

引用格式: CHEN Tianfeng, QIU Jiamin, PENG Hong, et al. Inverse Engineering of High-fidelity Quantum Operations Based on the Time Evolution Operator[J]. Acta Photonica Sinica, 2022, 51(11):1127001

陈添凤,邱嘉旻,彭宏,等. 基于时间演化算符的高保真度量子操控的逆向工程[J]. 光子学报, 2022, 51(11):1127001

基于时间演化算符的高保真度量子操控的 逆向工程

陈添凤^{1,2,3}, 邱嘉旻^{1,2,3}, 彭宏^{1,2,3}, 陈曦^{1,2}, 延英^{1,2,3}

(1 苏州大学 光电科学与工程学院 苏州纳米科技协同创新中心, 江苏 苏州 215006)

(2 苏州大学 江苏省先进光学制造技术重点实验室 教育部现代光学技术重点实验室省先进光学制造技术
重点实验室, 江苏 苏州 215006)

(3 苏州大学 数码激光成像与显示教育部工程研究中心, 江苏 苏州 215006)

摘要:为了克服不完备物理系统中存在的多个限制性因素对量子操控的影响,提出一种在三能级系统中创建非绝热高保真度量子操控的理论方案。其原理是基于一组辅助态构建系统的时间演化算符,同时在光脉冲中引入多个自由度参数,来逆向求解出系统的哈密顿量。该方案不仅可以消除量子比特能级之间的直接耦合微波场,而且可以通过优化自由度参数,使光脉冲对在一定频率范围分布的系综量子比特取得高保真度的量子操控,同时抑制对附近频域内其它量子比特的干扰激发。该方案适用于依靠频率寻址的量子系统。

关键词:量子操控;时间演化算符;逆向工程;频率失谐;保真度

中图分类号:O431.2

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20225111.1127001

0 引言

近年来,在量子信息处理、量子计算、量子通信^[1-4]等方面,对量子比特的相干操控引起广泛关注。在量子系统中,相干操控最重要的一个目标是对量子态进行精确操控。但是,承载量子比特相干操控的物理系统通常都是不完美的,会受到退相干、频率失谐、非共振激发,以及拉比频率波动等因素的干扰和制约。因此,要实现精确的量子操控,需要尽可能地克服这些限制性因素的影响。目前,操控量子态常用的技术包括绝热通道技术^[5-6]、共振脉冲技术^[7],以及量子绝热捷径等。其中,绝热通道技术对实验中出现的参数波动具有较高的鲁棒性,但是因为受到绝热条件的限制,演化过程较慢,因此受退相干的影响较为严重;共振脉冲技术虽然有较快的演化速度,但是对参数波动的鲁棒性较差。为了兼得高鲁棒性和快速演化两个特征,上海大学的陈玺教授提出了量子绝热捷径(Shortcut to Adiabaticity, STA)技术^[8-10]。该技术的核心是以非绝热方式(不需要满足绝热条件)来加速量子态的演化,同时保留了绝热过程的鲁棒性。

STA 的实施方法主要有两种,一种是基于刘易斯-里森菲尔德不变量(Lewis-Riesenfeld Invariant, LRI)理论的逆向工程^[11-14],另一种是无跃迁量子驱动(Transitionless Quantum Driving, TQD)^[15-17]。前者的思路是首先求出哈密顿量的不变量,然后基于 LRI 的瞬时本征态来构建薛定谔方程的解,进而反解出系统的哈密顿量。后者的核心是在一个初始哈密顿量 $H_0(t)$ 上增加反绝热耦合项,使得量子态在系统总哈密顿量的驱使下能非绝热地沿着 $H_0(t)$ 的瞬时本征态进行演化。2010 年,陈玺教授基于 TQD 提出仅在两个基态能级之间使用微波场就可以实现快速布局数转移^[17],但是这个微波场在某些实验中较难实施。为此,研究者在

基金项目:江苏省先进光学制造技术重点实验室自主研究课题(No. ZZ2109),苏州大学引进人才科研启动项目(No. Q421000114)

第一作者:陈添凤(1996-),女,硕士研究生,主要研究方向为量子光学。Email:20195239020@stu.suda.edu.cn

导师(通讯作者):延英(1979-),女,副教授,博士,主要研究方向为量子计算和微纳光学的理论和实验。Email:yingyan@suda.edu.cn

共同通讯作者:陈曦(1985-),男,实验师,硕士,主要研究方向为非球面光学设计和加工。Email:chansion@suda.edu.cn

收稿日期:2022-02-28;录用日期:2022-04-12

<http://www.photon.ac.cn>

三能级系统中,考虑到在大频率失谐情况下激发态没有布局数分布,因此可以将三能级系统简化为一个有效二能级系统,并确保在初始和终止时刻量子态的布局数与绝热状态时相同,基于TQD通过么正变换,得到有效的哈密顿量,达到修改光脉冲的目的,实现了两个量子比特能级之间的布局数转移^[18-19]。还有很多研究工作假设在三能级系统中不存在频率失谐问题(即共振模型),通过引入时间演化算符并结合逆向工程逆向求得哈密顿量,然后将此哈密顿量与初始哈密顿量进行对比获得修改后的光脉冲,进而实现高鲁棒性的量子态操控^[18,20]。目前,这两种技术已被应用于多种物理系统中,如囚禁离子^[21]、氮-空位(Nitrogen-Vacancy, NV)中心^[22]、超导量子系统(Superconducting Quantum System)^[5,23],以及稀土离子(Rare-Earth Ions, REI)量子比特系统^[13]等,实现了对某些参数波动具有较高鲁棒性的量子操控。但是,这些工作大多仅关注量子操控的鲁棒性,而没有提及量子操控可能对系统带来的不必要干扰激发,即对目标量子比特进行操控的光脉冲可能会对邻近的非共振的量子跃迁进行激发,从而对目标量子比特造成干扰。例如在REI系统^[24-27],对目标量子比特的操控会不可避免地对频域内临近的其它量子跃迁或背景离子进行非共振激发^[13],进而对目标量子比特造成干扰。又例如,超导量子比特系统可以看作不等间距的量子谐振子,相邻三个能级之间的跃迁频率差值称为非谐量^[28-29],对相邻两个能级的激发,会不可避免地激发其中一个到第三个能级的跃迁,为了减小这种干扰,一个方法是增大非谐量,但是付出的代价却是降低量子比特的相干时间。因此,在类似这样频率紧密分布的系统中,要想取得高保真度的量子操控,不仅需要快速和高鲁棒性的特征,还需要极低的非共振激发。

