i,j} - C_{i,j}D_{i,j}R_{i,j}\|_\infty, \|L_{i,j} - J_{i,j}\|_\infty, \|J - X\|_\infty, \|U - FX\|_\infty\} \leq \epsilon$ , 结束迭代。

最终得到降噪后的图像  $L$ 。

### 3 实验结果与分析

为验证FTFGS模型的有效性,将其用于模拟以及真实数据实验。选用5种高光谱去噪模型:LRMR<sup>[21]</sup>, LRTDTV<sup>[24]</sup>, LLRSSTV<sup>[10]</sup>, LRTDGS<sup>[20]</sup>和LLxRGTV<sup>[14]</sup>作为对比,以验证FTFGS模型的有效性。对于所有模型的参数选择,都仔细遵循所在文献中的建议,以保证最佳结果。实验前将HSI每个波段的像素值归一化到 $[0, 1]$ 范围。

对于模型的复原结果,采用三种类型的标准进行评价。第一种是直观的视觉效果;第二种是定量的数值评价指标,采用峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR), 结构相似度(Structural Similarity Index, SSIM)和特征相似度(Feature Similarity, FSIM)<sup>[25]</sup>这三个指标,实验中这些指标的结果是所有频带的平均值,值越高,表示恢复效果越好;第三种是定性比较,将恢复结果的光谱特征与原始图像进行比较,以进一步显示性能。

#### 3.1 模拟数据实验

##### 3.1.1 数据介绍

采用2个高光谱数据集进行模拟,第1个数据集是由机载可见/红外成像光谱仪(Airborne Visible/Infrared Imaging Spectrometer, AVIRIS)所拍摄Indian Pines数据集所生成,全景大小为 $145 \times 145$ ,共有224个

波段。第2个数据集是高光谱数字图像采集传感器(Hyperspectral Digital Imagery Collection Experiment, HYDICE)所拍摄的 Washington DC Mall, 空间尺寸为  $1208 \times 307$ , 共有 191 个波段, 本节采用  $256 \times 256 \times 191$  的子块。在两个干净的 HSI 数据集中添加 6 种不同类型的噪声, 具体情况如表 1 所示。

表 1 不同的噪声场景  
Table 1 Different noise scenarios

Noise case	Gaussian noise	Gaussian noise	Impulse noise	Deadline	Stripe	Deadline	Stripe
	(mean 0, variance 0.1)	(mean 0, variance 0~0.2 random)	(percentage 0~0.2 random)	(number 3~10 random)	(number 3~10 random)	(number 3~10 random)	(number 3~10 random)
	All bands	All bands	All bands	40% bands	40% bands	20% bands	20% bands
Case1	✓	—	—	—	—	—	—
Case2	—	✓	—	—	—	—	—
Case3	—	✓	✓	—	—	—	—
Case4	—	✓	✓	✓	—	—	—
Case5	—	✓	—	—	✓	—	—
Case6	—	✓	✓	—	—	✓	✓

### 3.1.2 模拟数据实验

图 3 和图 4 给出两个模拟数据集中随机一个波段在情况 5 下不同模型的去噪效果, 为每张子图附上 PSNR 值并将绿框区域在红框中放大以更清晰比较。从图 3 中可直观的看到 LRMR、LRTDTV、LLRSSTV 有严重的噪声的残留, LRTDGS 和 LLxRGTV 虽去除了大部分噪声, 但丢失了部分轮廓信息, 效果不太理想。观察图 3(h) 可以看到没有混合噪声并且保持了轮廓和细节信息的清晰图像。从图 4 中看到 LRMR 与 LLRSSTV 模型仍含有噪声, LRTDTV、LRTDGS 和 LLxRGTV 存在过渡平滑的现象, 丢失了图像的纹理细节。

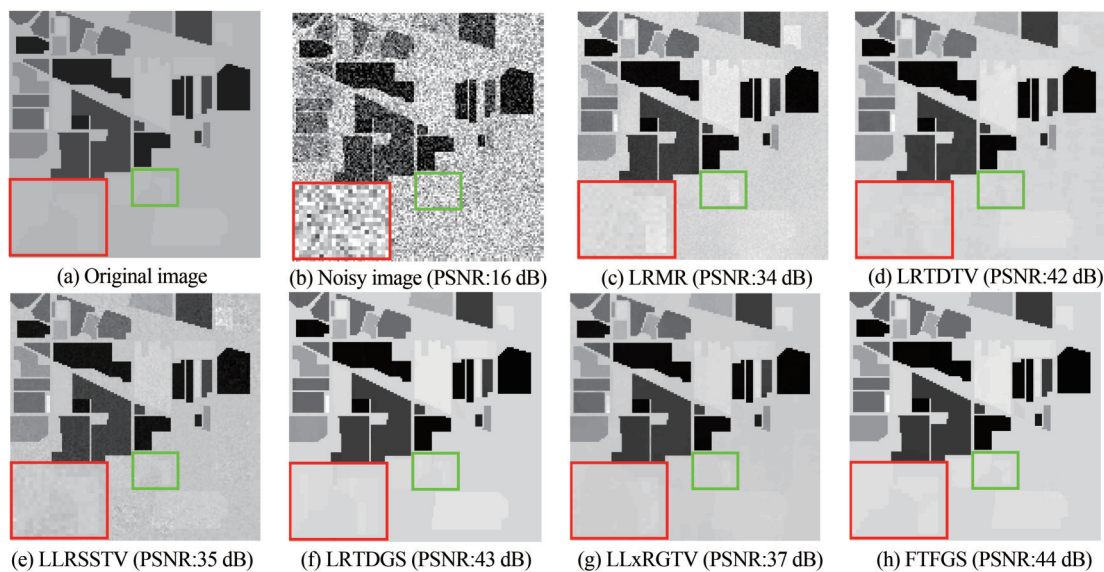


图 3 情况 5 下 Indian Pines 数据集第 65 波段去噪结果  
Fig. 3 Denoising results on band 65 of Indian Pines dataset in case 5

LRMR 通过整合平均 HSI 分割而成的所有重叠小块来去噪, 然而只简单地利用了图像的空间信息, 所以去噪效果不佳。LRTDTV 在平滑噪声的同时也去除了细节和纹理信息。LLRSSTV 与 LLxRGTV 均只简单使用 SSTV 项, 完全没有探究 HSI 的组稀疏先验, 去噪效果较差。LRTDGS 只研究了空间维度的组稀疏性质, 忽略了光谱维度。

总体而言, FTFGS 在 Indian Pines 数据集上取得了明显的视觉改善, 原因是该数据集具有局部平滑的特



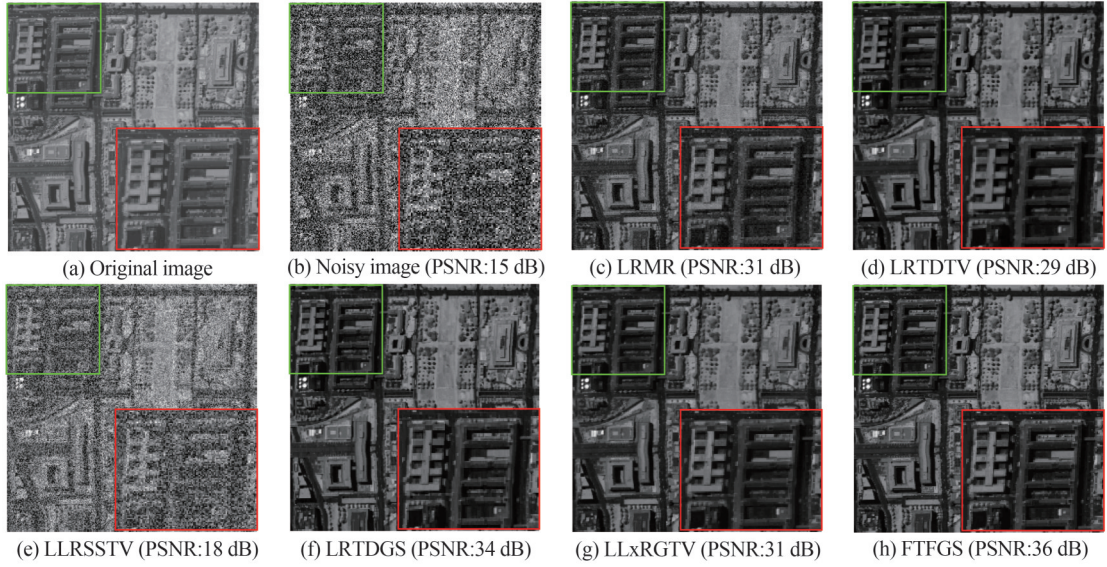


图4 情况5下 Washington DC 数据集第66波段去噪结果  
Fig. 4 Denoising results on band 66 of Washington DC dataset in case 5

