

引用格式: YANG Zhanying, WU Yuhuan. Frontier Progress of Breathers in Nonlinear Optical Systems (Invited)[J]. Acta Photonica Sinica, 2022, 51(10):1019001

杨战营,吴玉涵.非线性光学系统中呼吸子前沿发展现状(特邀)[J].光子学报,2022,51(10):1019001

# 非线性光学系统中呼吸子前沿发展现状(特邀)

杨战营<sup>1,2,3</sup>,吴玉涵<sup>1,2</sup>

(1 西北大学 物理学院, 西安 710127)

(2 陕西省理论物理前沿重点实验室, 西安 710127)

(3 彭恒武高能基础理论研究中心, 西安 710127)

**摘要:**呼吸子泛指一类具有周期演化或周期分布结构的非线性波,它已成为非线性光学系统的研究热点之一。介绍了多种呼吸子在时域和频域空间中的动力学特性,讨论了其历史发展与实际物理意义。通过分析调制不稳定性与呼吸子之间的关系,讨论了呼吸子的激发机制及不同呼吸子之间的定量转换关系。由于呼吸子间存在多种相互作用形式,还讨论了由呼吸子碰撞诱发的高振幅波、Super-regular呼吸子等过程。这些结果有助于读者对非线性系统中呼吸子动力学的理解,并进一步探究和实现光学呼吸子的实际应用与可控激发。

**关键词:**非线性光学;呼吸子;怪波;动力学;激发机制;相互作用

中图分类号:O415

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20225110.1019001

## 0 引言

呼吸子(Breather),泛指一类具有周期演化或周期分布结构的非线性波,它们的形状在传输过程中经历周期性振荡,并且可以在有限背景的时间或空间中具有局域性。这类呼吸子广泛存在于非线性光学<sup>[1-6]</sup>、流体力学<sup>[7]</sup>、玻色-爱因斯坦凝聚<sup>[8-10]</sup>、腔光学<sup>[11-12]</sup>和PT对称系统<sup>[13]</sup>等物理系统。通常,按照其激发背景的不同可分为零背景上的呼吸子和平面波背景上的呼吸子。其中,零背景上的呼吸子本质是“多孤子束缚态”<sup>[14-15]</sup>。最近,WU Xiuqi等在超快光纤激光器中对其产生及应用进行了相关报道<sup>[16]</sup>。另一方面,平面波背景上的呼吸子具有丰富的动力学特性和物理意义。与之前广泛报道的“孤子”不同,表现出与平面波背景之间稳定的周期性能量交换。特别的是,因平面波背景上的呼吸子与非线性系统中普遍存在的调制不稳定性紧密相关,所以研究呼吸子对于理解各种非线性相干现象中起着至关重要的作用。其中,Akhmediev呼吸子可以用来描述著名的Fermi-Pasta-Ulam循环和高阶调制不稳定性,表现出周期性复现和脉冲劈裂等具有双重周期特性的动力学过程<sup>[17-20]</sup>。另外,对呼吸子的研究有助于理解非线性系统中超连续光谱的产生、湍流等现象<sup>[1,5-6,21]</sup>。特别地,呼吸子的相互作用被证明可以用来实现高功率脉冲制备<sup>[22]</sup>以及揭示调制不稳定性非线性阶段演化特性<sup>[23]</sup>。

呼吸子动力学的研究已成为非线性物理学科中的一个重要课题。在1+1维非线性系统中已经得到的呼吸子按其动力学特性及产生机制主要分为Kuznetsov-Ma呼吸子<sup>[24-25]</sup>,Akhmediev呼吸子<sup>[26]</sup>和Tajiri-Watanabe呼吸子<sup>[27-28]</sup>,以及相应的非线性叠加态<sup>[29]</sup>。一般地,对呼吸子动力学的研究主要是基于可积的非线性薛定谔方程展开的。简单来说,通过可积系统中的精确求解理论得到不同种类呼吸子的存在及激发条件,利用相应条件的简单初态进行演化,从而得到对应的呼吸子结构。另外,还可以通过分析呼吸子的激发机制掌握不同呼吸子的激发条件,探究呼吸子的动力学性质与实验实现。事实上,考虑实际物理系统中如自频移、自陡峭、增益和损耗等效应的存在对非线性系统中呼吸子的影响也是非常重要的<sup>[20,30-32]</sup>。目前,对呼吸子的理

基金项目:国家自然科学基金(Nos. 12275213, 12175178, 11705145)

第一作者:杨战营(1973—),男,教授,博士,主要研究方向为非线性理论物理。Email: zyyang@nwu.edu.cn.

通讯作者:吴玉涵(1996—),女,博士研究生,主要研究方向为非线性理论物理。Email: yhwu221@163.com.

收稿日期:2022-06-27;录用日期:2022-09-20

<http://www.photon.ac.cn>

论和实验研究结果主要从以下方面展开讨论:1)不同非线性物理系统中呼吸子的存在条件;2)精确求解呼吸子的理论方法;3)呼吸子的结构及性质;4)呼吸子的激发机制及产生条件;5)不同呼吸子的演化特性;6)呼吸子之间的相互作用特性;7)呼吸子在超连续谱的产生、高功率脉冲制备等方面的应用。

对目前的非线性物理系统而言,非线性光纤是实验科学上发展成熟的非线性实验平台。因此,本文主要基于非线性光学系统对平面波背景上的几种典型呼吸子的相关理论和实验研究进展进行简要论述。首先列举了Kuznetsov-Ma呼吸子, Akhmediev呼吸子和 Peregrine 怪波的解析表达式,展示了时域和频域空间中的动力学演化,讨论了呼吸子的历史发展与实际物理意义。然后利用非线性系统中普遍存在的调制不稳定特性讨论了基本呼吸子的激发机制与产生条件,并结合有效能量给出了不同呼吸子之间的定量转换关系。最后报道了在光学系统中基本呼吸子的相互作用。相关理论和实验研究表明,两列呼吸子发生碰撞能够产生高振幅相互作用、准湮灭相互作用和幽灵相互作用。这些结果将在很大程度上促进对多种呼吸子的理论探索和实验观测,进一步提高呼吸子对实际物理应用方面的可能性。

## 1 基本呼吸子动力学特性

一般地,光脉冲在光纤中传输时需要考虑非线性光学效应和群速度色散的影响。常见的脉冲在非线性光学系统中传输的动力学过程服从非线性薛定谔(Nonlinear Schrödinger, NLS)模型,其无量纲形式表示为

$$i\psi_z + \frac{1}{2}\psi_{tt} + |\psi|^2\psi = 0 \quad (1)$$

式(1)描述了在忽略光损耗时,皮秒脉冲在单模光纤中的传播。其中参数 $z$ 和 $t$ 分别表示归一化的距离和时间, $|\psi|^2$ 表示光强,第二项 $\psi_{tt}$ 对应群速度色散,第三项 $|\psi|^2\psi$ 为光克尔(Kerr)非线性项。式(1)被证明是可积的,通过达布变换方法能够精确求解 NLS 方程,并利用非线性叠加原理得到该方程的高阶非线性波解<sup>[33]</sup>。相应的 Lax pair 可表示为

$$\begin{cases} \Phi_t = U\Phi \\ \Phi_z = V\Phi \end{cases} \quad (2)$$

式中, $\Phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ , 矩阵 $U$ 和 $V$ 为

$$U = \lambda \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ -\psi^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \lambda^2 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ -\psi^* & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i|\psi|^2 & i\psi_t \\ i\psi_t^* & -i|\psi|^2 \end{pmatrix}$$

其中谱参量 $\lambda$ 是复常数。式(2)将非线性方程的求解问题直接转化为线性方程组求解本征值问题。由可积条件(零曲率方程) $U_z - V_t + [U, V] = 0$ 可以直接导出 NLS 方程式(1)。由此, NLS 方程解的形式为

$$\psi(z, t) = \psi_0(z, t) - \frac{2i(\lambda - \lambda^*)\phi_1(z, t)\phi_2^*(z, t)}{|\phi_1(z, t)|^2 + |\phi_2(z, t)|^2} \quad (3)$$