为了使量子操控具备上述三个特征,快速高效地制备量子比特的任意叠加态,课题组已基于LRI逆向工程理论^[13,30],结合光脉冲优化方法,在三能级系统中创建了快速、具有高鲁棒性和低非共振激发的量子操控,并将之应用于REI系统中,得到了较好的结果。然而,在LRI理论中,首先需要构造出哈密顿量的不变量,而在大多数系统中,不变量是未知的,构造不变量的过程较复杂,会受到某些实验系统的限制^[9]。TQD与LRI在一定程度上是等效的,二者之间可以互相转换^[16]。因此,原则上基于TQD也可以创建满足需求的量子操控。但是,在TQD方案中引入的反绝热耦合项^[17],在很多情况下是直接耦合两个量子比特能级($|0\rangle$ 和 $|1\rangle$)的微波脉冲,而在一些实验系统中,这种微波场不容易实施或不适合使用^[31]。比如,在稀土离子量子比特系统中,为了对量子比特进行有效的操控,首先需要通过光谱烧孔效应创建一个零吸收窗口,然后再将一小部分(频率分布宽度约170 kHz)稀土离子泵浦回透明窗口中作为量子比特^[24]。在创建零吸收窗口时,必须使位于吸收窗口左侧的稀土离子都处于 $|0\rangle$ 态。若在量子操控中使用微波场,它会对这些离子在两个量子比特能级 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间进行激发(这个跃迁的非均匀展宽非常非常小,可以忽略不计),导致部分离子会被泵浦到零吸收窗口中,对目标量子比特造成干扰。因此,在稀土离子量子比特系统中不适合使用微波场。为此,福州大学夏岩教授课题组提出,基于一组含时辅助基矢来构建时间演化算符,并结合逆向工程得到哈密顿量,进而通过约束基矢中的两个含时参量之间的关系来消除哈密顿量中的反绝热耦合项,在非绝热状态下实现了布局数转移^[32]。

本文同样基于TQD的逆向工程技术,通过合理设计时间演化算符,消除哈密顿量的反绝热耦合项,同时去除额外的微波场;并将此理论方案应用于频域紧密分布的稀土离子量子比特系统中,在非绝热光脉冲中引入多个新自由度参数,在不改变初始态和终止态的情况下,通过优化这些自由度参数的取值来改善光脉冲的工作性能。一方面增加量子操控对频率失谐量的鲁棒性;另一方面,使量子操控在对目标量子比特作用时,对临近量子比特造成极低的干扰激发。同时,本方案是一个非绝热过程,可大大缩短脉冲作用时间,降低退相干的可能性。

1 光脉冲的设计理论

考虑一个三能级系统,如图1所示,量子比特由基态能级 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 来表征,二者之间的耦合通过各自与激发态之间的跃迁,即 $|0\rangle - |e\rangle$ 或 $|1\rangle - |e\rangle$ 来实现,对应的拉比频率分别为 $\Omega_p(t)$ 和 $\Omega_s(t)$, φ 是 $\Omega_s(t)$ 的一个常数相位, $\Omega_a(t)$ 为微波场。在相互作用绘景中以及旋转波近似下,系统在共振情况下的含时哈密顿量表示为

$$H_0(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Omega_p(t) & 0 \\ \Omega_p(t) & 0 & \Omega_s(t)e^{-i\varphi} \\ 0 & \Omega_s(t)e^{i\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

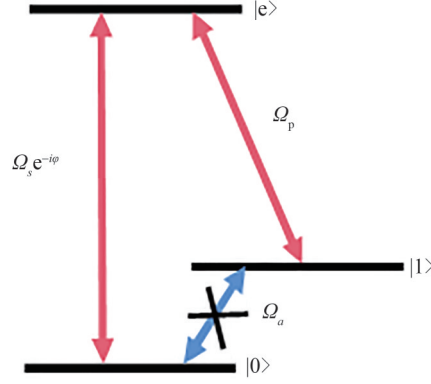

 图1 一个 Λ 型三能级系统的能级结构示意图

 Fig.1 The schematic energy level diagram of a three-level system with Λ configuration

首先,基于两个含时变量 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$,在 $|1\rangle, |e\rangle, |0\rangle$ 基矢下假设一组正交归一且完备的辅助态基矢,即

$$|\phi_1(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$|\phi_2(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\beta \\ -\cos\beta \\ \sin\alpha\sin\beta e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$|\phi_3(t)\rangle = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\beta e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (4)$$

基于这组基矢,系统的时间演化算符可以构建为^[32]

$$U(t) = |\phi_1(t)\rangle\langle\phi_1(0)| + \sum_{m,n=2,3} \gamma_{mn}(t) |\phi_m(t)\rangle\langle\phi_n(0)| \quad (5)$$

即,若量子比特的初始态为 $|\phi_1(t)\rangle$,则继续沿着这个态进行演化;若初始态为 $|\phi_2(t)\rangle$ 或 $|\phi_3(t)\rangle$,则有一定的概率在两个模式之间进行转换,这个概率由 $\gamma_{mn}(t)$ ($m \neq n, m, n = 2, 3$)来表征。

由于 $U(t)U^\dagger(t) = I$,参数 $\gamma_{mn}(t)$ 需要满足

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{mj}(t)\gamma_{nj}(t) = \delta_{mn} \quad (m, n = 2, 3) \quad (6)$$

式中, δ_{mn} 是Kronecker Delta函数。在式(6)的约束下,可以借助另一个含时参量 $l(t)$ 将 $\gamma_{mn}(t)$ 表达出来,于是式(5)变为

$$U(t) = |\phi_1(t)\rangle\langle\phi_1(0)| + \cos l(t) |\phi_2(t)\rangle\langle\phi_2(0)| + \sin l(t) |\phi_2(t)\rangle\langle\phi_3(0)| - \sin l(t) |\phi_3(t)\rangle\langle\phi_2(0)| + \cos l(t) |\phi_3(t)\rangle\langle\phi_3(0)| \quad (7)$$

由此得到系统的哈密顿量在辅助态基矢下的形式,即

$$H(t) = i\hbar(\partial_t U(t))U^\dagger(t) = i \sum_{j=1}^3 \left| \frac{d\phi_j(t)}{dt} \right\rangle \langle\phi_j(t)| + i \frac{dl(t)}{dt} (|\phi_2(t)\rangle\langle\phi_3(t)| - |\phi_3(t)\rangle\langle\phi_2(t)|) \quad (8)$$

此时,将式(2)~(4)代入式(8),得到哈密顿量在 $|0\rangle, |1\rangle, |e\rangle$ 基矢下的表达形式为

$$H(t) = i \left(\frac{d\beta}{dt} \cos\alpha - \frac{dl}{dt} \cos\alpha \cos\beta \right) (|e\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle e|) + i \left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dl}{dt} \sin\beta \right) (e^{i\varphi}|1\rangle\langle 0| - e^{-i\varphi}|0\rangle\langle 1|) + i \left(\frac{d\beta}{dt} \sin\alpha + \frac{dl}{dt} \cos\alpha \cos\beta \right) (e^{-i\varphi}|e\rangle\langle 1| - e^{i\varphi}|1\rangle\langle e|) \quad (9)$$