性,而FTFGS模型的组稀疏正则项则充分挖掘了这一信息。与 Washington DC 数据集上的其他模型相比,FTFGS模型由于采用了LLR模块,相较于过渡平滑的LRTDTV能更好地保留图像细节与纹理信息,与同样也采用LLR模块的LLRSSTV和LLxRGTV相比,优势在于能够有效地利用图像稀疏的先验特性。

表2列出了6种模型的去噪效果,表中G代表高斯噪声,P代表脉冲噪声。实验的最佳结果用加粗字体显示,次优结果加下划线显示。FTFGS在所有情况下所有评估指标几乎都达到了最优。FTFGS模型所采用的局部低秩模块,不同于LLRSSTV模型使用核范数或是LLxRGTV模型采用 $L_1$ 范数直接对低秩矩阵约束,FTFGS模型在FTF操作得到核心矩阵后,对其进行秩和 $L_{2,1}$ 范数最小化的约束,该操作能更精确地表示HSI的低秩属性。在全局模块,针对LRTDTV、LLRSSTV与LLxRGTV采用传统的TV正则化无法探索差分图像的全局结构这一缺点,FTFGS模型使用加权空谱组稀疏项弥补,并且在LRTDGS只约束了两个维度的基础上,还添加了对光谱维度的约束以充分探索数据集分段平滑的特性。

表2 模拟实验中的定量评价结果

Table 2 Quantitative evaluation results of simulated experiment

Dataset	Noisecase	Level	Index	noisy	LRMR	LRTDTV	LLRSSTV	LRTDGS	LLxRGTV	FTFGS
Indian Pines	Case1	G=0.1	MPSNR	20.258 8	36.689 0	40.480 0	38.473 7	<u>42.837 0</u>	39.959 6	<b>45.732 6</b>
			MSSIM	0.400 4	0.947 0	0.990 0	0.953 7	<u>0.996 0</u>	0.991 6	<b>0.997 2</b>
			MFSIM	0.489 2	0.945 0	0.986 0	0.951 4	<u>0.994 6</u>	0.987 3	<b>0.997 8</b>
	Case2	G	MPSNR	22.805 2	37.196 3	42.385 0	40.274 5	<u>43.282 7</u>	41.727 6	<b>46.684 7</b>
			MSSIM	0.478 1	0.951 1	0.993 0	0.960 1	<u>0.996 8</u>	0.995 0	<b>0.996 9</b>
			MFSIM	0.557 4	0.950 9	0.991 0	0.966 3	<u>0.996 8</u>	0.993 6	<b>0.997 8</b>
	Case3	G+P	MPSNR	14.623 4	35.889 0	40.978 0	39.726 3	<u>42.325 8</u>	40.466 5	<b>45.501 6</b>
			MSSIM	0.261 7	0.938 0	0.991 0	0.961 2	<u>0.996 1</u>	0.993 7	<b>0.996 9</b>
			MFSIM	0.435 0	0.938 0	0.987 0	0.962 7	<u>0.995 7</u>	0.991 1	<b>0.997 9</b>
	Case4	G+P+ Dealine	MPSNR	14.133 4	35.102 0	<u>40.324 0</u>	35.504 2	40.245 6	38.969 7	<b>42.242 7</b>
			MSSIM	0.253 6	0.940 0	0.989 0	0.958 1	<u>0.993 0</u>	0.991 3	<b>0.993 5</b>
			MFSIM	0.426 9	0.940 0	0.986 0	0.954 5	<u>0.992 2</u>	0.988 3	<b>0.995 0</b>
	Case5	G+Stripe	MPSNR	22.009 8	37.112 2	42.202 3	39.940 1	<u>43.064 8</u>	41.197 6	<b>46.859 0</b>
			MSSIM	0.469 4	0.950 5	0.992 2	0.953 6	<u>0.996 6</u>	0.994 2	<b>0.997 5</b>
			MFSIM	0.551 4	0.951 1	0.989 4	0.960 2	<u>0.996 6</u>	0.992 7	<b>0.998 3</b>
	Case6	G+P+ Dealine+ Stripe	MPSNR	14.343 1	35.488 1	40.559 4	37.132 4	<u>41.767 2</u>	39.604	<b>43.524 5</b>
			MSSIM	0.256 4	0.940 8	0.990 0	0.947 7	<b>0.995 5</b>	0.992 4	<u>0.993 6</u>
			MFSIM	0.429 5	0.941 1	0.986 4	0.950 6	<u>0.994 5</u>	0.989 3	<b>0.995 3</b>

续表

Dataset	Noisecase	Level	Index	noisy	LRMR	LRTDTV	LLRSSTV	LRTDGS	LLxRGTV	FTFGS
Washington DC	Case1	G=0.1	MPSNR	20.851 5	34.292 0	34.450 8	<u>36.776 2</u>	36.513 1	35.179 0	<b>37.385 0</b>
			MSSIM	0.365 9	0.912 3	0.924 9	0.948 0	<u>0.948 5</u>	0.934 3	<b>0.953 5</b>
			MFSIM	0.692 9	0.956 6	0.952 6	<u>0.969 8</u>	0.969 3	0.958 2	<b>0.972 3</b>
	Case2	G	MPSNR	23.522 7	35.013 2	35.937 8	<u>38.553 4</u>	37.772 4	36.633 2	<b>38.637 8</b>
			MSSIM	0.465 2	0.914 4	0.943 5	0.961 3	<u>0.962 4</u>	0.951 2	<b>0.967 2</b>
			MFSIM	0.729 5	0.957 7	0.966 1	0.976 9	<u>0.977 6</u>	0.967 7	<b>0.979 1</b>
	Case3	G+P	MPSNR	14.249 7	33.865 8	35.277 6	36.242 9	<u>37.123 7</u>	35.752 8	<b>37.885 3</b>
			MSSIM	0.194 4	0.896 0	0.942 3	0.951 3	<u>0.957 5</u>	0.942 9	<b>0.961 1</b>
			MFSIM	0.564 6	0.949 1	0.965 1	0.968 3	<u>0.975 3</u>	0.963 0	<b>0.975 4</b>
	Case4	G+P+ Dealine	MPSNR	14.181 0	33.428 1	35.432 1	<u>36.334 4</u>	36.156 0	35.678 3	<b>37.017 6</b>
			MSSIM	0.192 6	0.888 3	0.945 0	0.951 5	<u>0.951 7</u>	0.943 3	<b>0.958 4</b>
			MFSIM	0.562 6	0.944 2	0.967 0	0.969 8	<u>0.971 5</u>	0.964 5	<b>0.971 6</b>
	Case5	G+Stripe	MPSNR	23.101 4	34.858 6	35.889 0	<u>37.837 1</u>	37.714 5	36.501 8	<b>38.551 3</b>
			MSSIM	0.458 6	0.913 4	0.949 5	0.943 1	<u>0.961 8</u>	0.950 1	<b>0.966 2</b>
			MFSIM	0.724 5	0.957 0	0.969 4	0.966 5	<u>0.977 3</u>	0.966 9	<b>0.978 8</b>
	Case6	G+P+ Dealine+ Stripe	MPSNR	14.227 0	33.706 5	35.217 6	<u>36.251 2</u>	36.222 6	35.861 7	<b>37.413 2</b>
			MSSIM	0.192 9	0.894 7	0.941 7	0.930 4	<u>0.952 5</u>	0.945 2	<b>0.960 2</b>
			MFSIM	0.562 9	0.947 7	0.964 6	0.958 6	<u>0.971 8</u>	0.965 4	<b>0.973 7</b>

具体来看, Indian Pines在噪声情况5下, 比次优模型的平均PSNR(MPSNR)高出3.79 dB, Washington DC在噪声情况6下, 比次优模型的MPSNR高出1.16 dB。Indian Pines在噪声情况6下, 仅比最优结果差0.001 9。两个数据集的平均SSIM(MSSIM)和平均FSIM(MFSIM)指标均有较大提升, 因此, FTFGS模型具有较大优势。