式中, $\phi_1(z, t)$ ,  $\phi_2(z, t)$ 为相应的式(2)在 $\psi(z, t) = \psi_0(z, t)$ 时的解。为了研究平面波背景上的呼吸子,取如下 $\psi_0(z, t)$ 为初始平面波背景解

$$\begin{cases} \psi_0(t, z) = ae^{i\theta(t, z)} \\ \theta(t, z) = \omega t + kz \end{cases} \quad (4)$$

式中,参数 $a$ 和 $\omega$ 分别表示平面波背景的振幅和频率, $k = a^2 - \omega^2/2$ 是平面波的波数。根据式(3),得到平面波背景上基本(一阶)呼吸子的解析表达式为

$$\psi = ae^{i\theta} + \frac{4a\alpha_1 \cosh\beta_0 - 4ia\sigma \sinh\beta_0 - (4a^2 + \sigma^2 + \alpha_1^2) \cos\gamma_0 - i(4a^2 - \sigma^2 - \alpha_1^2) \sin\gamma_0}{4a^2\alpha_1 \cos\gamma_0 - (4a^2 + \sigma^2 + \alpha_1^2) \cosh\beta_0} 2be^{i\theta} \quad (5)$$

式中, $\beta_0 = \zeta t - V_g z$ ,  $\gamma_0 = \sigma t - V_p z$ ,  $V_g = \omega\zeta - b\sigma$ ,  $V_p = \omega\sigma + b\zeta$ ,  $\zeta = (\sqrt{\chi^2 + \chi})^{1/2}/\sqrt{2}$ ,  $\sigma = \pm(\sqrt{\chi^2 - \chi})^{1/2}/\sqrt{2}$ ,  $\chi = 4b^2 - 4a^2$ ,  $\alpha_1 = 2b + \zeta_0$ 。

显然,当背景振幅 $a = 0$ 时,平面波解式(2)退化为平庸解 $\psi_0 = 0$ ,此时式(5)约化得到标准的亮孤子解。这里的参数 $b$ 与呼吸子的初始包络形状有关, $\beta_0$ ,  $\gamma_0$ 是关于变量 $t$ 和 $z$ 的实函数, $V_g$ ,  $V_p$ 与呼吸子包络的群速

度和相速度有关。上述基本呼吸子解式(5)是双曲函数  $\cosh \beta_0$ ,  $\sinh \beta_0$  与三角函数  $\cos \gamma_0$ ,  $\sin \gamma_0$  的组合形式。通常三角函数控制呼吸子解的周期性,双曲函数控制其局域性。分析式(5)的局域性与周期性就可以判断在不同参数条件下对应不同的呼吸子动力学演化特性。例如,当  $\zeta = 0$ , 且  $\sigma \neq 0$  时,呼吸子解仅在分布  $t$  方向具有周期特性,此时式(5)被称为 Akhmediev 呼吸子解,如图 1(b)。

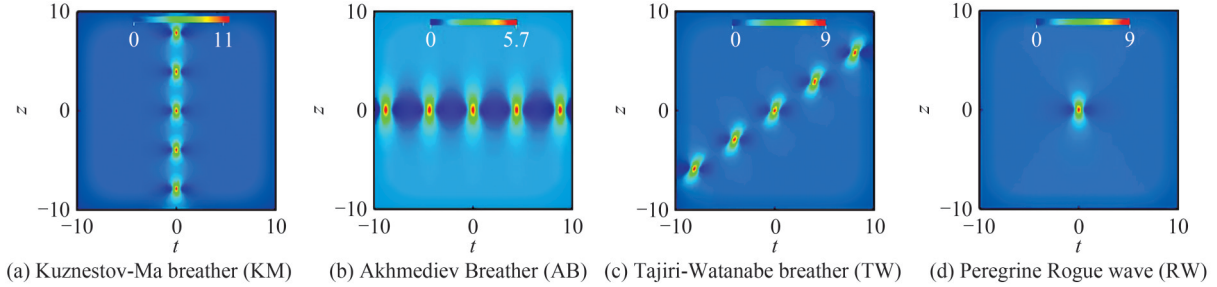


图1 基本呼吸子动力学分布  
Fig.1 Dynamics distributions of fundamental breathers

由于该类解中存在自由参数,使得在非线性光学系统中有利于对呼吸子动力学进行调控,从而得到具有物理意义的呼吸子结构。常见的平面波背景上呼吸子如图 1,按其性质的不同主要分为 Kuznetsov-Ma 呼吸子<sup>[24-25]</sup>、Akhmediev 呼吸子<sup>[26]</sup>、Tajiri-Watanabe 呼吸子<sup>[27-28]</sup>。另外,上述典型的平面波背景上局域波并不是孤立存在的。当呼吸子的周期增至无穷大时,它们都将退化为双重局域的 Peregrine 怪波<sup>[34]</sup>结构。

### 1.1 Kuznetsov-Ma 呼吸子

从历史来看,平面波背景上呼吸子的研究可追溯至 20 世纪 70 年代末,由 KUZNETSOV E A 和 MA Y C 在研究标准 NLS 方程的非线性激发时,推导出具有横向分布局域纵向传输周期特性的局域波解<sup>[24-25]</sup>。该类解的特征与众所周知的稳定传输“孤子”截然不同,表现出与平面波背景之间稳定的周期性能量交换过程,相应的峰值高度以指数放大又以指数衰减,故被称为“Kuznetsov-Ma 呼吸子”,如图 1(a)所示。另外,当背景振幅  $a$  为零时 Kuznetsov-Ma 呼吸子退化为标准亮孤子。由此,Kuznetsov-Ma 呼吸子又被称为 Kuznetsov-Ma 孤子。

基于标准 NLS 框架,对于基本呼吸子解式(5)来说,在满足  $|b| > a$  的条件下,可以得到  $\sigma = 0$ ,  $\zeta = 2\sqrt{b^2 - a^2}$ ,  $\beta_0 = \zeta t - \omega \zeta z$ ,  $\gamma_0 = -b \zeta z$ 。此时式(5)对应于 Kuznetsov-Ma 呼吸子,其解析表达式为

$$\psi_{km} = a e^{i\theta} - 2 \frac{(b^2 - a^2) \cos(2b\sqrt{b^2 - a^2}z) + 2ib\sqrt{b^2 - a^2} \sin(2b\sqrt{b^2 - a^2}z)}{b \cosh[2\sqrt{b^2 - a^2}(t - \omega z)] - a \cos(2b\sqrt{b^2 - a^2}z)} e^{i\theta} \quad (6)$$

显然,该呼吸子表现出在分布方向  $t$  有局域性而没有周期性,在演化方向  $z$  有周期性的动力学特征,如图 2 所示,精确解式(6)取参数  $a=1$ ,  $b=1.4$ ,  $\omega=0$ 。根据式(6)可读取 Kuznetsov-Ma 呼吸子的包络速度  $V_{km} = \omega$  及振荡周期  $T = \pi / (b\sqrt{b^2 - a^2})$ 。当  $b=0$  时,该解退化为平面波解。另一方面,对其时域分布动力学过程做关于  $t$  的傅里叶变换,可将 Kuznetsov-Ma 呼吸子从时域分布转为频域空间,相应的频谱演化如图 2(b)。在 Kuznetsov-Ma 呼吸子的最大压缩位置处呈现局域展宽的频谱分布,尽管这种分布在演化方向上是周期