由此可见,哈密顿量中不仅包含了任意一个量子比特能级 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 与激发态 $|e\rangle$ 之间的耦合,也包含了 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间的直接耦合,即式(9)右边第二项。通常情况下它是一个微波场,比如在超导量子比特系统,REI系统,以及NV中心系统中等,这一微波场在某些实验系统中不适用。因此,拟消除这一项,令三个含时参量 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 以及 $l(t)$ 满足 $\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dl}{dt} \sin\beta = 0$,则式(9)变成

$$H(t) = i \left(\frac{d\beta}{dt} \cos\alpha - \frac{dl}{dt} \cos\alpha \cos\beta \right) (|e\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle e|) + i \left(\frac{d\beta}{dt} \sin\alpha + \frac{dl}{dt} \cos\alpha \cos\beta \right) (e^{-i\varphi}|e\rangle\langle 1| - e^{i\varphi}|1\rangle\langle e|) \quad (10)$$

至此,借助三个含时参量构造出了时间演化算符,并逆向求解出系统的哈密顿量,通过约束三个含时参量之间的关系,在三能级系统中将两个量子比特能级之间的直接耦合项去除掉。

结合式(1)、(10),可得到光脉冲 $\Omega_{p,s}(t)$ 的表达形式为

$$\begin{cases} \Omega_p(t) = \frac{d\beta}{dt} \cos\alpha + \frac{d\alpha}{dt} \sin\alpha \cot\beta \\ \Omega_s(t) = \frac{d\beta}{dt} \sin\alpha - \frac{d\alpha}{dt} \cos\alpha \cot\beta \end{cases} \quad (11)$$

这样,基于两个含时变量 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 得到了光脉冲的拉比频率;对光脉冲的设计问题转换为构建 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 的问题。另外,考虑到在实验中,如果光脉冲振幅在时域中有急速变化,那么它必然会在频域内带来多个冗余分量,可能对目标量子态造成干扰。因此,光脉冲的振幅最好在起始和终止时刻都为零,即

$$\Omega_{p,s}(t=0, t=t_f) = 0 \quad (12)$$

这要求 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 满足如下边界条件

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt}|_{t=0} = \frac{d\beta}{dt}|_{t=0} = 0 \\ \frac{d\alpha}{dt}|_{t=t_f} = \frac{d\beta}{dt}|_{t=t_f} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

本文目标是使哈密顿量 $H(t)$ 驱动三能级系统在两个量子比特态能级之间进行精确演化,将量子比特初始化到一个任意叠加态上。量子操控的精确度用保真度 F 来衡量,即

$$F = \left| \langle \phi_{\text{target}} | \phi_{t_f} \rangle \right|^2 \quad (14)$$

式中, $|\phi_{t_f}\rangle$ 为量子比特在脉冲终止时刻 t_f 的量子态, $|\phi_{\text{target}}\rangle$ 为目标量子态。

基于以上理论考虑一个最简单的情况,即哈密顿量驱动系统沿着 $|\phi_1(t)\rangle$ 从初始态 $|\phi_1(0)\rangle = |0\rangle$ 演化到目标叠加态 $|\phi_{\text{target}}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ 。即 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 必须在初始和终止时刻满足如下边界条件

$$\alpha(0) = \beta(0) = 0 \quad (15)$$

$$\alpha(t_f) = \frac{\pi}{4}, \beta(t_f) = 0 \quad (16)$$

考虑到式(13)以及高鲁棒性和低非共振激发的要求,提出 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 为

$$\beta(t) = \sum_{k=1}^n a_k \sin \frac{2k\pi t}{t_f} \quad (17)$$

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2t_f} \int_0^t \beta^2(t') dt' + C \quad (18)$$

式中, $a_k(k=1, 2, 3, 4\cdots)$ 是不含时的常数, 表征每个正弦函数的权重; C 为一常数, 其取值可以在满足 $\alpha(t)$ 的边界条件下进行选取, 这里令 $C=0$ 。式(17)和(18)所示 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 显然满足式(15)和(16)要求的边界条件。为满足边界条件式(13), $a_k(k=1, 2, 3, 4\cdots)$ 需要满足

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \cdots na_n = 0 \quad (19)$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \cdots a_n^2 = 1 \quad (20)$$

由式(19)、(20)可知, n 个参数中 $(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots a_n)$ 仍然有 $n-2$ 个自由度, 这些自由度可以用来对光脉冲进行优化。因为在不考虑频率失谐和非共振激发的前提下, 无论 a_k 取何值, 量子态都可以完美地沿着 $|\phi_1(t)\rangle$ 进行演化, 达到目标态。但是, 在 REI 系综量子比特系统中, 系综量子比特中的频率失谐和光脉冲对附近量子比特的非共振激发都会降低量子操控的保真度, 借助这些自由度可以优化光脉冲的工作性能, 实现高保真度的量子操控。

在式(19)和(20)中, n 的取值原则上可以无限大, 这样提供更多的空间去调节光脉冲的工作性能, 但是 n 越大, 相应正弦波的频率就越高, 而在实际应用中, 正弦波的频率可能会受到所使用仪器设备的时间精度的限制。因此考虑 $n=4$ 的情况, 即

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0 \quad (21)$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1 \quad (22)$$

值得指出的是, 前文所述理论方案考虑的是哈密顿量驱动系统沿着 $|\phi_1(t)\rangle$ 演化的情况, 但事实上, 对于所述初始态和目标态, 哈密顿量也可驱动系统沿着另外一个路径演化, 即沿 $|\phi_2(t)\rangle$, 实现既定的量子操控。此时, 式(5)所示的时间演化算符应该调整为 $U(t) = |\phi_2(t)\rangle\langle\phi_2(0)| + \sum_{m,n=1,3} \gamma_{mn}(t) |\phi_m(t)\rangle\langle\phi_n(0)|$, 相应地, 式(15)和(16)也要发生改变, 但是, 逆向设计的基本原理保持不变。但是, 系统不可能沿 $|\phi_3(t)\rangle$ 进行演化, 因为 $|\phi_3(t)\rangle$ 要求 $|e\rangle$ 态上的布局数时时刻刻为零, 这点在使用两个光场间接地对两个量子比特能级进行耦合时是不可能实现的。