图5和图6给出不同噪声情况下所有模型在两个模拟数据集上的PSNR和SSIM曲线, FTFGS模型在

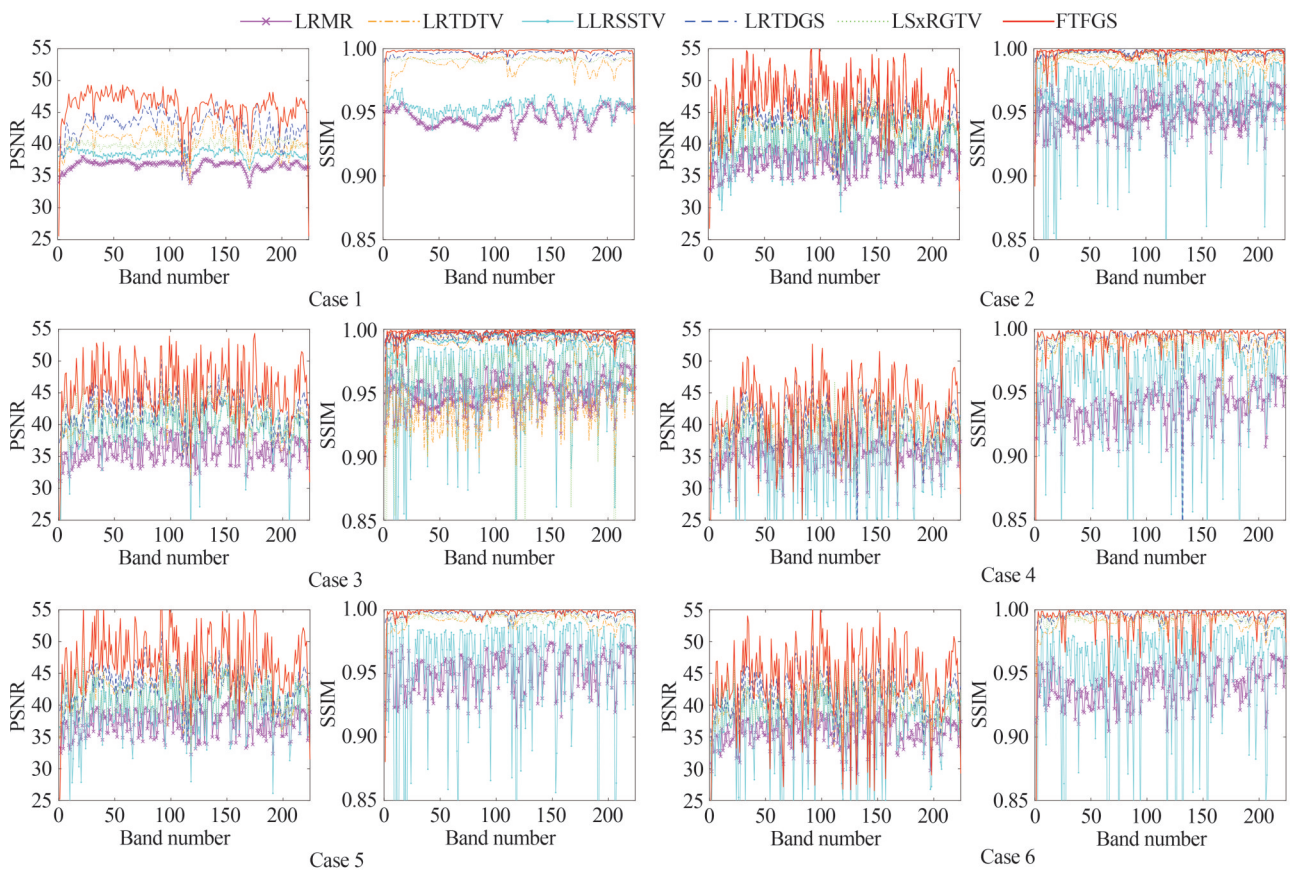


图5 不同噪声情况下6种模型在Indian Pines数据集上各波段PSNR和SSIM值的对比

Fig. 5 Comparison diagram of PSNR and SSIM values of six models in different bands on the Indian Pines dataset under different noise conditions

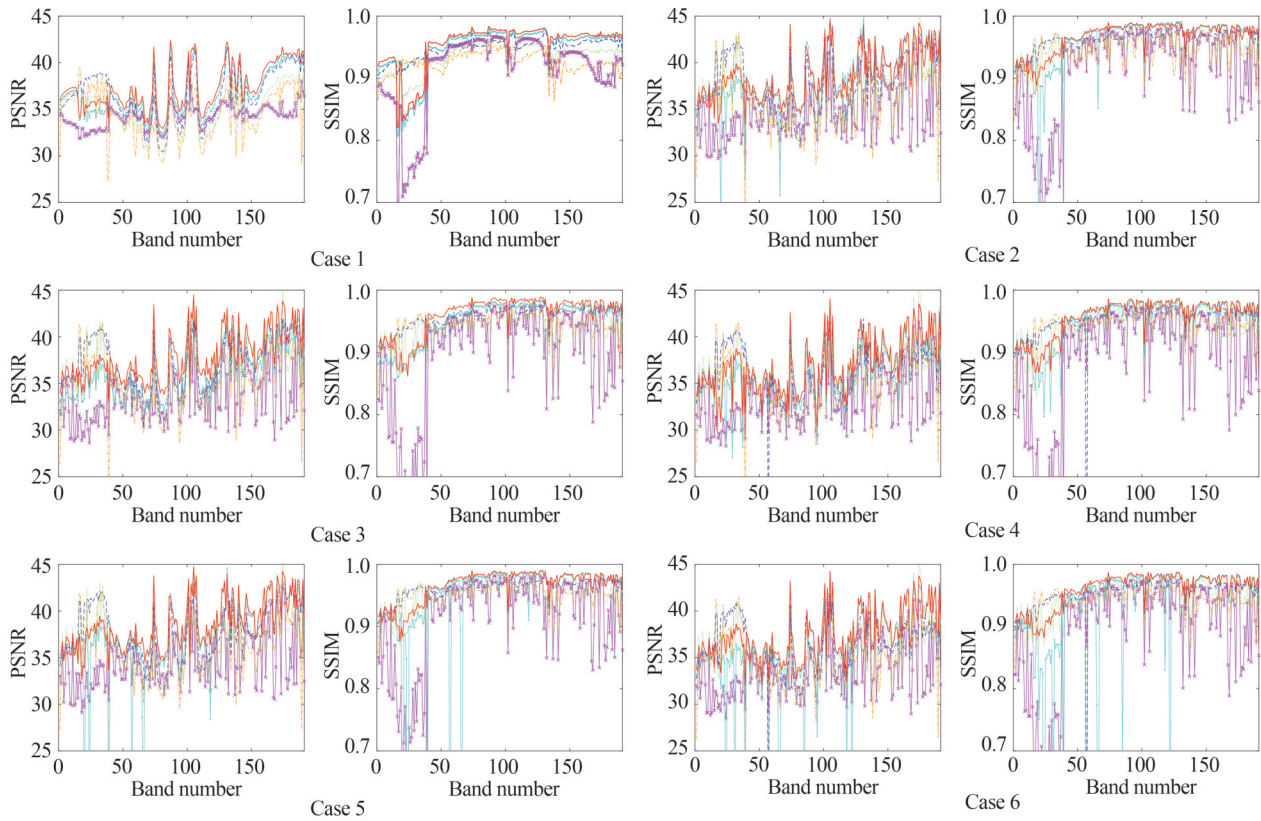


图6 不同噪声情况下6种模型在 Washington DC 数据集各波段 PSNR 和 SSIM 值的对比

Fig. 6 Comparison diagram of PSNR and SSIM values of six models in different bands on the Washington DC dataset under different noise conditions

Indian Pines 数据集的所有频带中几乎都实现了最高的 PSNR 和 SSIM 值。这说明对差分图像的组稀疏性约束挖掘了该数据集的局部平滑特性,更好地保留了每个频带中的大部分细节。在 Washington DC 数据集上,FTFGS 模型虽然没有在每个频带中实现最佳结果,但在所有频带中实现了平均最优。

图7 对各个模型在 HSI 局部像素点的去噪效果进行定性比较。对于两个数据集都随机选取像素点进行考察,对比去噪前后的光谱曲线变化。去噪后的光谱曲线越接近原始图像,曲线越光滑说明去噪效果越好。