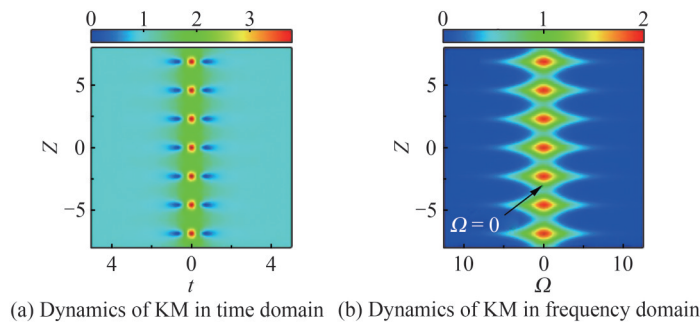


图2 Kuznetsov-Ma 呼吸子在时域和频域空间的幅度演化  
Fig.2 Amplitude distributions of Kuznetsov-Ma breather in time and frequency domain

性变化的,它的主频率始终维持在0处,且不随参数取值变化的影响。

Kuznetsov-Ma呼吸子于2012年在光纤中被报道<sup>[4]</sup>,通过时域和频域中的动力学特性展示了强调制连续波的周期性演化,与理论和数值结果具有很好地一致性,并为光学系统中实验研究非线性波动动力学提供基本指导。近年来,研究人员在非线性光学系统中对Kuznetsov-Ma呼吸子具有的空间局域特性进行了广泛研究。XIONG Hao等提出利用Kuznetsov-Ma呼吸子来描述光场与机械振子之间的相互作用,从而在腔光力学系统中表现出丰富的非线性特性和量子效应<sup>[12]</sup>。ZHAO Lichen等对平面波背景上由局域扰动引起呼吸子的机制进行了分析,表明Kuznetsov-Ma呼吸子是由调制不稳定特性和亮孤子与平面波背景间的干涉效应共同决定<sup>[35]</sup>。另外,LIU Chong等最近研究了矢量NLS系统下非简并Kuznetsov-Ma呼吸子动力学演化以及频谱的解析描述,讨论了其与矢量亮孤子之间的区别与联系,并给出了在数值上简单的激发方法<sup>[36]</sup>。

## 1.2 Akhmediev呼吸子

1986年,AKHMEDIEV N等通过推导标量NLS方程得到了一组精确的周期解,该解严格描述了平面波上弱谐波调制激发的振幅增长和衰减的单个循环过程,被称为著名的Akhmediev呼吸子<sup>[26]</sup>。与求解Kuznetsov-Ma呼吸子解析解的过程相似,基于基本呼吸子解式(5),当 $|b| < a$ 可得 $\zeta = 0, \sigma = \pm 2\sqrt{a^2 - b^2}, \beta_0 = b\sigma z, \gamma_0 = \sigma t - \omega\sigma z$ 。由此,相应的Akhmediev呼吸子解析表达式为

$$\psi_{ab}(t, z) = ae^{i\theta} - 2 \frac{(a^2 - b^2) \cosh(b\sigma z) + ib \sinh(b\sigma z)}{a \cosh(b\sigma z) - b \cos[\sigma(t - \omega z)]} e^{i\theta} \quad (7)$$

该Akhmediev呼吸子解表现出了在演化 $z$ 方向局域且在分布 $t$ 方向周期排列的特性,如图3所示,精确解式(7)取参数 $a=1, b=0.5, \omega=0$ 。此时波包整体的群速度为无穷大,而重复排列的每个基本单元的相速度 $V_{ab} = \omega$ 。另外,重复排列单元在 $t$ 方向的频率由 $\sigma$ 决定,因此分布周期为 $T = 2\pi/\sigma = \pi/\sqrt{a^2 - b^2}$ 。Akhmediev呼吸子解式(7)在频域空间的演化如图3(b)所示,它存在着周期性排列的边带成分,且表现为频谱能量从中心向两侧逐级递减,随后被逆转的过程。这一原理本质上是著名的Fermi-pasta-Ulam循环<sup>[17,37]</sup>,呈现出了复杂的中心泵浦与其他各边带谱模式之间能量的交换过程。

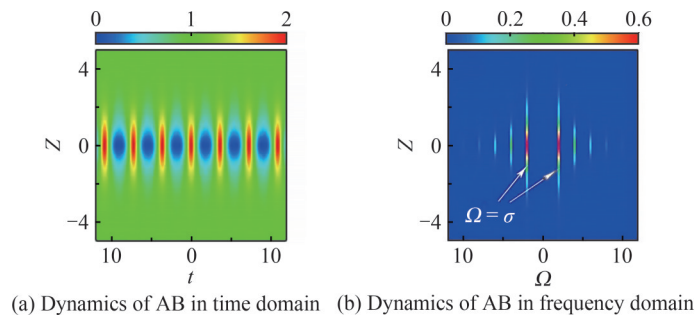


图3 Akhmediev呼吸子在时域和频域空间的幅度演化

Fig.3 Amplitude distributions of Akhmediev breather in time and frequency domain

2009年,DUDLEY J M和HAMMANI K等利用周期调制的连续波在单模光纤中实现了对Akhmediev呼吸子的特征观测并揭示了其增长、衰减的频谱演化规律<sup>[1,5,38]</sup>。FATOME J等在单模光纤的反常色散区基于周期性分布的Akhmediev呼吸子动力学设计了具有高质量和高重复率的脉冲序列激发器<sup>[39]</sup>。近年来,大量的研究表明Akhmediev呼吸子能够精确地描述诸多重要的非线性物理现象,如调制不稳定性、Fermi-Pasta-Ulam循环、超连续光谱产生等。其中,高阶调制不稳定性诱发的多重增长-衰减动力学过程可以由Akhmediev呼吸子解析解精确地描述<sup>[18-19]</sup>,相应的时域结构表现出常规/周期复现、倍频/劈裂等具有双重周期特性的过程。另外,具有双重局域特性的Peregrine怪波可以在Akhmediev呼吸子周期趋于无穷大时获得。同时,Akhmediev呼吸子的相互作用在光纤中被证实能够用来激发高阶怪波<sup>[2,22]</sup>。

## 1.3 Peregrine怪波

怪波现象已被证实为一种由非线性效应引起的极端自然现象,最早发现于海洋并在航海历史上造成众多毁灭性的海难。其主要表现出具有超高振幅能量以及无法预期性和不可控性的特征。事实上,早在



1983年,PEREGRINE D H教授理论预言了一类时空双重局域的“单振幅波”<sup>[34]</sup>,其结构如图1(d)。这个特殊的结构就是近期被人们广泛接受的描述“怪波现象”的最基本原型——Peregrine怪波。该解以其特有的有理分式著名,描述了基于调制不稳定性的单峰弱信号被指数放大的不稳定过程。

基本呼吸子解式(5)取 $|b|=a$ 时,得到 $\sigma=0, \zeta=0$ 。即,通过对式(5)取极限 $|b|\rightarrow a$ ,可得解析的Peregrine怪波解为

$$\phi_{rw}(t, z) = ae^{i\theta} - \frac{4(2ia^2z + 1)}{4a^4z^2 + 4a^2(t - \omega z)^2 + 1} ae^{i\theta} \quad (8)$$

显然,该解描述的是在分布 $t$ 方向和演化 $z$ 方向具有双重局域的结构,其速度 $V_{rw} = \omega$ ,如图4所示,精确解式(8)取参数 $a=1, \omega=0$ 。图4(b)展示了怪波在频域空间的演化。另外,当 $|b|=a$ 时,上述解析的Kuznetsov-Ma呼吸子式(6)和Akhmediev呼吸子式(7)都可以约化为Peregrine怪波解式(8)。

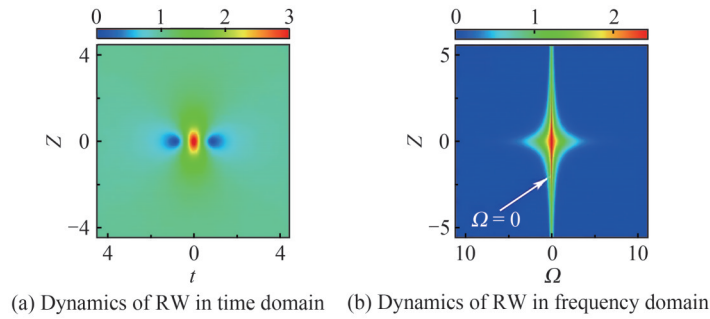


图4 Peregrine 怪波在时域和频域空间的幅度演化图

Fig.4 Amplitude distributions of Peregrine rogue wave in time and frequency domain