2 数值模拟

将理论方案应用于 REI 系统中 ($\text{Pr}^{3+}:\text{Y}_2\text{SiO}_5$), 考察是否可以创建快速、高鲁棒性和低非共振激发的量子操控。REI 系统具有长达 6 h 的量子比特相干时间^[24-27], 是一个有竞争力的量子计算硬件的测试体, 而且晶体材料的制作工艺成熟, 可以直接采购。在 REI 系统中, 极少量的 Pr^{3+} 以随机掺杂的方式取代硅酸钪晶体中的钪离子。研究者通常选取 Pr^{3+} 基态中两个超精细能级作为量子比特, 这两个能级之间的耦合通过各自与激发态之间的光学跃迁来实现, 相关的能级系统都可以看做一个三能级型系统。在这样的系统中实现精确的量子操控, 除了快速以外, 还需要满足两个条件: 1) 量子操控对表征量子比特的数十亿个镨离子 (称为系综量子比特) 具有同等效果的激发, 即对约 170 kHz (半高全宽) 的频率失谐量具有高鲁棒性^[24]; 2) 由于晶体中原子密度极高, 所以在目标量子比特跃迁频率附近 (≥ 3.5 MHz) 存在着大量的非共振 Pr^{3+} 离子, 称为背景离子。这就要求量子操控对这些背景离子尽可能地不要有任何激发, 即量子操控必须具有足够低的非共振激发^[25]。

此处, 以 $|\phi_{\text{target}}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + |1\rangle)$ 为例, 将式(11)、(17)、(18)所述光脉冲代入三能级耦合微分方程中^[13,33], 考察上述光脉冲在应用于 REI 系统中时对量子态的操控性能。脉冲的作用时长设置为 $4 \mu\text{s}$, 对于 REI 系统而言是一个比较合理的时间。如果时长过短, 脉冲的频谱过宽, 可能引起对目标量子比特领域内其它离子的非共振激发; 如果时长过长, 可能会造成较严重的退相干效应。发现光脉冲中 a_k 的取值不同, 量子操控保真度对频率失谐的鲁棒性和对背景离子的非共振激发情况也不同。为此, 对 a_k 进行了优化, 发现一组最优化值: $a_1 = -0.74836$, $a_2 = 0.63918$, $a_3 = 0.05$, $a_4 = -0.17$, 详细的优化步骤见附录。在这组取值下, 光脉冲 $\Omega_{p,s}(t)$ 以及量子态的演化情况分别如图 2(a)、(b) 所示。从图 2(a) 可看出, 拉比频率 $\Omega_{p,s}(t)$ 在初末时刻的值均为零, 满足式(12)的要求。从图 2(b) 看出, 布局数在初始时刻全部在能级 $|0\rangle$ 上, 而在终止时刻布局数平均分布在 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 两个能级上, 在激发态 $|e\rangle$ 上没有布局数分布, 此结果与目标态相吻合。

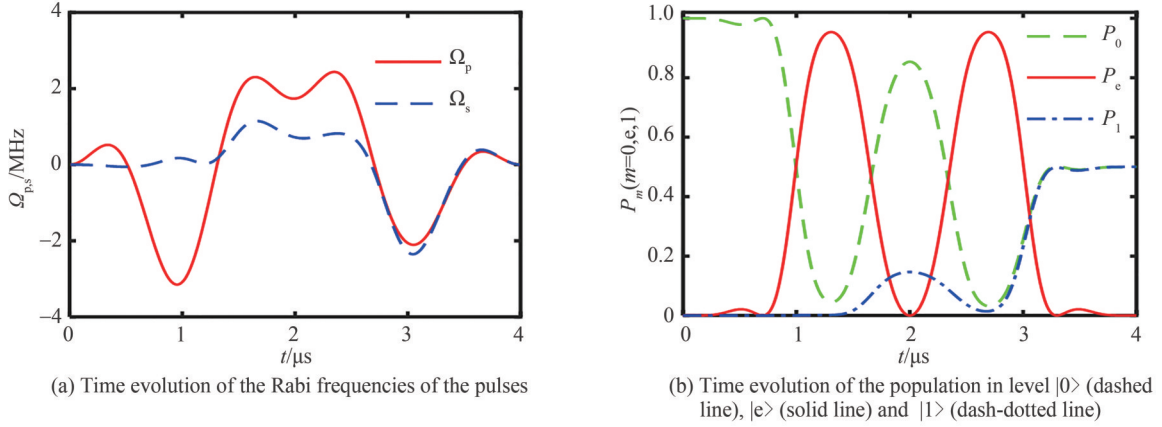
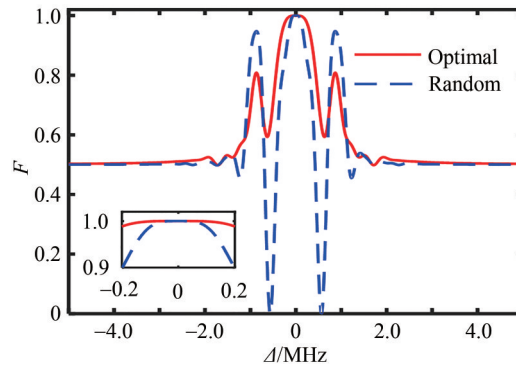


图2 光脉冲拉比频率和量子态布局数随时间的演化情况

Fig.2 Time evolution of the Rabi frequencies of the pulses and the population of the quantum state

2.1 高鲁棒性

为了考察上述光脉冲对于REI系综量子比特中频率失谐量 Δ 的鲁棒性,在三能级耦合微分方程中引入了频率失谐量,并考察了在脉冲终止时刻,量子比特达到目标量子态的保真度对频率失谐量 Δ 之间的依赖关系,结果如图3所示。在 ± 170 kHz频率失谐范围内,设计的光脉冲对系综量子比特的平均操控保真度为99.86%,比文献[13]中的结果(99.79%)略高,说明量子操控具有较好的鲁棒性。作为对比,在 a_k 的有效取值范围内随机取了一组值: $a_1 = -4/\sqrt{17}$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1/\sqrt{17}$,此时光脉冲对系综量子比特的平均操控保真度为98.23%。

图3 获得目标态 $|\phi_{\text{target}}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ 的保真度对频率失谐的依赖关系Fig.3 Dependence of the fidelity of achieving the target state $|\phi_{\text{target}}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ on the frequency detuning