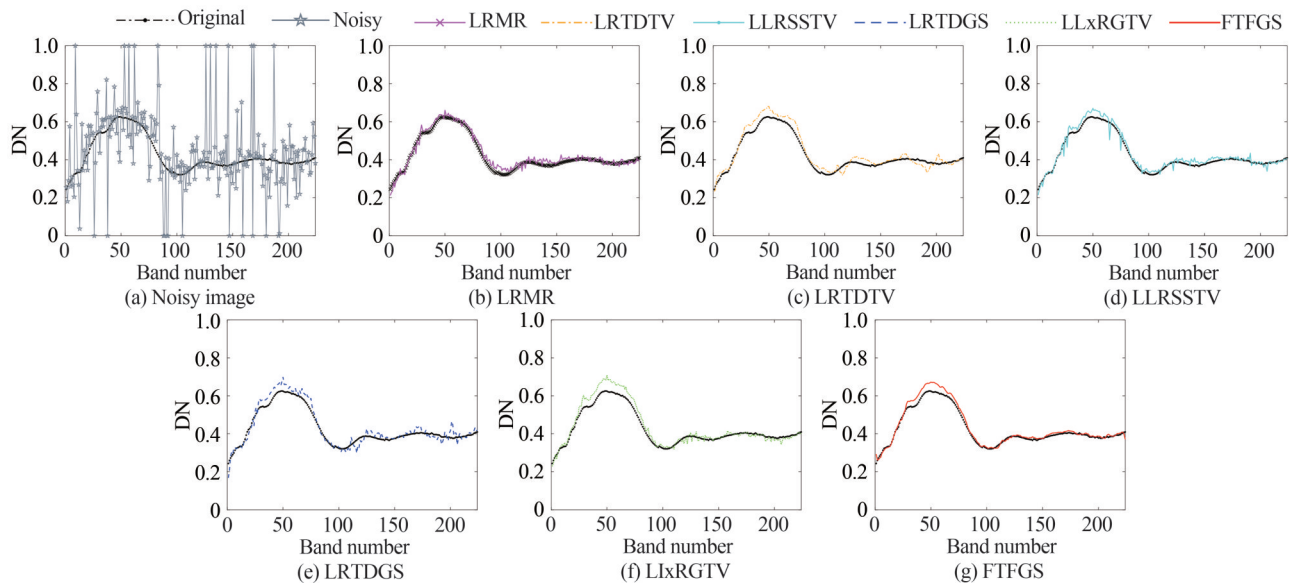


图7 情况6下 Indian Pines 数据集中像素(50,20)的光谱曲线

Fig. 7 Spectrum of Indian Pines dataset at pixel(50, 20) in case 6

图7和图8展示了不同去噪模型在两个模拟数据集上随机像素点处的光谱曲线。可以明显地看出,其他模型都无法较好地贴合原始图像,由于条纹和其他噪声的影响,曲线中出现了许多波动。从图7(g)和图8(g)看到曲线整体光滑,而且在其它模型波动加大的情况下具有更高的贴合度(第100波段以后)。在噪声情况复杂的情况6下,因为FTFGS的局部模块使用FTF方法代替局部低秩去除稀疏噪声,全局模块对图块进行整合,有效抑制了高斯噪声和条纹,所以展示出最优越的效果。

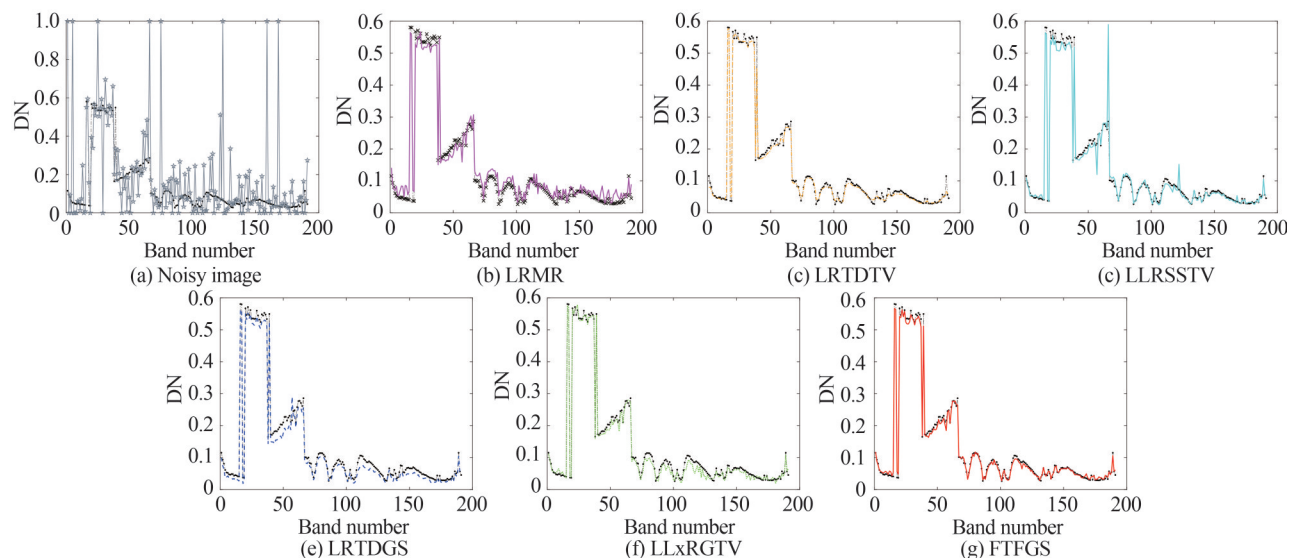


图8 情况6下数据集 Washington DC 数据集中像素(10,180)的光谱曲线  
Fig. 8 Spectrum of Washington DC dataset at pixel (10, 180) in case 6

### 3.2 真实数据实验

采用 Indian Pines 数据集验证模型在实际应用中的有效性。数据集全景大小为  $145 \times 145$ , 共有 220 个波段, 其中一些波段受到高斯噪声和脉冲噪声的严重污染。考虑到该数据集第 150 和 162 波段受到的噪声干扰尤为严重, 故选取这两个波段去噪更能体现模型的性能。图 9(a) 和 10(a) 虽然是原始参考影像但是完全无法从中获得任何有用信息。从去噪结果来看, 所有模型都可以去除大部分噪声并恢复图像结构。然而, 如图 9(b)~(f) 所示, 与其他模型相比, FTFGS 模型结果最接近原始参考图像。如图 10(b)~(f) 所示,

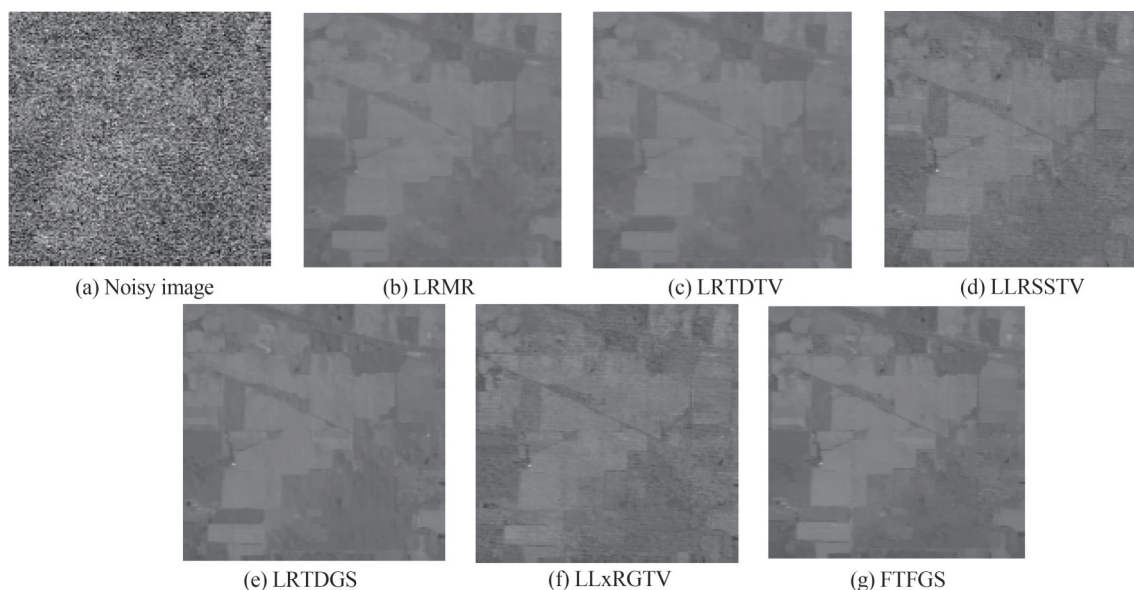


图9 不同模型对真实数据第150波段的去噪结果  
Fig. 9 Denoising results of the 150th band of real data by using different models

LRMR、LLRSSTV和LRTDGS的结果仍然包含一些噪声,并且图像结构被破坏。LRTDTV和LLxRGTV可以有效地去除噪声,但会使图像过度平滑。与上述模型相比,本文所提出的FTFGS在去除噪声、保留边缘和局部细节方面表现最佳。