2007年,SOLLID R等<sup>[2]</sup>率先在非线性光纤中实现了对怪波实验观测,开启了“光怪波物理”这一全新的非线性科学研究方向。该实验报道了怪波高峰值和不可预期的基本特征,并提出怪波的最大幅值和峰值概率密度函数能够作为探究怪波特性的标准之一。自此展开了不同非线性系统中对具有双重局域特性怪波的相关实验验证,并进一步地深入探究相应的物理机制。特别地,SOLLID R等和DUDLEY J M等基于受激超连续光谱产生对光怪波现象进行了有效控制<sup>[21,40]</sup>。ERKINTALO M等研究了由飞秒超连续光谱激发的光怪波特征<sup>[41]</sup>。另外,LECAPLAIN C等报道了光纤环形激光器中观测光怪波现象的实验条件<sup>[42]</sup>。直到2016年,FRISQUET B等通过在随机双折射的通信光纤中注入两个正交偏振态,实验观察到了光学暗怪波结构,为多分量耦合光纤系统的研究开辟了新的方向<sup>[43]</sup>。

## 2 呼吸子激发机制

事实上,上述典型的基本呼吸子主要由非线性系统中广泛存在的调制不稳定性(Modulation Instability, 简称MI)所引起。调制不稳定性存在于各种保守和耗散的物理系统,是非线性系统的基本属性。2014年,DUDLEY J M等<sup>[1]</sup>在标准的NLS系统中,利用连续波背景叠加宽频噪声触发的混沌场数值研究了随机初态的演化动力学过程,如图5。相应的结果表明,Kuznetsov-Ma呼吸子(KM)、Akhmediev呼吸子(AB)、Peregrine怪波(PS)的动力学可以通过随机噪声诱发的调制不稳定性成功“映射”在混沌场中<sup>[1,44-45]</sup>,从而得到与解析结构完全一致的实验结果。这些结果证明了这一系列的解析解代表着一类普遍存在的具有重要物理意义的非线性激发单元。

重要的是,线性稳定性分析作为一种定量分析调制不稳定性动力学的有效手段,对非线性系统中呼吸子激发的研究具有推动作用。因此,我们能够利用线性稳定性分析探究平面波背景上由调制不稳定性诱发呼吸子的可控激发条件<sup>[46]</sup>。上述几种典型的呼吸子解式(5)~(8)可写为

$$\phi(t, z) = [1 + \phi_p(t, z)] \phi_0 \quad (9)$$

表示平面波 $\phi_0$ 与扰动动力学 $\phi_p$ 的线性叠加。一般地, $\phi_p$ 取小振幅的周期扰动形式,即

$$\phi_p(t, z) = f_+ e^{i(Kz + \Omega t)} + f_- e^{-i(Kz + \Omega t)} \quad (10)$$

式中,参数 $K$ 和 $\Omega$ 分别表示扰动的波数和频率, $f_+, f_- (f \ll a)$ 表示傅里叶模式的小振幅。将式(9)代入NLS

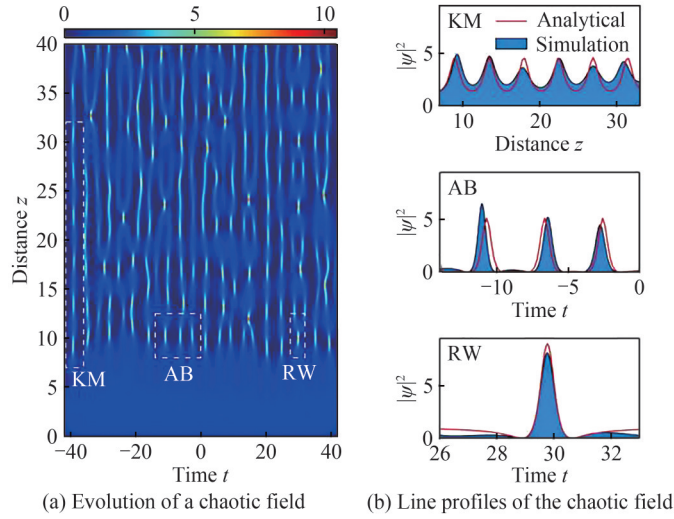


图5 宽频噪声背景上的随机扰动激发<sup>[1]</sup>

Fig.5 Random perturbation excitation on a broadband noise background<sup>[1]</sup>

模型式(1),得到扰动波数与频率之间满足的色散关系为: $K = -\omega\Omega \pm |\Omega|\sqrt{\Omega^2 - 4a^2}$ 。显然,我们发现在 $|\Omega| \geq 2a$ 范围内的平面波在扰动下是稳定的,满足调制稳定性。而平面波在扰动频率 $-2a < \Omega < 2a$ 时是不稳定的,即调制不稳定性。事实上,波数 $K$ 的虚部决定了扰动增长的快慢,故调制不稳定性增长率定义为

$$G = |\text{Im}(K)| = |\Omega|\sqrt{4a^2 - \Omega^2} \quad (11)$$

图6(a)、(b)分别给出了调制不稳定性增益 $G$ 在背景频率 $\omega$ 和扰动频率 $\Omega$ 参数平面的分布以及在背景振幅 $a$ 和扰动频率 $\Omega$ 参数平面的分布。同时,呼吸子的精确解在参数空间中的对应如图6(c)和(d)所示。通过图6(a)、(b)和(c)、(d)之间的对比可以看出,Kuznetsov-Ma呼吸子和 Peregrine怪波激发在调制不稳定增益分布平面的共振线 $\Omega = 0, a \neq 0$ 区域,Akhmediev呼吸子位于共振线两侧的调制不稳定区,而亮孤子则位于零背景 $a = 0$ 处。调制不稳定性与上述几种著名的非线性波之间的定量关系可以参考文献[47]。

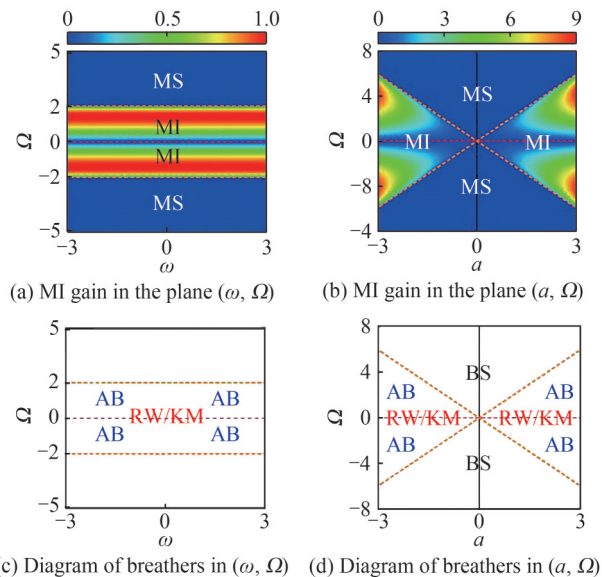


图6 NLS系统的调制不稳定增益分布和基本呼吸子激发的相图

Fig.6 MI distributions and phase diagrams of fundamental breathers in NLS system

Kuznetsov-Ma呼吸子是由局域扰动引起的具有周期演化特性的非线性波,对应于扰动频率 $\Omega = 0$ 的调制不稳定增益分布共振线上。2018年,ZHAO Lichen等对Kuznetsov-Ma呼吸子的产生机制进行了系统地讨论<sup>[35]</sup>,表明由弱扰动激发的Kuznetsov-Ma呼吸子由调制不稳定性起主导作用;在受强扰动激发时,亮孤