2.2 低非共振激发

除了对频率失谐量的鲁棒性以外,还关心光脉冲在对感兴趣的量子比特进行操控时,是否会对其邻近频域的背景离子或其它量子比特造成非共振激发。即在理想情况下,如果不存在非共振激发,那么背景离子应该保持在其初始状态 $|0\rangle$ 上。为此,考察了在光脉冲结束时刻,量子态 $|\phi_i(t_f)\rangle$ 在能级 $|0\rangle$, $|e\rangle$, $|1\rangle$ 上的布局数与频率失谐量之间的依赖关系,结果如图4所示。对于 $|\Delta| = 3.5$ MHz处的量子比特离子,在 $|1\rangle$ 态上的布局数(蓝色曲线)低于3%;随着频率失谐量的增加,在 $|1\rangle$ 态上的布局数逐渐降低;在 $|\Delta| \geq 5$ MHz时,背景离子被非共振地激发到 $|1\rangle$ 态上的概率低于1.45%。在3.5 MHz时的非共振激发概率比文献[13]中结果(2.7%)略高,但是仍然在可接受的范围内,尤其是选择能级间距更大的稀土离子作为工作物质时,如 Eu^{3+} 。

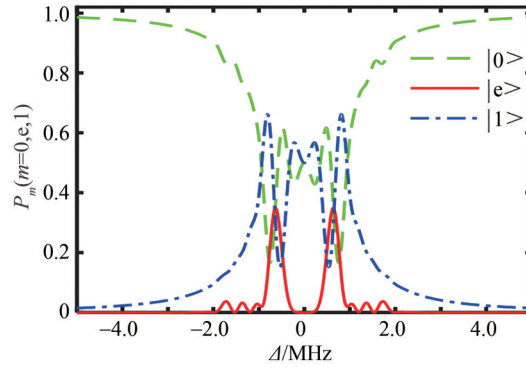

 图4 量子态 $|\phi_i\rangle$ 在能级 $|0\rangle$ 、 $|e\rangle$ 和 $|1\rangle$ 上的布局数对频率失谐的依赖情况

 Fig.4 Dependence of population in level $|0\rangle$, $|e\rangle$ and $|1\rangle$ of the final state $|\phi_i\rangle$ on the frequency detuning

数值模拟结果表明,设计的光脉冲既对于系综量子比特中存在的频率失谐(≤ 170 kHz)具有高鲁棒性,也对于位于目标量子比特寻址频率附近的(≥ 3.5 MHz)背景离子具有极低的非共振激发,符合REI系统对量子比特进行高保真度操控的需求。

3 实验方案

图2(a)所示的光脉冲在实验中是切实可行的,可以通过连续激光和声光调制器等设备来产生,实验装置示意图如图5所示。首先,使用任意波形发生器(AWG)生成两个无线电脉冲(RF)信号,它们的振幅与式(11)所示拉比频率成正比,位相与光脉冲的位相相同,即

$$\begin{cases} E_{p,s} = A \cdot \begin{cases} \Omega_{p,s}, \Omega_{p,s} > 0 \\ e^{i\pi} \cdot |\Omega_{p,s}|, \Omega_{p,s} < 0 \end{cases} \\ f_p - f_s = E_{01}/h \\ \varphi_p = 0, \varphi_s = -\varphi \end{cases} \quad (23)$$

式中, A 为从光脉冲的拉比频率 $\Omega_{p,s}$ 到无线电信号振幅 $E_{p,s}$ 的转换系数,由实验系统决定; E_{01} 是两个量子比特能级 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间的能级差; h 是普朗克常数。RF脉冲驱动声光调制器(AOM),使之对入射的连续激光调制,这样AOM输出的一阶偏折光束便是所需的光脉冲,其时长、振幅、位相等参数全部由AWG生成的RF信号决定。当光束聚焦直径为 $100 \mu\text{m}$ 时,一阶偏折光束的典型上升时间为数十纳秒。因此,基于此系统可以生成如图2(a)所示的光脉冲。

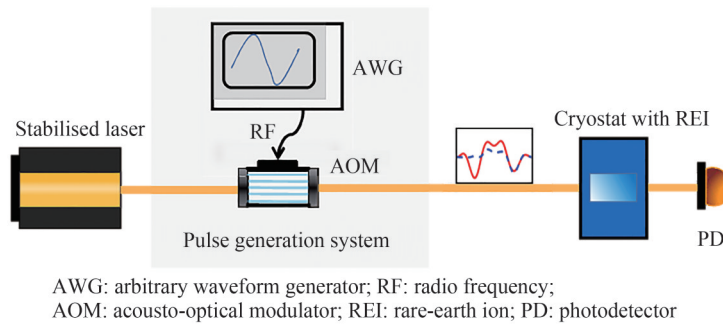


图5 实验装置图

Fig.5 The schematic experimental setup

由式(23)、(11)、(17)和(18)可见, a_k 的取值决定了RF信号的波形。而在实验中,每个AWG都有特定的时间分辨率和振幅分辨率,通过数值计算得到的最优 a_k 值,如果使RF信号的振幅变化太快,超过了AWG的时间分辨能力,或者 a_k 中小数点后最后一个数位上的数值对应的RF信号的振幅变化低于AWG的振幅分辨率,那么所生成的RF信号就会偏离理想波形,这种偏离会影响AOM的声光调制作用强度,使得生成的光

脉冲也偏离理想波形。因此,有必要考察操控保真度对 a_k 在其最优值附近的波动的依赖程度,这可以为实验研究提供一些参考。鉴于本文给出的最优值中, a_1 和 a_2 远大于 a_3 和 a_4 ,因此,有理由相信 a_1 和 a_2 对保真度的影响会更大,为此,考察了保真度对 a_1 和 a_2 波动的依赖关系($\Delta = 0$),结果如图6所示,图中 $\eta_1 = \frac{\Delta a_1}{a_1}$, $\eta_2 = \frac{\Delta a_2}{a_2}$ 代表着 a_1 和 a_2 在最优值附近的相对波动。在 $\eta_1 = \pm 10\%$, $\eta_2 = \pm 10\%$ 区间内,即图中红色点线方框内,绝大部分情况下保真度仍大于99%。

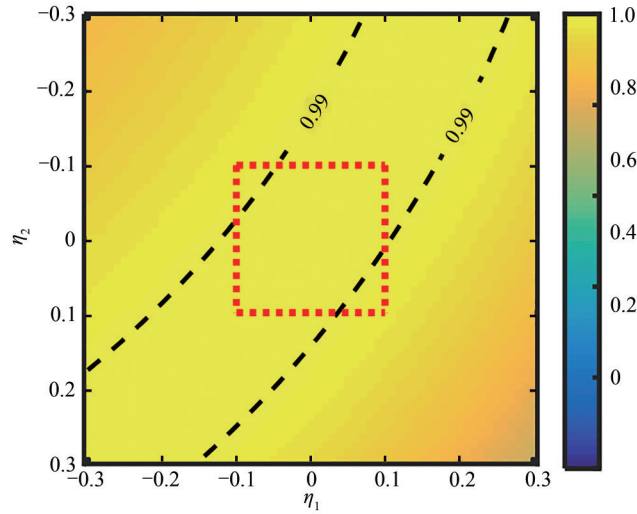


图6 在 $\Delta=0$ 下,保真度对 a_1 和 a_2 值波动的依赖关系

Fig. 6 Dependence of fidelity on the fractional fluctuation of a_1 and a_2 with $\Delta=0$