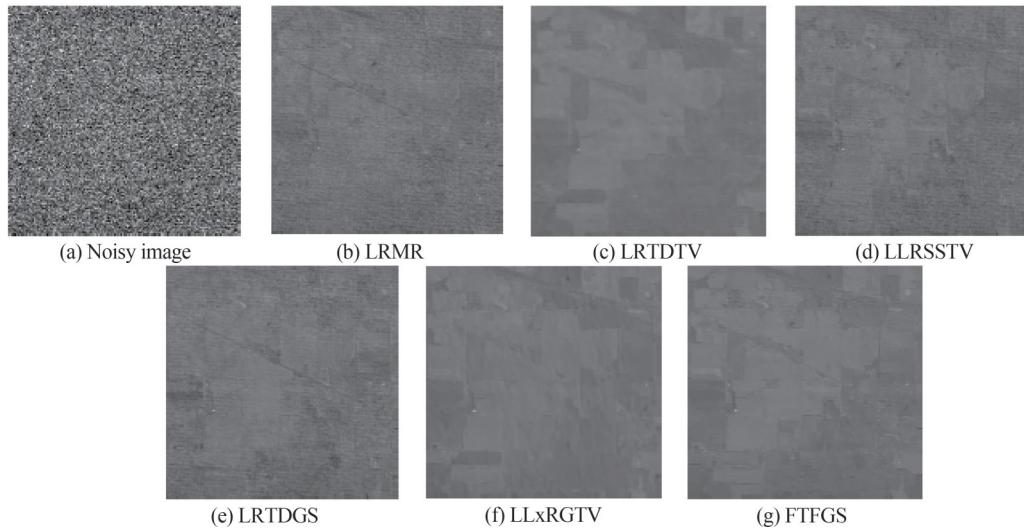


图 10 不同模型对真实数据第 162 波段的去噪结果

Fig. 10 Denoising results of the 162th band of real data by using different models

### 3.3 灵敏性分析

以 Indian Pines 的 6 种噪声情况为例,采用 PSNR 为指标对 FTFGS 模型的 5 个参数进行灵敏性分析。

采取分块策略,首先分析块大小和步长这两个参数。如图 11 和图 12 所示,可以看出,情况 1、2、3 和 5 的最优参数均是  $\text{blocksize}=30$  和  $\text{stepsize}=15$ 。对该数据集,在所有复杂的噪声情况下,块大小的最优区间是  $[25, 30, 35]$ ,步长一般固定为 10 或者 15。在图 11 中,可以发现当块大小和步长相等时,即图块之间无重合区域,去噪效果最差,说明 FTFGS 采取对重叠的图块进行处理的策略能够更好地去除死线和条纹噪声。