子与平面波背景间的干涉效应对 Kuznetsov-Ma呼吸子机制起主导作用。事实上,Kuznetsov-Ma呼吸子由于与恒定背景发生相干相互作用而产生周期性振荡。当背景振幅减小时振荡周期增加,当背景振幅等于零时,Kuznetsov-Ma呼吸子则转化为普通亮孤子。

Akhmediev呼吸子的激发可以通过平面波背景上的弱周期扰动经历非线性演化得到,其分布周期等于初始扰动信号的周期,该结果已在光纤实验中得到证实<sup>[5]</sup>。特别是,不同扰动频率对应不同调制不稳定性增长率,由此激发出不同的 Akhmediev呼吸子<sup>[5,48]</sup>。另外,最近的理论和实验研究表明,由周期弱扰动激发的 Akhmediev呼吸子能够用来描述非线性系统中复杂的高阶调制不稳定性<sup>[18]</sup>。特别地,LIU Chong等在具有对称性破缺特性(由自陡峭效应引起)的 NLS 系统中利用 Akhmediev呼吸子精确的频谱演化过程揭示了非对称的 Fermi-pasta-Ulam 循环<sup>[20]</sup>,为进一步实验探究提供了理论支撑。

进一步地,研究发现当 Akhmediev呼吸子的调制频率趋于零、周期趋于无穷大时,其结构会趋于双重局域的 Peregrine 怪波。事实上,在单模光纤中光怪波实验激发主要是利用平面波加一个调制频率极小的单峰小振幅扰动光场作为初态输入光纤中,传输一定距离后得到时域和频域上的 Peregrine 怪波<sup>[2]</sup>。另外,ZHAO Lichen 等和 BARONIO F 等研究证明了在标量和矢量 NLS 系统下,怪波现象的出现源于非线性系统中广泛存在的调制不稳定性,并且怪波的激发位于调制不稳定性区域扰动频率  $\Omega$  趋于零的位置<sup>[47,49-51]</sup>。由此,GAO Peng 等<sup>[52]</sup>实现了高阶怪波的数值激发,表明脉冲的最大功率可达到初始连续波功率的 63.8 倍,为高强度脉冲的获取提供了理论指导。

另一方面,为了进一步理解调制不稳定性呼吸子的激发特征,引入有效能量  $\epsilon$ ,其表达式为

$$\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi|^2 - |\psi_0|^2) dt \quad (12)$$

该有效能量反映的是平面波背景加入扰动后的能量相比于未加扰动时平面波背景多出的能量部分。当  $\epsilon = 0$  表明扰动并不带来额外能量,此时扰动演化过程中的能量完全由平面波背景转化而来,通常在保守系统下怪波的能量为零;当有效能量  $\epsilon > 0$  说明加上扰动后有额外能量输入; $\epsilon < 0$  意味着扰动从背景提取了部分能量,如平面波背景上的暗孤子。

结合基本呼吸子的解析表达式及相应的调制不稳定性激发相图,表明呼吸子和怪波在扰动频率不同的特定条件下可以相互转换。图 7 展示了随着扰动频率和扰动能量的变化,不同的呼吸子和怪波之间的转换。这些转换关系清晰地展示了不同基本呼吸子之间的区别与联系。特别地,这种转换关系具有普适性,不依赖于具体物理系统<sup>[46]</sup>。

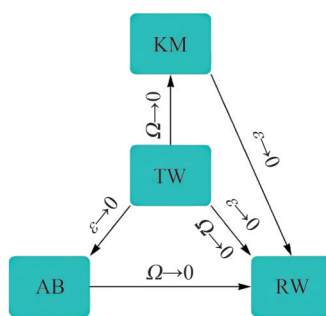


图 7 呼吸子与怪波之间的转换关系<sup>[46]</sup>

Fig.7 Conversion relationship between breathers and Peregrine rogue waves

### 3 呼吸子相互作用

近年来,除了对平面波背景上基本(一阶)呼吸子相关特性及应用的研究之外,它们之间的非线性相互作用也引起了人们的广泛关注。光学系统中呼吸子的实验研究最近也已经从基本呼吸子转向了多个呼吸子的碰撞。因其具有许多意想不到的新性质与新结构,极大地拓宽了呼吸子非线性物理中的应用。一方面,对于具有相同速度和相位的多呼吸子同向传播时,可以形成束缚态呼吸子分子<sup>[53]</sup>。另一方面,对于速度不相同且反向传播的多呼吸子而言,初始相对相位对于呼吸子在碰撞过程形成不同非线性局域结构起到至

关重要的作用,包括形成高振幅结构、准湮灭结构和幽灵结构<sup>[22,54-55]</sup>。具体来说,固定两列波碰撞的中心点位于原点( $t=0, z=0$ ),通过不断改变呼吸子的初始相对相位 $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2, \theta_{1,2} \in [0, 2\pi]$ 来判断其对生成的相互作用波形和振幅在原点处的影响。实质上,呼吸子碰撞的动力学是高阶调制不稳定性的表现<sup>[18]</sup>,也就是说,在调制不稳定频宽范围内多重不稳定模的同时激发导致了局域波的非线性叠加。这些相互作用普遍存在于各个非线性系统,相应的结构在非线性光纤及水波等实验平台被广泛证实<sup>[22,53-55]</sup>。本节简述两列呼吸子在相位满足特定条件、速度不相同的情况下发生碰撞,从而形成三种不同局域结构的动力学过程。

### 3.1 高振幅相互作用

2009年,AKHMEDIEV N等<sup>[56]</sup>率先精确推导出一系列局域波的非线性叠加态,发现两列Akhmediev呼吸子在碰撞的中心位置处可以形成一个振幅更大的波峰,并且该波峰的解析表达式是一类与高阶怪波相似的更高次有理分式,如图8(a)中精确的二阶呼吸子时空结构所示。研究发现,当两列Akhmediev呼吸子具有相反的速度和相同的相位时,总是在时空平面发生碰撞并产生高振幅波的结构,该结构表现出与二阶怪波精确解较好的一致性。因此这种碰撞被认为是产生二阶怪波的理论方法。随后2013年,FRISQUET B等<sup>[22]</sup>报道了利用光谱整形的光频梳同时激发形成两个Akhmediev呼吸子,并使其在传播过程中发生碰撞,从而证实了形成高振幅怪波的结论。具体来说,通过控制呼吸子之间的相位差和速度差,找到其特定的初始条件,从而确定地导致它们的有效碰撞并形成高振幅波的过程。如图8(b)所示,实验选取的两列Akhmediev呼吸子在相对相位满足 $\Delta\theta = 0$ 时,碰撞点处形成一个具有极高振幅峰值的局域结构,实验结果与数值模拟和解析结果相比均具有较好的一致性。研究结果表明,多个呼吸子的高振幅相互作用过程是非常有趣的,因为它们提供了在空间和时间中更高能量集中的可能性,并且表现出巨大振幅波的产生。

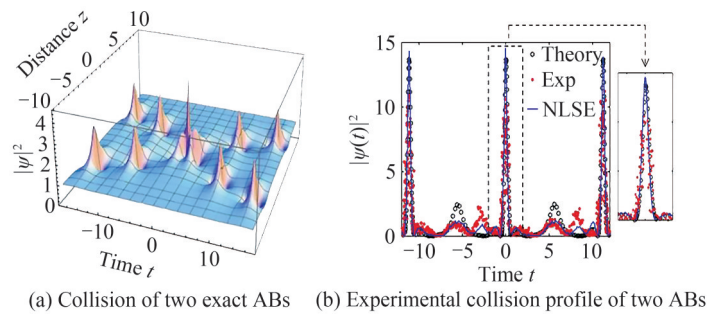


图8 两列呼吸子碰撞相互作用的动力学<sup>[22,56]</sup>  
Fig.8 Dynamics of collision interactions between two ABs<sup>[22,56]</sup>

### 3.2 准湮灭相互作用

与上述碰撞中心形成高振幅波的动力学过程相似,这里描述了另一类特殊的呼吸子相互作用结构。这种呼吸子的相互作用往往在其发生碰撞的中心位置处形成小振幅的局域结构,如图9(a)。这种呼吸子被称为

