

引用格式: GUO Fuyuan, LI Lianhuang, ZHENG Hua. Scale Transformation Properties of Small Light Fields with Flat Wave Front[J]. Acta Photonica Sinica, 2022, 51(1):0151114

郭福源,李连煌,郑华.小平坦波面光场的尺度变换特性[J].光子学报,2022,51(1):0151114

小平坦波面光场的尺度变换特性

郭福源,李连煌,郑华

(福建师范大学光电与信息工程学院激光与光电子技术研究所,光子技术福建省重点实验室,
医学光电科学与技术教育部重点实验室,福州 350007)

摘要:基于由倾斜角余弦平方根表达的倾斜因子,在直角坐标系中分别给出适用于分析对称小平坦波面衍射源的衍射远场特性和适用于分析对称会聚波面衍射源的焦平面光场特性的非傍轴衍射积分公式。阐明上述两个非傍轴衍射积分公式的互易性及满足互易性的光场条件。结合透镜对光波波面法线的变迹功能,验证满足正弦条件的透镜物像共轭平面之间的小平坦波面光场尺度变换特性,并明确了尺度变换关系的适用条件。

关键词:物理光学;衍射理论;倾斜因子;互易性;正弦条件;尺度变换

中图分类号:O436.1

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20225101.0151114

0 引言

光场的物像共轭变换是光学系统中常见的一种变换,在傍轴近似条件下,GOODMAN J W 在傅里叶光学导论中基于菲涅尔(Fresnel)衍射理论给出用于分析透镜物像共轭平面光场关系的脉冲响应函数,论证透镜物像共轭平面之间的光场关系为几何光学预言的尺度变换^[1,2]关系。由于文献[1]是在傍轴和菲涅尔近似条件下分析透镜对光场的作用,衍射积分公式的倾斜因子和变换透镜所需要满足的条件没有被考虑。正弦条件^[3-4]是光学系统中垂轴小面积物体成完善像所需满足的条件,在几何光学中,正弦条件由费马(Fermat)原理论证^[3],垂轴小面积物体及其像的光场为小平坦波面光场,满足正弦条件的透镜物像共轭平面之间的垂轴小面积物、像变换关系为尺度变换关系,即满足正弦条件的透镜物像共轭平面之间的小平坦波面光场变换关系为尺度变换关系。

在经典衍射理论中,第一种瑞利-索末菲(Rayleigh-Sommerfeld)衍射积分公式^[5-9]常被用于平坦波面衍射源的衍射远场特性分析,德拜(Debye)积分公式^[8-12]常被用于会聚半球形波面衍射源的焦平面光场特性分析,但由上述两个衍射积分公式表达的一些非傍轴衍射光场不满足行波场辐射能守恒定律,两个衍射积分公式均存在一定的局限性,不适用于非傍轴光场的衍射特性分析。

以惠更斯(Huygens)原理^[8]和行波场辐射能守恒定律为基础分析衍射过程,文献[13-14]在柱面坐标系中阐明由倾斜角余弦平方根表达的归一化倾斜因子的合理性,并结合满足正弦条件的准直和聚焦透镜的变迹因子,将透镜物像双方焦面光场的汉克尔(Hankel)变换关系从傍轴领域推广到满足正弦条件的准直和聚焦透镜领域。

在直角坐标系中,本文给出适用于对称小平坦波面衍射源的衍射远场特性分析的非衍射积分公式,和适用于对称会聚波面衍射源的焦平面光场特性分析的非傍轴衍射积分公式。当小平坦波面光场为对称分布行波场时,基于归一化倾斜因子由倾斜角余弦平方根表达的两个非傍轴衍射积分公式具有互易性,它与光学原理中的亥姆霍兹(Helmholtz)互易定理^[8]或天线理论中的互易定理^[15-17]一致。

根据衍射积分公式的倾斜因子和透镜的变迹(切趾)因子^[9,18],分析一种正透镜物像共轭平面之间的光

基金项目:中央引导地方科技发展专项(No. 2020L3008),福建省自然科学基金(No. 2019J01269)