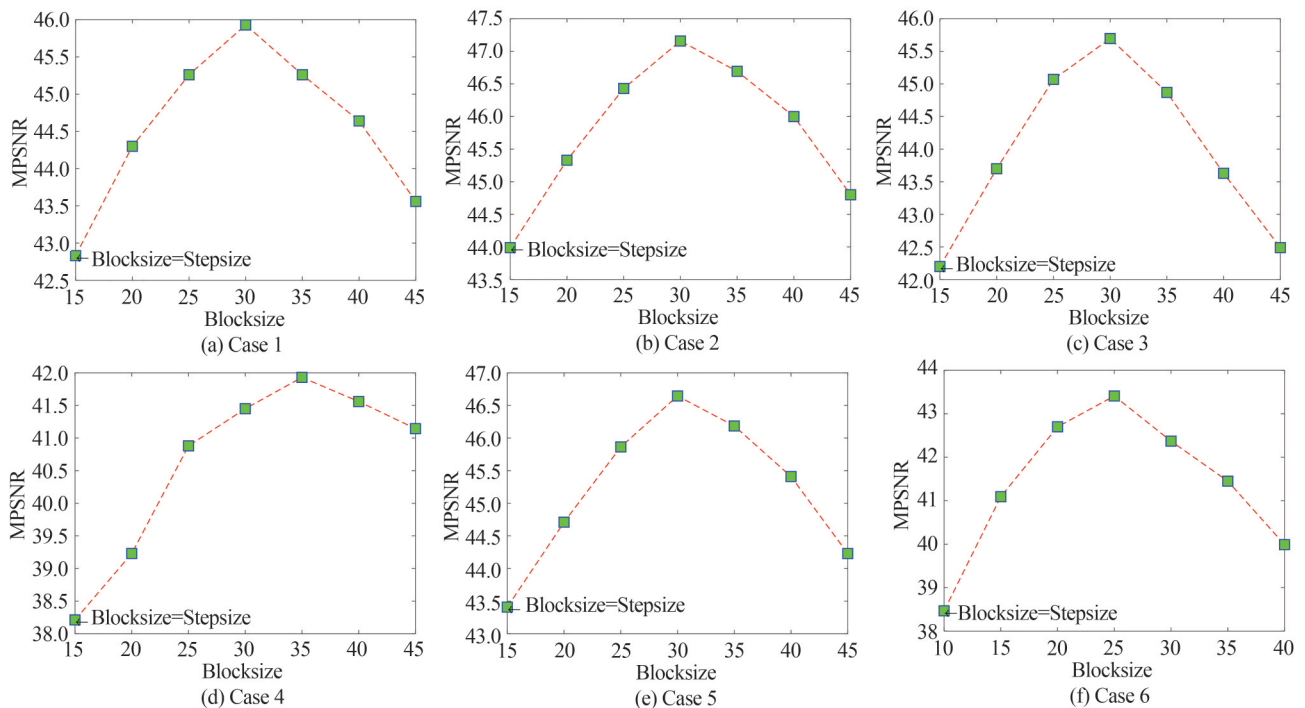


图 11 Blocksize 的灵敏性分析

Fig. 11 Sensitivity analysis of the blocksize

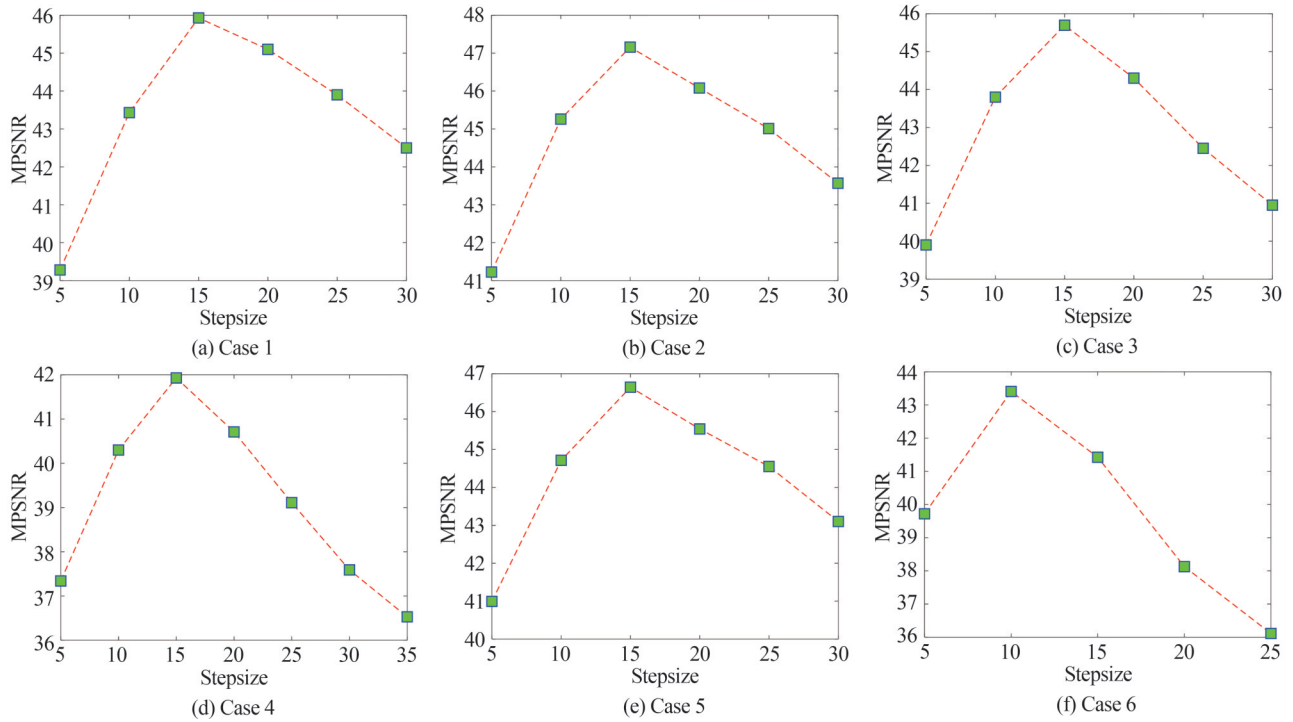


图 12 Stepsize 的灵敏性分析  
Fig. 12 Sensitivity analysis of the stepsize

FTFGS模型中包含 $\lambda$ 、 $\gamma$ 和 $\tau$ 三个参数。对于正则化参数 $\gamma$ ，其大小的波动对模型结果影响不大，一般将其设置为高斯噪声方差的倒数即可<sup>[24]</sup>。在FTFGS中， $\lambda$ 是用来限制稀疏噪声稀疏性的参数，根据调优参数 $C$ 、块大小blocksize与HSI波段数 $p$ 在 $\lambda = C / \sqrt{\text{blocksize} \times p}$ 处设置稀疏正则化参数，足以保证最优解的存在。图 13 显示了调优参数 $C$ 在最优值上下波动时模型的去噪结果，因为实验含有不同的复杂噪声情况，导致最优 $C$ 值在30~60之间变化。参数 $\tau$ 的灵敏性分析如图 14 所示，它的最优结果在2上下浮动。

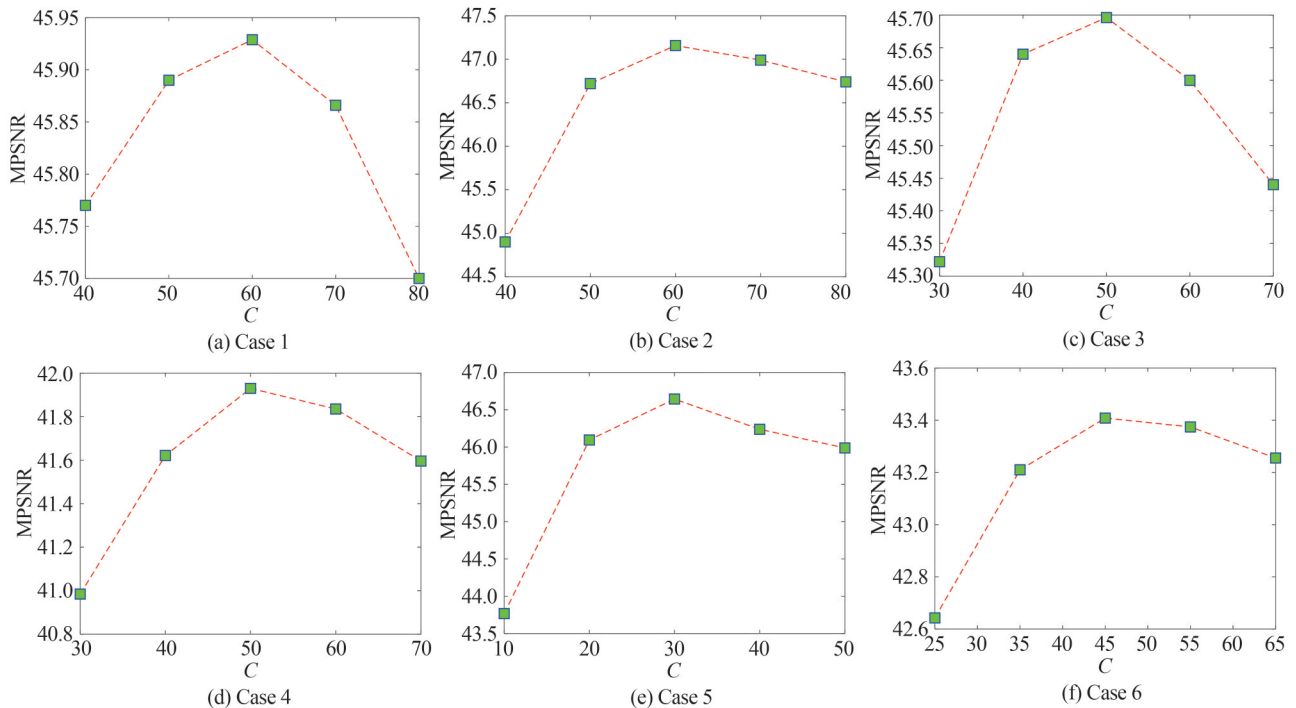
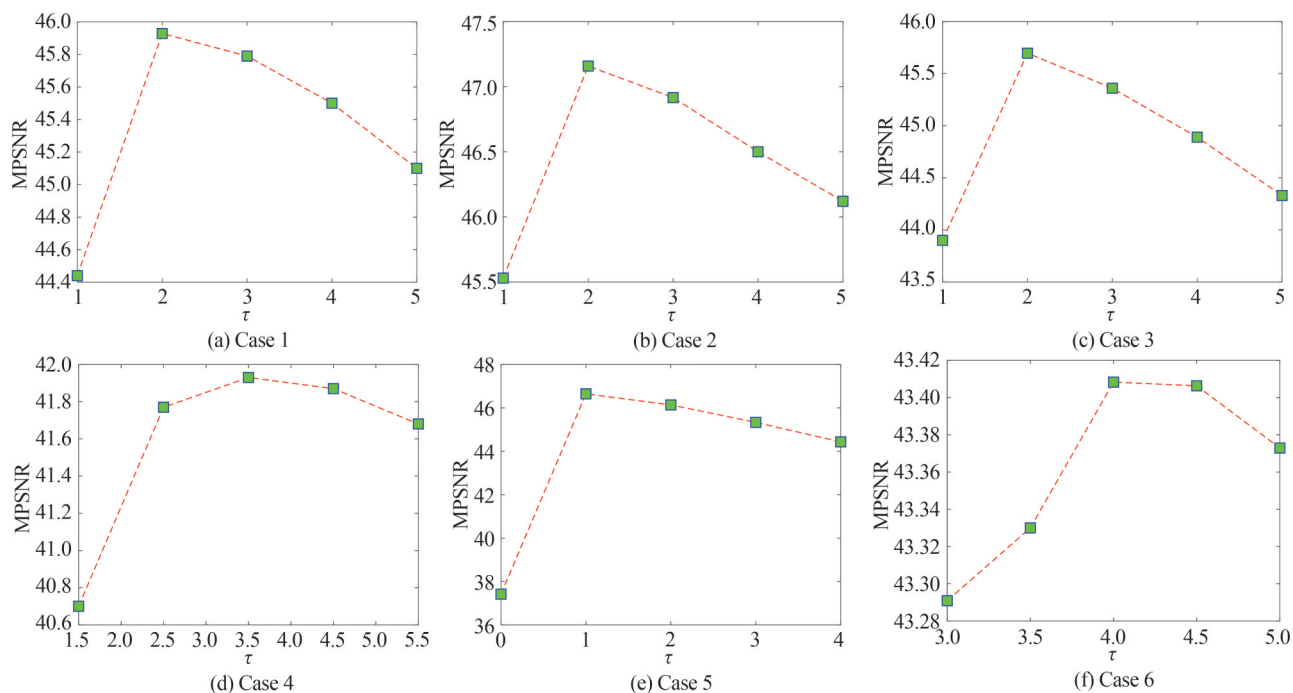


图 13 参数 C 的灵敏性分析  
Fig. 13 Sensitivity analysis of the C

图 14 参数  $\tau$  的灵敏性分析Fig. 14 Sensitivity analysis of the  $\tau$ 

从图 13 和 14 中可以看出,不同情况下 MPSNR 值的变化趋势相似,说明正则化参数在不同噪声情况下具有鲁棒性。除此之外,建议根据噪声程度的不同,分别在上述范围内选取参数  $C$  和  $\tau$ 。

如图 15 所示,选取最优的去噪结果,对 Indian Pines 的秩 rank 给出估计,可见当 rank=8/9 时 MPSNR 达到峰值,也表示信号与噪声分离的边界。图 16 表明经过多次迭代,模型结果趋于稳定,体现了算法的收敛性。同时也给出了所有噪声情况下较为理想的迭代次数为 40 次。