4 与无跃迁量子驱动技术的对比

本文提出的理论方案,与传统的无跃迁量子驱动方案相比,相似之处是二者都通过构建时间演化算符逆向求解出系统的哈密顿量,且都涉及到两个量子比特能级之间的直接耦合项,但存在着显著差异。本文理论方案具有如下特征:1)量子态沿着辅助态进行演化,而不是初始哈密顿量的瞬时本征态。辅助态由两个含时参量 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 来决定,在满足边界条件的情况下, $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 可以有多种选择,使得辅助态具有更大的调节空间。2)通过逆向设计哈密顿量消除了微波场,不但可以简化实验装置,而且可以为某些无条件或不适合使用微波场的实验系统,如REI系统,带来极大便利。更重要的是,采用本文方案消除掉 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间的直接耦合微波场,只需要使三个含时变量 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 和 $l(t)$ 满足关系式 $\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dl}{dt} \sin\beta = 0$ 即可,不需要在其他任何方面付出代价。即式(5)所述时间演化算符提供了自由度,对于任意形式的 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$,总可以根据 $\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dl}{dt} \sin\beta = 0$ 找到一个 $l(t)$ 。但是,光脉冲的数目和具体形式如式(11)所示,却不依赖于 $l(t)$,所以不会受到任何影响。3)在含时参量中引入多个自由度,使哈密顿量的构造具有更高的灵活性,可用来调节光与物质相互作用的动力学行为。

5 结论

本文借助一组正交归一的辅助态,构建出时间演化算符,并由此逆向推出系统的哈密顿量;通过约束辅助态中的含时参量之间的关系,消除了哈密顿量中的微波场,简化实验操作步骤。同时通过在含时参量中引入多个自由度参数并对其值进行优化,设计出了非绝热的、对较小范围($|\Delta| \leq 170$ kHz)的频率失谐量具有高保真度,且对临近量子比特($|\Delta| \geq 3.5$ MHz)具有较低非共振激发的量子操控光脉冲。将此理论方案应用于REI量子系统中,数值模拟表明,该光脉冲可以操控系综量子比特创建一个任意叠加态,平均操控保真度高于99.86%。

本文提出的理论方案不仅适用于稀土离子量子比特系统,也适用于其它任何依靠频率寻址的量子系统,如氮-空位中心系统,超导量子比特系统等。另外,还可以结合微扰理论,将此理论方案进行拓展,使量子操控在对频率失谐量具有高鲁棒性,对邻近量子比特具有低非共振激发的前提下,进一步对拉比频率波动也具有较高的鲁棒性。克服这些物理限制性因素对量子操控的影响,对量子计算、量子纠错以及量子通信等量子科技都具有积极意义。

附录

如引言中所述,期望量子操控能对 REI 系综量子比特中存在的频率失谐量具有高鲁棒性,即在 $|\Delta| \leq 170$ kHz 时,保真度要尽可能地趋近于 1;而对距离目标量子比特约 3.5 MHz 以外的背景离子不产生干扰,即在 $|\Delta| \geq 3.5$ MHz 时,非共振激发要尽可能地低。为此,对式(17)中的参数 a_k 进行优化。采用的方法是对 a_k 在其有效取值范围内进行扫描,考察量子操控在 $|\Delta| \leq 170$ kHz 范围内的保真度,以及在 ± 3.5 MHz 处的非共振激发。保真度越高,非共振激发越低,参数的取值就越优越。

具体步骤为:

首先,式(21)和(22)限定了 a_3 和 a_4 必须在 $[-1, 1]$ 范围内,对于在此范围内的任意值, a_1 和 a_2 都可以由此二元二次方程组求出。为了清晰地看到这两个参数对量子操控保真度和非共振激发的影响。令 $\Delta = 170$ MHz,对它们进行了扫描,保真度对 a_3 和 a_4 的依赖关系如图 7(a) 所示;同时,在 $\Delta = 3.5$ MHz 处 $|1\rangle$ 态上的布局数 P_1 对 a_3 和 a_4 的依赖关系如图 7(b) 所示, P_1 越低,说明非共振激发越低。图 7(a) 和 7(b) 的交叠区域是感兴趣的参数空间,在此交叠区域中 a_3 的取值范围是 $[-0.07, 0.14]$ 。

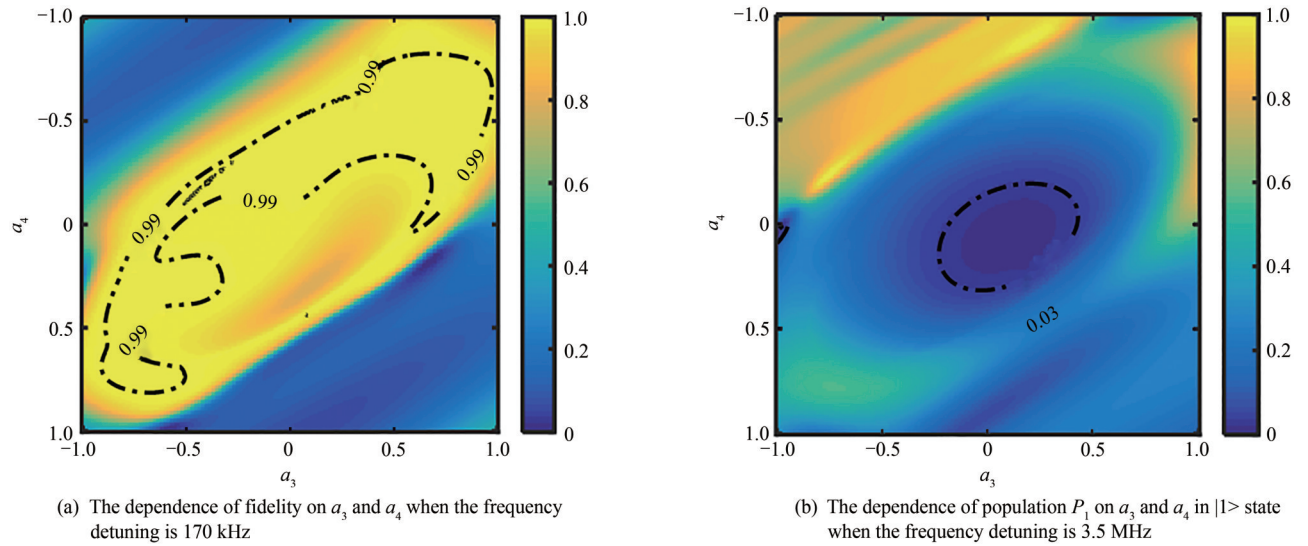


图 7 光脉冲对系综量子比特的操控保真度 F 以及对背景离子的非共振激发 P_1 对 a_3 和 a_4 的依赖关系

Fig. 7 Dependence of the operational fidelity F over the ensemble qubit and the off-resonant excitation P_1 of the background ions on a_3 and a_4