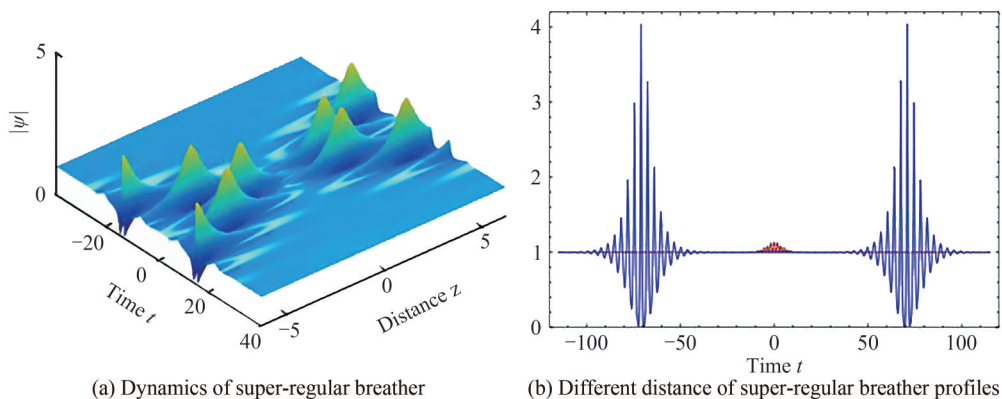


图9 两列呼吸子准湮灭相互作用的动力学<sup>[23,54]</sup>  
Fig.9 Dynamics of quasi-annihilation interactions between two breathers<sup>[23,54]</sup>



“Super-regular呼吸子”,是由ZAKHAROV V E和GELASH A A提出并用来描述从平面波的局域单扰动演化而来的调制不稳定特性<sup>[23]</sup>。这种Super-regular呼吸子是由两列“准Akhmediev呼吸子”相互作用形成,并且两列呼吸子满足的初始相位关系为 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ ,使得在碰撞中心形成准湮灭(不完全湮灭,即表现出小扰动形式)的局域结构。如图9所示,两列呼吸子几乎由于碰撞而湮灭(准湮灭)至一个小的局域扰动。反之该过程也是一个重要情景,即初始小振幅局域扰动从 $z=0$ 处(图9(b)中红色虚线)发展成两个反向传播(图9(b)中蓝色实线)的呼吸子动力学过程。研究表明Super-regular呼吸子描述的准湮灭物理性质是其他经典局域波所不具备的。这类准湮灭相互作用揭示了一类新颖的小振幅扰动调制不稳定性的非线性阶段。

2013年Super-regular呼吸子理论的提出激发了科学界对于调制不稳定非线性阶段性质研究的极大兴趣<sup>[23]</sup>。2015年,在光纤和水箱中观察到了这类描述调制不稳定产生和湮灭动力学过程的Super-regular呼吸子结构<sup>[54]</sup>。近年来,对于由标准NLS方程描述的一类保守系统中Super-regular呼吸子动力学的研究十分广泛<sup>[23,57]</sup>。同时,对于考虑光纤中耗散效应存在的Super-regular呼吸子特性也得到相应的研究,为精确研究可积湍流和非线性调制不稳定提供了依据<sup>[58]</sup>。另一方面,在超越标准非线性薛定谔模型描述的实际复杂物理系统中,对Super-regular呼吸子的探究也取得了相应的研究进展<sup>[31-32,59]</sup>,包括考虑高阶效应存在的标量系统和矢量耦合系统中Super-regular呼吸子特性的研究。

### 3.3 幽灵相互作用

与上述两种碰撞中心形成局域结构不同,在碰撞点处既不发生放大,也不发生湮灭。2020年XU Gang等人<sup>[55]</sup>在单模光纤中报道了这种新型呼吸子相互作用,即两列相同的呼吸子以相反的速度进行传播的动力学过程。具体来说,当两列呼吸子满足初始相位条件 $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ 时,在碰撞点处没有形成如上所述的两种局域波结构,而是表现出由碰撞产生的包络振幅几乎等于单个基本呼吸子的包络最大值,被称为呼吸子的幽灵相互作用(ghost interaction),如图10(a)呼吸子的解析结果和图10(b)的实验结果。

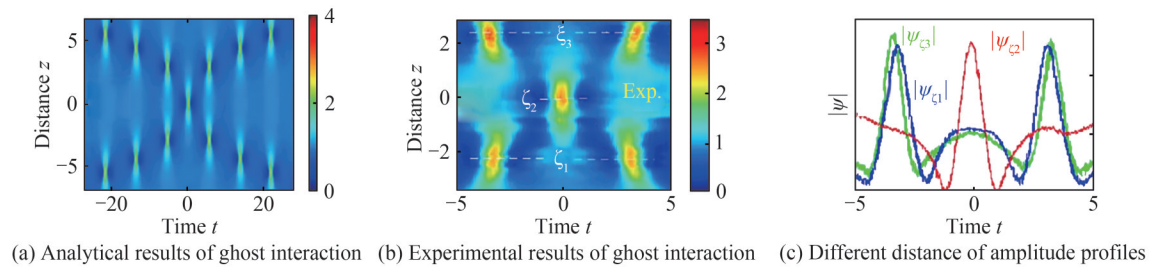


图10 两列呼吸子幽灵相互作用的动力学<sup>[55]</sup>

Fig.10 Dynamics of ghost interactions between two breathers<sup>[55]</sup>

这表明具有特定相位条件的两列呼吸子在碰撞点附近发生非线性相互作用时,其中一个呼吸子几乎隐藏在背景中,然后在碰撞后根据能量守恒定律再次出现。在整个演化过程中,呼吸子的相互作用过程保持了空间和时间的对称性。值得一提的是,由于缺乏脉冲与平面波背景的能量交换,这种新奇的“幽灵”相互作用在传统的孤子与孤子碰撞场景中不会发生。

## 4 总结与展望

本文简述了非线性光学系统中的呼吸子相关研究进展。详细列举了Kuznetsov-Ma呼吸子、Akhmediev呼吸子和Peregrine怪波在时域和频域空间中的动力学特性及解析表达式,讨论了呼吸子的历史发展与实际物理意义。利用非线性系统中普遍存在的调制不稳定特性讨论了基本呼吸子的激发机制与产生条件,表明调制频率为零的局域扰动和调制频率不为零的周期扰动可以分别激发出Kuznetsov-Ma呼吸子和Akhmediev呼吸子。通过分析有效能量和调制不稳定性,讨论了不同呼吸子之间的定量转换关系。此外,呼吸子之间的相互作用过程及动力学特性也在光学系统中被报道,包括高振幅相互作用、准湮灭相互作用和幽灵相互作用。了解基本呼吸子及其相互作用的实际物理意义,有望对非线性系统中怪波事件的产生、可积湍流、调制不稳定性,Fermi-pasta-Ulam循环等现象的研究发挥重要作用。

事实上,不同的呼吸子在很多领域具有重要的应用价值,如超连续谱的产生、光频梳的产生、高功率脉

冲制备等。本文简要列举了呼吸子及其相互作用在理论和实验方面的部分研究现状,后续的研究应针对不同非线性系统讨论基本呼吸子的动力学特性及实际物理意义。例如,在对称性破缺(由自陡峭效应引起)的非线性薛定谔系统中,Akhmediev呼吸子精确的频谱表达式能够严格描述该系统的非对称 Fermi-pasta-Ulam 循环过程。另一方面,现有的理论和实验研究结果表明,在非线性光学等快速发展的物理领域中,对于呼吸子的理论和实验研究仍有很大的空间。目前已知的非线性光学系统中对呼吸子的研究主要在标量系统中进行,而对于考虑多模光纤中的呼吸子及其相互作用的实验探究及应用还有待进一步讨论。此外,现有的呼吸子动力学演化大部分集中于1+1维物理系统,推广至高维的非线性系统并对其呼吸子动力学研究具有重要意义。进一步的实验与理论分析有助于加深对于非线性物理系统中呼吸子特性的理解,从而有助于对其可控激发并探索实际的物理意义和应用价值。