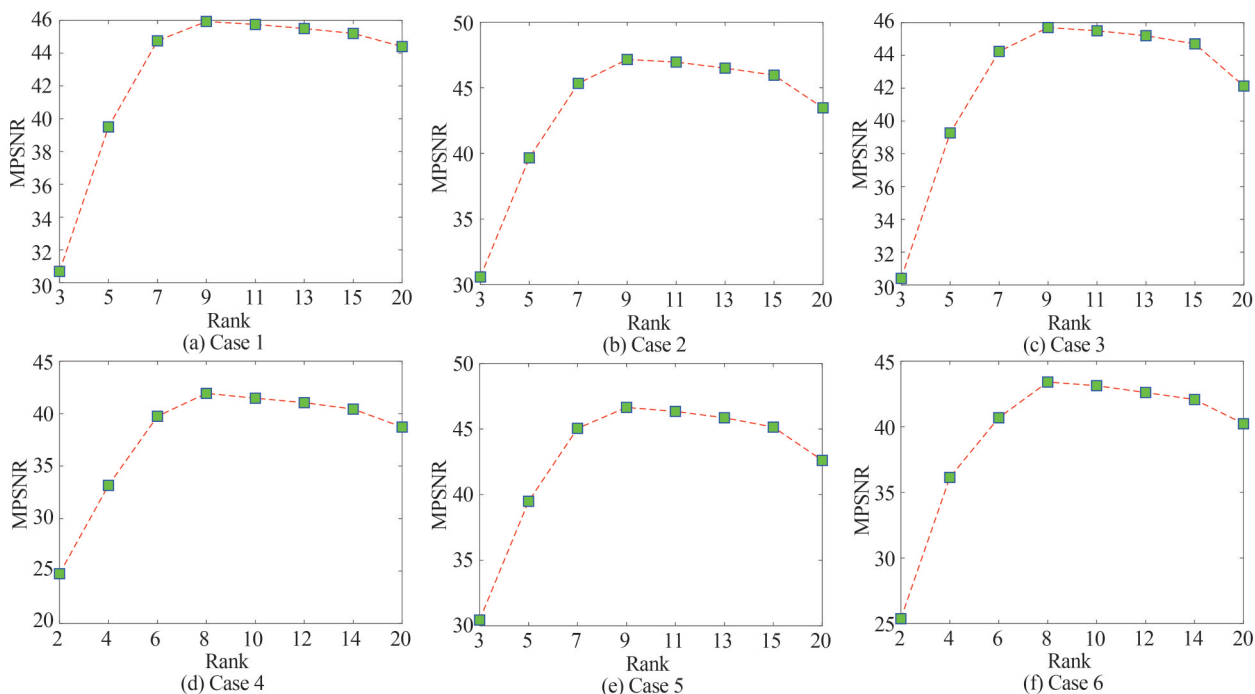


图 15 秩的灵敏性分析

Fig. 15 Sensitivity analysis of the rank

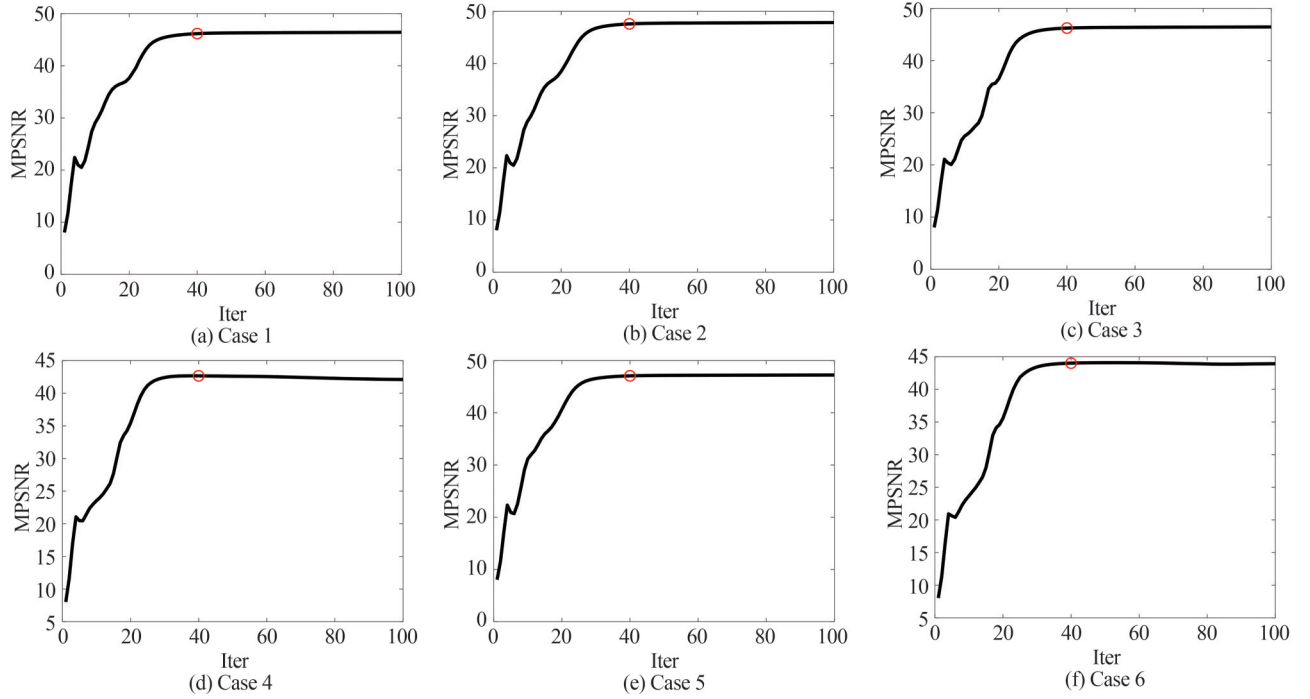


图 16 迭代次数的灵敏性分析  
Fig. 16 Sensitivity analysis of the iteration

### 3.4 计算复杂度和时间分析

相比于利用核范数最小化表示低秩先验的模型(例如算法 LLRSSTV),FTFGS 模型速度的提升主要在于局部模块所采用的 FTF 方法。针对 HSI 的低秩先验,假设实矩阵  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,针对  $X$  进行 SVD 的计算复杂度是  $O(mn^2)$ ,而 FTFGS 在将  $X$  进行 FTF 并且对核心矩阵  $D \in \mathbb{R}^{r \times r}$  约束,所以基于核范数最小化的算法存在高计算成本,将问题从  $\|X\|_*$  最小化转换成基于 QR 分解的  $L_{2,1}$  范数最小化,即

$$s \min_D \|D\|_{2,1}, \text{ s.t. } X = CDR, C^T C = I, RR^T = I \quad (34)$$

式(34)的主要 CPU 时间在于执行两次 QR 分解来更新  $C$  和  $R$ ,因此它的计算复杂度是  $O(r^2(m+n))$ ,并且  $r \ll \min(m, n)$ ,所以该模型比基于 SVD 的传统模型快得多。

表 3 展示了 6 种对比模型的运行时间,表中提升率以 LLRSSTV 模型作为参考。最好的 3 种模型依次用

表 3 模拟实验中的运行时间  
Table 3 Running time in simulation experiment

Dataset	Noise Case	Running time/s						Improvement/%
		LRMR	LRTDTV	LRTDGS	LLxRGTV	LLRSSTV	FTFGS	
Indian Pines	Case1	83.11	85.88	77.54	198.68	186.24	80.46	56.80
	Case2	84.19	85.60	79.14	242.13	215.98	81.03	62.48
	Case3	84.81	93.67	83.10	199.84	220.28	80.94	63.26
	Case4	84.32	94.04	80.67	245.23	185.66	81.39	56.16
	Case5	103.16	85.50	78.89	237.08	247.98	80.84	67.40
	Case6	84.00	87.29	79.95	199.91	169.45	81.58	51.86
Washington DC	Case1	245.01	217.27	176.39	609.38	464.68	226.09	51.34
	Case2	233.31	218.65	179.92	606.24	395.82	226.74	42.72
	Case3	174.51	218.49	179.86	605.45	407.70	228.19	44.03
	Case4	174.46	220.95	182.89	599.88	376.45	235.85	37.35
	Case5	260.70	223.36	183.40	601.73	364.53	227.34	37.63
	Case6	254.41	221.96	177.19	610.79	403.63	229.21	43.21



红、蓝、绿表示。其中LLRSSTV在低秩模块采用核范数最小化对矩阵进行约束,显然,FTFGS在使用FTF之后,相较于LLRSSTV,模型整体提升效率显著。尽管FTFGS并不是在所有情况下都是最快的,但其去噪性能却远超于对比模型,所以考虑到优越的去噪性能,FTFGS还是具有优秀的综合能力。