其次,为了在前一步得到的范围内对 a_3 和 a_4 的取值进行更精细的优化,令 $a_3 = 0.05$,对 a_4 在其有效取值范围内 ($a_4 \in [-0.5, 0.45]$) 进行扫描,寻找出保真度 $F = 0.99$ 时对应的频率失谐量值 Δ_1 和 Δ_2 。由此可得出,保真度大于等于 0.99 的频率失谐量范围为 $\Gamma = |\Delta_1 - \Delta_2|$ 。同时,考察频率失谐量 $\Delta = 3.5$ MHz 时所对应的非共振激发 P_1 的值(从图 4 可以看出, P_1 对于频率失谐量呈对称分布,因此这里只考虑了 3.5 MHz 时的情况),结果如图 8 所示。理想的结果是在确保 P_1 足够小(例如 $< 3\%$)的前提下, Γ 的值越大越好。从图中看出,当 $a_4 = -0.17$ 时, $\Gamma = 0.38$ MHz, $P_1 = 3.0\%$,量子操控兼具高鲁棒性和低非共振激发的特性。此时,根据式(20)和(21)可以求出 $a_1 = -0.74836$, $a_2 = 0.63918$,即文中采用的最优值。需要指出的是,最优值有多种选择,文中给出的只是一组。

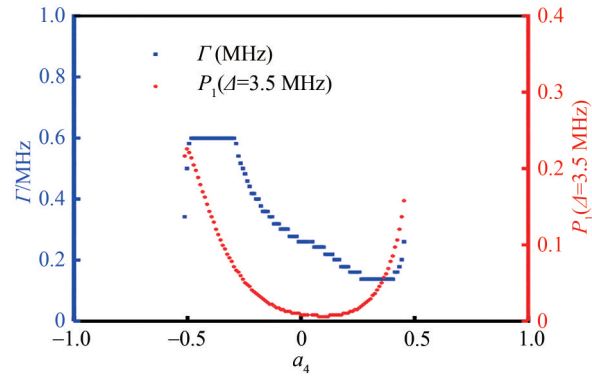


图8 保真度 $F \geq 0.9$ 对应的频率失谐量区间 Γ 以及在 $\Delta=3.5$ 时 $|1\rangle$ 态上的布局数 P_1 对 a_4 的依赖关系

Fig. 8 Dependence of the range of the frequency detuning Γ with $F \geq 0.99$ and the population in $|1\rangle$ state P_1 with $\Delta=3.5$ MHz on a_4

参考文献

- [1] CHILDS A M, PRESKILL J, RENES J. Quantum information and precision measurement[J]. Journal of Modern Optics, 2000, 47(2-3): 155-176.
- [2] STEANE A. Quantum computing[J]. Reports on Progress in Physics, 1998, 61: 117-173.
- [3] PAVIČIĆ M. Quantum computation and quantum communication: theory and experiments [M]. New York: Springer, 2005: 24-28.
- [4] GROVER L K. Quantum computers can search arbitrarily large databases by a single query[J]. Physical Review Letters, 1997, 79(23): 4709-4712.
- [5] MAKHLIN Y, SCHÖN G, SHNIRMAN A. Quantum-state engineering with Josephson-junction devices[J]. Reviews of Modern Physics, 2001, 73(2): 357-400.
- [6] LAINE T A, STENHOLM S. Adiabatic processes in three-level systems[J]. Physical Review A, 1996, 53(4): 2501-2512.
- [7] DAEMS D, RUSCHHAUPT A, SUGNY D, et al. Robust quantum control by a single-shot shaped pulse[J]. Physical Review Letters, 2013, 111(5): 050404.
- [8] CHEN Xi, MUGA J G. Engineering of fast population transfer in three-level systems[J]. Physical Review A, 2012, 86(3): 033405.
- [9] RUSCHHAUPT A, CHEN Xi, ALONSO D, et al. Optimally robust shortcuts to population inversion in two-level quantum system[J]. New Journal of Physics, 2012, 14: 093040.
- [10] TORRONTEGUI E, IBÁÑEZ S, MARTÍNEZ-GARAOT S, et al. Shortcut to adiabaticity[J]. Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics, 2013, 62: 117-169.
- [11] KIELY A, RUSCHHAUPT A. Inhibiting unwanted transitions in population transfer in two- and three-level quantum systems[J]. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 2014, 47: 115501.
- [12] LU Mei, XIA Yan, SHEN Lituo, et al. An effective shortcut to adiabatic passage for fast quantum state transfer in a cavity quantum electronic dynamics system[J]. Laser Physics, 2014, 24(10): 105201.
- [13] YAN Ying, LI Yichao, KINOS A, et al. Inverse engineering of shortcut pulses for high fidelity initialization on qubits closely spaced in frequency[J]. Optics Express, 2019, 27(6): 8267-8282.
- [14] CHEN Tianfeng, WAN Lin, QIU Jiamin, et al. Engineering of the qubit initialization in an imperfect physical system[J]. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 2021, 54(13): 135503.
- [15] BERRY M V. Transitionless quantum driving[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009, 42(36): 365303.
- [16] CHEN Xi, TORRONTEGUI E, MUGA J G. Lewis-Riesenfeld invariants and transitionless quantum driving [J]. Physical Review A, 2011, 83(6): 062116.
- [17] CHEN Xi, LIZUAIN I, RUSCHHAUPT A, et al. Shortcut to adiabatic passage in two- and three-level atoms[J]. Physical Review Letters, 2010, 105(12): 123003.
- [18] CHEN Zhen, CHEN Yehong, XIA Yan, et al. Fast generation of three-atom singlet state by transitionless quantum driving[J]. Scientific Reports, 2016, 6: 22202.
- [19] CHEN Yehong, XIA Yan, SONG Jie, et al. Shortcut to adiabatic passage for fast generation of Greenberger-Horne-Zeilinger states by transitionless quantum driving[J]. Scientific Reports, 2015, 5: 15616.
- [20] LI Yichao, CHEN Xi. Shortcut to adiabatic population transfer in quantum three-level systems: effective two-level problems and feasible counterdiabatic driving[J]. Physical Review A, 2016, 94(6): 063411.