第一作者(通讯作者):郭福源(1965—),男,教授,博士,主要研究方向为光波导理论和光束传输理论及其应用。Email: guofy@fjnu.edu.cn

收稿日期:2021-06-16;录用日期:2021-09-23

<http://www.photon.ac.cn>

场变换关系。当正透镜物像共轭平面上的光场均为小平坦波面行波场时,基于非傍轴衍射积分公式中的衍射源方倾斜因子^[13]和观察方倾斜因子^[14]及满足正弦条件^[19]的透镜物像双方变迹因子推导出的结论与文献[1]在傍轴和非涅耳条件下推导出的结论基本一致。将透镜物像共轭平面之间的光场尺度变换表达式从傍轴领域推广到满足正弦条件的透镜领域,从物理光学的衍射理论角度验证了几何光学中基于费马原理论证的正弦条件与光学系统中垂轴小面积物体成完善像之间的关系,阐明两个理论在分析该问题时具有一致性,并明确了物像共轭平面之间光场尺度变换关系的适用条件。

1 两个非傍轴衍射积分公式

在直角坐标系中,根据惠更斯原理分析对称小平坦波面光场的非傍轴衍射过程,衍射源参考面 Σ 与小平坦波面重合,观察参考面 Σ_1 与衍射远场半球形光波波面重合,如图1所示,在以 O 为原点的直角坐标系中, xOy 平面上的衍射源光场为关于 xOz 平面和 yOz 平面对称分布的小平坦波面光场,在衍射源参考点 $A(x, y, 0)$ 处,光波波矢 k 平行于 z 轴,衍射远场为对称分布的非傍轴光场,在衍射远场观察参考点 $A_1(x_1, y_1, z_1)$ 处,光波波矢 k_1 (向量 $\overrightarrow{OA_1}$)的三个方向角分别为 α 、 β 和 γ ,三个方向角余弦满足 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 。当衍射远场观察参考面曲率半径为 R 时,观察参考点 A_1 的坐标分别为 $x_1 = R \cos \alpha$, $y_1 = R \cos \beta$ 和 $z_1 = R \cos \gamma$ 。

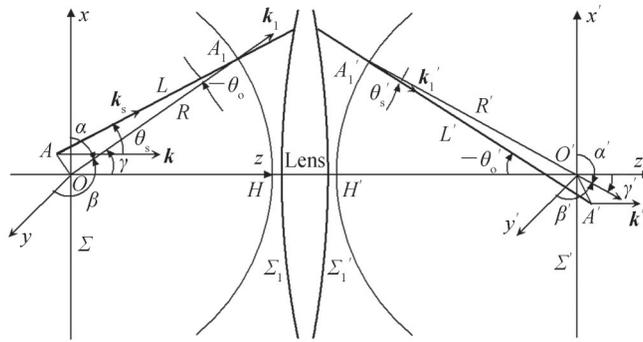


图1 光场的物像共轭变换示意图

Fig. 1 Schematic of the object-image conjugated transformation of light field

小平坦波面光场能量集中在紧邻 z 轴的垂轴小面积内,光场有效横向尺寸 x_{eff} 和 y_{eff} 均较小。当 $R \gg \pi(x_{\text{eff}}^2 + y_{\text{eff}}^2)/\lambda$ 时,紧邻原点 O 的衍射源参考点 A 与衍射远场非傍轴观察参考点 A_1 之间的距离 $L = (R^2 - 2Rx \cos \alpha - 2Ry \cos \beta + x^2 + y^2)^{1/2}$ 可近似表达为 $L \approx R - x \cos \alpha - y \cos \beta$,衍射源方倾斜角 $\theta_s \approx \gamma$,观察方倾斜角 $\theta_o \ll 1$,衍射积分公式的倾斜因子由归一化衍射源方倾斜因子^[13] $K(\gamma) = \sqrt{\cos \gamma}$ 表达,在直角坐标系中,衍射源参考平面 Σ 上参考点 A 处的微平面元 $d\sigma = dx dy$,参照文献[13],衍射远场观察参考面 Σ_1 上的光场分布函数 $U_1(R, \alpha, \beta)$ 可由衍射源参考面 Σ 上的光场分布函数 $U(x, y)$ 表达为

$$U_1(R, \alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\cos \gamma} \exp [i(kR - \pi/2)]}{\lambda R} \text{circ}(\lambda \sqrt{f_x^2 + f_y^2}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp [-i2\pi(xf_x + yf_y)] dx dy \quad (1)$$

式中, i 为虚数单位, λ 为光波波长, $k = 2\pi/\lambda$ 为光波波数, $\text{circ}(\xi)$ 为圆孔函数, $f_x = \cos \alpha/\lambda$ 和 $f_y = \cos \beta/\lambda$ 分别为衍射源参考平面 Σ 上行波场在 x 轴和 y 轴方向的空间频率。