## 4 结论

本文充分挖掘HSI的局部低秩和全局组稀疏的先验信息,提出了一种高效的高光谱图像去噪模型:在FTF的框架下快速、准确地探究图块的局部低秩特性,引入全新的组稀疏正则化整合低秩无噪小块,更好地表达稀疏特性。用该算法有效地求解模型并进行实验,实验结果充分证明了该模型的去噪能力。相较于对比模型,其平均峰值信噪比提高1.75 dB,平均结构相似性指标提高0.003,平均特征相似度指标提高0.002,去噪性能有明显提升。在后续研究中,可以将该模型应用于诸如高光谱图像聚类、视频修复等多种高维数据处理任务。

### 参考文献

- [1] LIU C, TAO R, LI W, et al. Joint classification of hyperspectral and multispectral images for mapping coastal wetlands[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2020, 14: 982-996.
- [2] WANG R, NIE F, WANG Z, et al. Multiple features and isolation forest-based fast anomaly detector for hyperspectral imagery[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2020, 58(9): 6664-6676.
- [3] ZHONG Y, RU C, WANG S, et al. An online, non-destructive method for simultaneously detecting chemical, biological, and physical properties of herbal injections using hyperspectral imaging with artificial intelligence [J]. *Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy*, 2022, 264: 120250.
- [4] HONG D, WU X, GHAMISI P, et al. Invariant attribute profiles: a spatial-frequency joint feature extractor for hyperspectral image classification[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2020, 58(6): 3791-3808.
- [5] FU H, ZHANG A, SUN G, et al. A novel band selection and spatial noise reduction method for hyperspectral image classification[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2022, 60: 1-13.
- [6] LIU J, YUAN S, ZHU X, et al. Nonnegative matrix factorization with entropy regularization for hyperspectral unmixing[J]. *International Journal of Remote Sensing*, 2021, 42(16): 6359-6390.
- [7] WANG Q, WU Z, JIN J, et al. Low rank constraint and spatial spectral total variation for hyperspectral image mixed denoising[J]. *Signal Processing*, 2018, 142: 11-26.
- [8] ZENG H, XIE X, CUI H, et al. Hyperspectral image restoration via global L 1-2 spatial-spectral total variation regularized local low-rank tensor recovery[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2020, 59(4): 3309-3325.
- [9] CANDÈS E J, LI X, MA Y, et al. Robust principal component analysis?[J]. *Journal of the ACM*, 2011, 58(3): 1-37.
- [10] HE W, ZHANG H, SHEN H, et al. Hyperspectral image denoising using local low-rank matrix recovery and global spatial-spectral total variation[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2018, 11(3): 713-729.
- [11] HU Y, ZHANG D, YE J, et al. Fast and accurate matrix completion via truncated nuclear norm regularization[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2012, 35(9): 2117-2130.
- [12] PENG C, KANG Z, LI H, et al. Subspace clustering using log-determinant rank approximation[C]. *Proceedings of the 21th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, 2015: 925-934.
- [13] HUANG X, DU B, TAO D, et al. Spatial-spectral weighted nuclear norm minimization for hyperspectral image denoising[J]. *Neurocomputing*, 2020, 399: 271-284.
- [14] ZENG H, XIE X, NING J. Hyperspectral image denoising via global spatial-spectral total variation regularized nonconvex local low-rank tensor approximation[J]. *Signal Processing*, 2021, 178: 107805.
- [15] LIU Y, JIAO L C, SHANG F. A fast tri-factorization method for low-rank matrix recovery and completion[J]. *Pattern Recognition*, 2013, 46(1): 163-173.
- [16] LIU Q, DAVOINE F, YANG J, et al. A fast and accurate matrix completion method based on QR decomposition and L<sub>2,1</sub>-norm minimization[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 30(3): 803-817.
- [17] CHEN Y, HUANG T Z, HE W, et al. Hyperspectral image denoising using factor group sparsity-regularized nonconvex low-rank approximation[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2021, 60: 1-16.
- [18] CHEN Y, HE W, ZHAO X L, et al. Exploring nonlocal group sparsity under transform learning for hyperspectral image denoising[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2022, 60: 1-18.
- [19] CHEN Y, HUANG T Z, DENG L J, et al. Group sparsity based regularization model for remote sensing image stripe noise removal[J]. *Neurocomputing*, 2017, 267: 95-106.

- [20] CHEN Y, HE W, YOKOYA N, et al. Hyperspectral image restoration using weighted group sparsity-regularized low-rank tensor decomposition[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(8): 3556-3570.
- [21] ZHANG Hongyan, HE Wei, ZHANG Liangpei, et al. Hyperspectral image restoration using low-rank matrix recovery [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2014, 52(8): 4729-4743.
- [22] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 2011, 3(1): 1-122.
- [23] LIU G, LIN Z, YAN S, et al. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2012, 35(1): 171-184.
- [24] WANG Y, PENG J, ZHAO Q, et al. Hyperspectral image restoration via total variation regularized low-rank tensor decomposition[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2018, 11(4): 1227-1243.
- [25] ZHANG L, ZHANG L, MOU X, et al. FSIM: a feature similarity index for image quality assessment [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011, 20(8): 2378-2386.

## Hyperspectral Image Denoising Based on Fast Tri-factorization and Group Sparsity Regularized

GAO Xiaoyu<sup>1</sup>, BAI Jingyuan<sup>1</sup>, HUANG Yangzhi<sup>2</sup>, NING Jifeng<sup>1</sup>

(1 *College of Information Engineering, Northwest Agriculture & Forestry University, Yangling 712100, China*)

(2 *College of Science, Northwest Agriculture & Forestry University, Yangling 712100, China*)

**Abstract:** Hyperspectral Image (HSI) has rich information, it has been widely used in various fields. Due to the limitations of various factors, such as lighting conditions, transmission conditions and imaging instruments, HSI is polluted by various noises, which not only reduces the visual quality but also brings difficulties to subsequent processing. Many existing traditional denoising models still use nuclear norm minimization to iteratively solve the matrix rank minimization, and each iteration involves singular value decomposition, so these algorithms have a high computational complexity; in addition, total variation item fails to explore shared group sparsity patterns of difference images. In summary, how to express low rank more quickly and express sparsity more accurately is still a difficult problem. Under the framework of combining local low-rank and global group sparsity, this paper proposes the Fast Tri-factorization and Group Sparsity (FTFGS) model. In local modules, FTFGS model partitions the HSI into overlapping 3-D patches and converts patches into a matrix by lexicographical sorting. This operation conforms to the physical characteristics of HSI, avoids the formation of ill-conditioned matrices, and can better protect the details in the local blocks. This patchwise approach can reduce the dependence on the hypothesis that noise in HSIs is independent and identically distributed. When dealing with small-scale matrices, the Fast Tri-factorization (FTF) is used to decompose these matrices into two orthogonal factor matrices and a core matrix, the size of the core matrix and its  $L_{2,1}$  norm minimization are used to more accurately and quickly represent the local low rank. FTF explores the low rank, which has the advantages of lower computational complexity and faster speed than the nuclear norm, furthermore, FTF digs deeper into the low rank because the low rank constraints are transferred to a smaller core matrix. When exploring the sparsity, the existing total variation regularizations do not consider the group sparsity property of HSI and so on, the local area structure is the same for all bands, as is the smoothed structure. This paper proposes a new weighted spatial-spectral group sparse regularization to explore the shared group sparse pattern in each gradient direction of HSI. With this strategy, the local and global modules are executed alternately to express the local low-rank and global group sparsity properties of HSI and remove complex mixed noises. In the comparative experiments, intuitive visual effects, quantitative numerical evaluation and qualitative comparisons are used for evaluation. From the visual effects, the FTFGS model better preserves image details and texture information, and the visual effect is significantly improved. Compared with the five classical denoising methods, the average peak signal-to-noise ratio index is increased by 1.75 dB, the average structural similarity index is increased by 0.003, the average feature similarity index is increased by 0.002, and the denoising accuracy is significantly improved. Moreover, in the qualitative comparison

experiment, the spectral curve of our model is closest to the original image. The validation effect on the real dataset further proves its effectiveness. The reason for the good results is that compared to other models, FTFGS not only improves the local low-rank term, but also better explores the sparse prior of the image with the group sparse term. The time complexity analysis of the model verifies the effectiveness of the FTF framework. The model makes full use of the prior information of the HSI, which not only develops more accurate approximate representations for the low-rank and sparse, but also improves the speed while ensuring the optimal solution. The model is robust, fast and effective, and has certain research value for remote sensing and other application fields.

**Key words:** Image processing; Image denoising; Hyperspectral image; Alternating direction method of multiplier; Local low-rank; Group sparsity

**OCIS Codes:** 300.6320; 100.4145; 100.6890; 100.3020