- [21] AN Shuoming, LV Dingshun, DELCAMPO A, et al. Shortcuts to adiabaticity by counterdiabatic driving for trapped-ion displacement in phase space[J]. *Nature Communications*, 2016, 7: 12999.
- [22] NÖBAUER T, ANGERER A, BARTELS B, et al. Smooth optimal quantum control for robust solid-state spin magnetometry[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(19): 190801.
- [23] ZHONG Manjin, HEDGES M P, AHLEFELDT R L, et al. Optically addressable nuclear spins in a solid with a six-hour coherence time[J]. *Nature*, 2015, 517: 177-180.
- [24] RIPPE L, JULSGAARD B, WALTHER A, et al. Experimental quantum-state tomography of a solid-state qubit[J]. *Physical Review A*, 2008, 77(2): 022307.
- [25] YAN Ying. Towards single Ce ion detection in a bulk crystal for the development of a single-ion qubit readout scheme[D]. Sweden: Lund University, 2013: 58-60.
- [26] OHLSSON N, MOHAN R K, KRÖLL S. Quantum computer hardware based on rare-earth-ion-doped inorganic crystals[J]. *Optics Communications*, 2002, 201(1-3): 71-77.
- [27] EQUALL R W, CONE R L, MACFARLANE R M. Homogeneous broadening and hyperfine structure of optical transitions in $\text{Pr}^{3+}:\text{Y}_2\text{SiO}_5$ [J]. *Physical Review B*, 1995, 52(6): 3963-3969.
- [28] LI Sai, CHEN Tao, XUE Zhengyuan. Fast holonomic quantum computation on superconducting circuits with optimal control[J]. *Advanced Quantum Technologies*, 2020, 3(3): 2000001.
- [29] XU Jing, LI Sai, CHEN Tao, et al. Nonadiabatic geometric quantum computation with optimal control on superconducting circuits[J]. *Frontiers of Physics*, 2020, 15(4): 41503.
- [30] YAN Ying, SHI Chunyan, KINOS A, et al. Experimental implementation of precisely tailored light-matter interaction via inverse engineering[J]. *npj Quantum Information*, 2021, 7(1): 138.
- [31] OPATRNÝ T, MÖLMER K. Partial suppression of nonadiabatic transitions [J]. *New Journal of Physics*, 2014, 16: 015025.
- [32] KANG Yihao, CHEN Yehong, WU Qicheng, et al. Reverse engineering of a Hamiltonian by designing the evolution operators[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 30151.
- [33] YAN Ying, LU Jie, WAN Lin, et al. Robust pulses for high fidelity non-adiabatic geometric gate operations in an off-resonant three-level system[J]. *Physics Letters A*, 2019, 383 (7): 600-606.

Inverse Engineering of High-fidelity Quantum Operations Based on the Time Evolution Operator

CHEN Tianfeng^{1,2,3}, QIU Jiamin^{1,2,3}, PENG Hong^{1,2,3}, CHEN Xi^{1,2}, YAN Ying^{1,2,3}
 (1 *School of Optoelectronic Science and Engineering, Collaborative Innovation Center of Suzhou Nano Science and Technology, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215006, China*)
 (2 *Key Lab of Advanced Optical Manufacturing Technologies of Jiangsu Province, Key Lab of Modern Optical Technologies of Education Ministry of China, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215006, China*)
 (3 *Engineering Research Center of Digital Imaging and Display, Ministry of Education, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215006, China*)

Abstract: Controlling and manipulating the internal states by optical pulses are crucial in some physical systems. However, it is a challenge to achieve the high-precision quantum computing in imperfect physical systems, because it is limited by various dephasing factors such as frequency detuning or fluctuation in a tightly packed frequency interval, the unwanted off-resonant excitation outside this interval, decoherence, and Rabi frequency fluctuations. At present, different methods, such as Lewis-Riesenfeld Invariant (LRI) and Transitionless Quantum Driving (TQD), have been put forward and been implemented experimentally to inversely engineer the time-dependent Hamiltonian of a quantum system and to accelerate slow adiabatic processes via nonadiabatic shortcuts. Here, we use the TQD method to speed up adiabatic passage technique in the Rare-Earth Ions (REI) system and to eliminate the microwave field that is hard to implement experimentally. According to the characteristics of the REI system, to achieve the high-precision quantum control demands that the light-matter interaction treat different frequencies as a single one, but shut off abruptly. That means, the quantum control should have the same manipulation over the ensemble qubit ions with a frequency distribution in the range of ± 170 kHz. At the same time, it can't affect the background qubit ions which are about 3.5 MHz away from the addressing frequency of the target

qubit as these excited background qubit ions have a probability of interfering with the target qubit ions. Therefore, it is necessary and important to control the light-matter interaction by designing appropriate optical pulses specifically, so that the quantum control can overcome the influence of the restrictive factors present in the system, eventually achieving high-fidelity quantum manipulation in such systems. In this article, we made an analysis on the three limitation factors: 1) the frequency detuning between the ensemble qubit ions, 2) the off-resonant excitation to the background qubits around the target qubit, 3) the infeasibility of using a microwave field to directly couple the two qubit levels. We proposed a theoretical scheme for non-adiabatic high-fidelity quantum operations in a three-level system to overcome the three limitation factors. The main work includes: 1) The theoretical scheme to construct the optical pulses by utilizing the time evolution operator is proposed. It is constructed based on a set of orthogonal auxiliary states containing time-dependent parameters, and the Hamiltonian of the system is inversely constructed from the time evolution operator. From the one-to-one correspondence between the matrix elements in the Hamiltonian and the Rabi frequency of optical pulses, the representation of optical pulses is obtained. 2) A method of eliminating a microwave field to directly couple the two qubit levels is proposed. By confining the relationship between the time-dependent parameters, which are introduced in the orthogonal auxiliary states and time evolution operators, the microwave coupling term in the Hamiltonian is eliminated. The elimination of the microwave field can simplify the experimental operation. 3) The non-adiabatic optical pulses to manipulate the quantum state of REI ensemble qubits with high fidelity are designed. The performance of the optical pulses is improved by optimizing the multiple degrees of freedom in the pulses. In summary, the optical pulses developed in this scheme can not only eliminate the direct-coupling microwave field between the two qubit levels, but also achieve high-fidelity (99.86%) quantum control over the ensemble qubits which are distributed in a frequency range of about ± 170 kHz, and in the meanwhile suppress the unwanted excitation of other qubits with a distance to the qubit-ion addressing frequency ≥ 3.5 MHz. This scheme is not only applicable to REI ensemble qubit system, but also to other quantum systems where qubits are addressed in frequency.

Key words: Quantum manipulation; Time evolution operator; Inverse engineering; Frequency detuning; Fidelity

OCIS Codes: 270.5585; 270.1670; 270.5565