#### 参考文献

- [1] DUDLEY J M, DIAS F, ERKINTALO M, et al. Instabilities, breathers and rogue waves in optics[J]. *Nature Photonics*, 2014, 8(10): 755-764.
- [2] SOLLI D R, ROPERS C, KOONATH P, et al. Optical rogue waves[J]. *Nature*, 2007, 450(7172): 1054-1057.
- [3] KIBLER B, FATOME J, FINOT C, et al. The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics[J]. *Nature Physics*, 2010, 6(10): 790-795.
- [4] KIBLER B, FATOME J, FINOT C, et al. Observation of Kuznetsov-Ma soliton dynamics in optical fibre[J]. *Scientific reports*, 2012, 2(1): 1-5.
- [5] DUDLEY J M, GENTY G, DIAS F, et al. Modulation instability, Akhmediev Breathers and continuous wave supercontinuum generation[J]. *Optics Express*, 2009, 17(24): 21497-21508.
- [6] WALCZAK P, RANDOUX S, SURET P. Optical rogue waves in integrable turbulence[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(14): 143903.
- [7] CHABCHOUB A, HOFFMANN NP, AKHMEDIEV N, Rogue wave observation in a water wave tank[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(20): 204502.
- [8] BURGER S, BONGS K, DETTMER S, et al. Dark solitons in Bose-Einstein condensates[J]. *Physical Review Letters*, 1999, 83(25): 5198.
- [9] STRECKER K E, PARTRIDGE G B, TRUSCOTT A G, et al. Formation and propagation of matter-wave soliton trains [J]. *Nature*, 2002, 417(6885): 150-153.
- [10] KHAYKOVICH L, SCHRECK F, FERRARI G, et al. Formation of a matter-wave bright soliton[J]. *Science*, 2002, 296(5571): 1290-1293.
- [11] GUO Rui, LIU Yuefeng, HAO Huiqin, et al. Coherently coupled solitons, breathers and rogue waves for polarized optical waves in an isotropic medium[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 80(3): 1221-1230.
- [12] XIONG Hao, GAN Jinghui, WU Ying. Kuznetsov-Ma soliton dynamics based on the mechanical effect of light [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119(15): 153901.
- [13] DAI Chaoqing, WANG Yueyue, ZHANG Xiaofei. Controllable Akhmediev breather and Kuznetsov-Ma soliton trains in PT-symmetric coupled waveguides[J]. *Optics Express*, 2014, 22(24): 29862-29867.
- [14] LIU Xueming, YAO Xiankun, CUI Yudong. Real-time observation of the buildup of soliton molecules [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(2): 023905.
- [15] LIU Xueming, POPA D, AKHMEDIEV N. Revealing the transition dynamics from Q switching to mode locking in a soliton laser[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(9): 093901.
- [16] WU Xiuqi, PENG Junsong, BOSCOLO S, et al. Intelligent breathing soliton generation in ultrafast fiber lasers[J]. *Laser & Photonics Reviews*, 2022, 16(2): 2100191.
- [17] SOTO-CRESPO J M, ANKIEWICZ A, DEVINE N, et al. Modulation instability, Cherenkov radiation, and Fermi-Pasta-Ulam recurrence[J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2012, 29(8): 1930-1936.
- [18] ERKINTALO M, HAMMANI K, KIBLER B, et al. Higher-order modulation instability in nonlinear fiber optics[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 107(25): 253901.
- [19] CONFORTI M, MUSSOT A, KUDLINSKI A, et al. Doubly periodic solutions of the focusing nonlinear Schrödinger equation: Recurrence, period doubling, and amplification outside the conventional modulation-instability band [J]. *Physical Review A*, 2020, 101(2): 023843.
- [20] LIU Chong, WU Yuhan, CHEN Shaochun, et al. Exact analytic spectra of asymmetric modulation instability in systems with self-steepening effect[J]. *Physical Review Letters*, 2021, 127(9): 094102.
- [21] SOLLI D R, ROPERS C, JALALI B. Active control of rogue waves for stimulated supercontinuum generation [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 101(23): 233902.
- [22] FRISQUET B, KIBLER B, MILLOT G. Collision of Akhmediev breathers in nonlinear fiber optics[J]. *Physical Review*

- X, 2013, 3(4): 041032.
- [23] ZAKHAROV V E, GELASH A A. Nonlinear stage of modulation instability[J]. Physical Review Letters, 2013, 111(5): 054101.
- [24] KUZNETSOV E A. Solitons in a parametrically unstable plasma[C]. Akademiia Nauk SSSR Doklady. 1977, 236: 575-577.
- [25] MA Y C. The perturbed plan-wave solutions of the cubic Schrödinger equation[J]. Studies in Applied Mathematics, 1979, 60(1): 43-58.
- [26] AKHMEDIEV N N, KORNEEV V I. Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear Schrödinger equation[J]. Theoretical and Mathematical Physics, 1986, 69(2): 1089-1093.
- [27] TAJIRI M, WATANABE Y. Breather solutions to the focusing nonlinear Schrödinger equation[J]. Physical Review E, 1998, 57(3): 3510.
- [28] PRIYA N V, SENTHILVELAN M, LAKSHMANAN M. Akhmediev breathers, Ma solitons, and general breathers from rogue waves: A case study in the Manakov system[J]. Physical Review E, 2013, 88(2): 022918.
- [29] AKHMEDIEV N N, SOTO-CRESPO J M, ANKIEWICZ A. Extreme waves that appear from nowhere: on the nature of rogue waves[J]. Physics Letters A, 2009, 373(25): 2137-2145.
- [30] NAKAZAWA M, SUZUKI K, KUBOTA H, et al. High-order solitons and the modulational instability[J]. Physical Review A, 1989, 39(11): 5768.
- [31] WU Yuhua, LIU Chong, YANG Zhanying, et al. Breather interaction properties induced by self-steepening and space-time correction[J]. Chinese Physics Letters, 2020, 37(4): 040501.
- [32] LIU Chong, AKHMEDIEV N. Super-regular breathers in nonlinear systems with self-steepening effect[J]. Physical Review E, 2019, 100(6): 062201.
- [33] GUO Boling, LING Liming, LIU Q P. Nonlinear Schrödinger equation: generalized Darboux transformation and rogue wave solutions[J]. Physical Review E, 2012, 85(2): 026607.
- [34] PEREGRINE D H. Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions[J]. The ANZIAM Journal, 1983, 25(1): 16-43.
- [35] ZHAO Lichen, LING Liming, YANG Zhanying. Mechanism of Kuznetsov-Ma breathers[J]. Physical Review E, 2018, 97(2): 022218.
- [36] CHE Wenjuan, CHEN Shaochun, LIU Chong, et al. Nondegenerate Kuznetsov-Ma solitons of Manakov equations and their physical spectra[J]. Physical Review A, 2022, 105(4): 043526.
- [37] FERMI E, PASTA P, ULAM S, et al. Studies of the nonlinear problems[R]. Los Alamos National Lab, Los Alamos, NM (United States), 1955.
- [38] HAMMANI K, WETZEL B, KIBLER B, et al. Spectral dynamics of modulation instability described using Akhmediev breather theory[J]. Optics Letters, 2011, 36(11): 2140-2142.
- [39] FATOME J, KIBLER B, FINOT C. High-quality optical pulse train generator based on solitons on finite background[J]. Optics Letters, 2013, 38(10): 1663-1665.
- [40] DUDLEY J M, GENTY G, EGGLETON B J. Harnessing and control of optical rogue waves in supercontinuum generation[J]. Optics Express, 2008, 16(6): 3644-3651.
- [41] ERKINTALO M, GENTY G, DUDLEY J M. Rogue-wave-like characteristics in femtosecond supercontinuum generation[J]. Optics Letters, 2009, 34(16): 2468-2470.
- [42] LECAPLAIN C, GRELU P, SOTO-CRESPO J M, et al. Dissipative rogue waves generated by chaotic pulse bunching in a mode-locked laser[J]. Physical Review Letters, 2012, 108(23): 233901.
- [43] FRISQUET B, KIBLER B, MORIN P, et al. Optical dark rogue wave[J]. Scientific Reports, 2016, 6(1): 1-9.
- [44] TOENGER S, GODIN T, BILLET C, et al. Emergent rogue wave structures and statistics in spontaneous modulation instability[J]. Scientific Reports, 2015, 5(1): 1-8.
- [45] SOTO-CRESPO J M, DEVINE N, AKHMEDIEV N. Integrable turbulence and rogue waves: breathers or solitons? [J]. Physical Review Letters, 2016, 116(10): 103901.
- [46] DUAN Liang, LIU Chong, ZHAO Lichen, et al. Quantitative relations between fundamental nonlinear waves and modulation instability[J]. Acta Physica Sinica, 2020, 69(1): 010501.  
段亮, 刘冲, 赵立臣, 等. 基本非线性波与调制不稳定性精确对应[J]. 物理学报, 2020, 69(1): 010501.
- [47] ZHAO Lichen, LING Liming. Quantitative relations between modulational instability and several well-known nonlinear excitations[J]. Journal of The Optical Society of America B-optical Physics, 2016, 33(5): 850-856.
- [48] ERKINTALO M, GENTY G, WETZEL B, et al. Akhmediev breather evolution in optical fiber for realistic initial conditions[J]. Physics Letters A, 2011, 375(19): 2029-2034.
- [49] ZAKHAROV V, GELASH A. Freak waves as a result of modulation instability[J]. Procedia International Union of Theoretical and Applied Mechanics, 2013, 9: 165-175.

- [50] BARONIO F, CONFORTI M, DEGASPERIS A, et al. Vector rogue waves and baseband modulation instability in the defocusing regime[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(3): 034101.
- [51] BARONIO F, CHEN S, GRELU P, et al. Baseband modulation instability as the origin of rogue waves[J]. *Physical Review A*, 2015, 91(3): 033804.
- [52] GAO Peng, ZHAO Lichen, YANG Zhanying, et al. High-order rogue waves excited from multi-Gaussian perturbations on a continuous wave[J]. *Optics Letters*, 2020, 45(8): 2399-2402.
- [53] XU Gang, GELASH A, CHABCHOUB A, et al. Breather wave molecules[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(8): 084101.
- [54] KIBLER B, CHABCHOUB A, GELASH A, et al. Superregular breathers in optics and hydrodynamics: omnipresent modulation instability beyond simple periodicity[J]. *Physical Review X*, 2015, 5(4): 041026.
- [55] XU Gang, GELASH A, CHABCHOUB A, et al. Ghost interaction of breathers[J]. *Frontiers in Physics*, 2020, 8: 571.
- [56] AKHMEDIEV N, SOTO-CRESPO J M, ANKIEWICZ A. Extreme waves that appear from nowhere: on the nature of rogue waves[J]. *Physics Letters A*, 2009, 373(25): 2137-2145.
- [57] LIU Chong, YANG Zhanying, YANG Wenli. Growth rate of modulation instability driven by superregular breathers[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2018, 28(8): 083110.
- [58] PEREGO A M. Exact superregular breather solutions to the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonhomogeneous coefficients and dissipative effects[J]. *Optics Letters*, 2020, 45(14): 3913-3916.
- [59] TIAN Heyuan, TIAN Bo, YUAN Yuqiang, et al. Superregular solutions for a coupled nonlinear Schrödinger system in a two-mode nonlinear fiber[J]. *Physica Scripta*, 2021, 96(4): 045213.

## Frontier Progress of Breathers in Nonlinear Optical Systems (Invited)

YANG Zhanying<sup>1,2,3</sup>, WU Yuhan<sup>1,2</sup>

(1 *School of Physics, Northwestern University, Xi'an 710127, China*)

(2 *Shaanxi Key Laboratory for Theoretical Physics Frontiers, Xi'an 710127, China*)

(3 *NSFC-SPTP Peng Huanwu Center for Fundamental Theory, Xi'an 710127, China*)

**Abstract:** Breathers, nonlinear waves with periodic evolution or periodic distribution, whose shapes undergo periodic oscillations during propagation, can be localized in time or space with a finite background. Such breathers are widely found in physical systems such as nonlinear optics, fluid mechanics, Bose-Einstein condensates and PT-symmetric systems. Usually, according to the different excitation background, it can be divided into zero background and plane wave background. Among them, breathers on zero background are essentially “multi-soliton bound states”, and there are extensive experimental reports in ultrafast fiber lasers. Here we emphasize the importance of the breathers on the plane wave background of the latter case. Indeed, these breathers exhibit periodic energy exchanges with the plane wave background.

Common breathers are mainly classified by their properties into Kuznetsov-Ma breather, Akhmediev breather, Tajiri-Watanabe breather, and Super-regular breather. Quite remarkably, the Akhmediev breather can be used to describe the well-known Fermi-Pasta-Ulam recurrence and higher-order modulation instability, showing the dynamic processes with doubly periodic characteristics such as regular or shifted recurrence and pulse splitting. In addition, the study of breathers is helpful to understand the phenomena including the generation of supercontinuum and turbulence in nonlinear systems. Moreover, the interactions of the breather have been shown to be useful for high-power pulse preparation and to reveal the nonlinear evolution of modulation instability.

Generally, the study of the breather dynamics is mainly based on the integrable (1+1) dimensional nonlinear Schrödinger equation. In brief, the existence and excitation conditions of different kinds of breathers are obtained theoretically by exact solution in the integrable system, and the different breather structures are obtained by using the simple initial states for evolution. On the other hand, the formation conditions of breathers can be analyzed through the excitation mechanism of different breathers, and the dynamic properties and experimental realization of breathers can be explored. At present, the theoretical and experimental results of breathers are mainly discussed from the following aspects: 1) the existence



conditions of breathers in different nonlinear physical systems; 2) theoretical method for accurate solution of breathers; 3) structure and properties of breathers; 4) excitation mechanism and production conditions of breathers; 5) evolution characteristics of different breathers; 6) interaction characteristics of breathers; 7) applications of breathers in supercontinuum generation, high-power pulse preparation, etc.

For nonlinear physical system, nonlinear fiber is a mature nonlinear experimental platform in experimental science. Therefore, based on nonlinear optical systems, this paper briefly discuss the experimental and theoretical research progress of several typical breathers on continue wave background. Based on the analytical expressions of fundamental breathers, the dynamical properties of Kuznetsov-Ma breather, Akhmediev breather, and Peregrine rogue waves in time and frequency domains are enumerated in detail. The historical development and practical physical significance of breathers is also discussed. The excitation mechanism and generation conditions of the fundamental breathers are discussed based on the modulation instability in nonlinear systems. The results show that Kuznetsov-Ma breather and Akhmediev breather can be excited by localized perturbation with zero modulation frequency and periodic perturbation with non-zero modulation frequency, respectively. Furthermore, the quantitative conversion relationship between different breathers is analyzed by combining effective energy and modulation instability. Finally, we show the dynamics of breathers interaction on a plane wave background. The phase sensitive collision of two breather is reported to form three different localized structures, that is super-high peak rogue waves, quasi-annihilation super-regular breathers, and ghost structures without any change. These important breather structures have been confirmed and discussed in detail in theoretical and optical experiments. Actually, understanding the physical significance of fundamental breathers and their interactions is expected to play an important role in the study of rogue wave events generation, integrable turbulence, modulation instability, Fermi-Pasta-Ulam recurrence and other phenomena in nonlinear systems.

**Key words:** Nonlinear optics; Breather; Rogue wave; Dynamics; Excitation mechanism; Interaction

**OCIS Codes:** 190.4410; 000.3860; 350.7420