当衍射源光场为行波场时,空间频率满足 $\sqrt{f_x^2 + f_y^2} \leq 1/\lambda$,圆孔函数 $\text{circ}(\lambda \sqrt{f_x^2 + f_y^2}) = 1$ 。根据帕斯瓦尔(Parseval)定理和参考面上光场总功率的计算公式^[1,20],基于式(1)计算的衍射远场观察参考面上的光场总功率等于衍射源光场总功率,满足行波场辐射能守恒定律,在直角坐标系中,归一化衍射源方倾斜因子 $K(\gamma) = \sqrt{\cos \gamma}$ 具有合理性。

在直角坐标系中,根据惠更斯原理分析对称非傍轴会聚光场的衍射过程,衍射源参考面 Σ_1' 与半球形会聚光波波面重合,观察参考面 Σ' 与会聚光波的焦平面重合,如图1所示,在以 O' 为原点的直角坐标系中,以

上标“'”标注光场参量,非傍轴会聚波面衍射源光场为关于 $x'O'z'$ 平面和 $y'O'z'$ 平面对称分布的行波场,在衍射源参考点 $A'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ 处,光波波矢 k'_1 (向量 $\overrightarrow{A'_1O'}$)的三个方向角分别为 α' 、 β' 和 γ' ,三个方向角余弦满足 $\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$ 。当衍射源参考面曲率半径为 R' 时,衍射源参考点 A'_1 的坐标分别为 $x'_1 = -R' \cos\alpha'$ 、 $y'_1 = -R' \cos\beta'$ 和 $z'_1 = -R' \cos\gamma'$,会聚光波的焦平面光场为对称分布的小平坦波面光场,在观察参考点 $A'(x', y', 0)$ 处,光波波矢 k' 平行于 z 轴。

当会聚衍射源光场为非傍轴对称光场时,会聚光波的焦平面光场能量集中在紧邻焦点 O' 的垂轴小面积内,光场有效横向尺寸 $x'_{\text{eff}} \ll R'$ 和 $y'_{\text{eff}} \ll R'$ 。当 $R' \gg \pi(x'^2_{\text{eff}} + y'^2_{\text{eff}})/\lambda$ 时,非傍轴衍射源参考点 A'_1 与紧邻原点 O' 的观察参考点 A' 之间的距离 $L' = (R'^2 + 2R'x' \cos\alpha' + 2R'y' \cos\beta' + x'^2 + y'^2)^{1/2}$ 可近似表达为 $L' \approx R' + x' \cos\alpha' + y' \cos\beta'$,衍射源方倾斜角 $\theta'_s \ll 1$,观察方倾斜角 $\theta'_o \approx -\gamma'$,衍射积分公式的倾斜因子由归一化观察方倾斜因子 $^{[14]}K(\gamma') = \sqrt{\cos\gamma'}$ 表达,在直角坐标系中,半球形衍射源参考面 Σ'_1 上的微球面元 $ds' = R'^2 d\Omega'$,由于微立体角 $^{[10]}d\Omega' = d(\cos\alpha')d(\cos\beta')/\cos\gamma'$,则微球面元 $ds' = dx'_1 dy'_1 / \cos\gamma'$,即 $ds' = R'^2 \lambda^2 df'_x df'_y / \cos\gamma'$,参照文献 $^{[14]}$,焦平面 Σ' 上的光场分布函数 $U'(x', y')$ 可由半球形衍射源参考面 Σ'_1 上的光场分布函数 $U'_1(R', \alpha', \beta')$ 表达为

$$U'(x', y') = \lambda R' \exp[i(kR' - \pi/2)] \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \frac{U'_1(R', \alpha', \beta')}{\sqrt{\cos\gamma'}} \exp[i2\pi(x'f'_x + y'f'_y)] df'_x df'_y \quad (2)$$

式中, $f'_x = \cos\alpha'/\lambda$ 和 $f'_y = \cos\beta'/\lambda$ 分别为会聚光波的焦平面 Σ' 上光场在 x' 轴和 y' 轴方向的空间频率。

根据帕斯瓦耳定理和参考面上光场总功率的计算公式 $^{[1,20]}$,基于式(2)计算的焦平面光场总功率等于衍射源光场总功率,满足行波场辐射能守恒定律,在直角坐标系中,归一化观察方倾斜因子 $K(\gamma') = \sqrt{\cos\gamma'}$ 具有合理性。

2 两个非傍轴衍射积分公式的互易性

在分析对称非傍轴会聚光波焦平面光场特性时,根据傅里叶(Fourier)变换与傅里叶逆变换性质,由式(2)知,半球形衍射源参考面 Σ'_1 上的光场分布函数 $U'_1(R', \alpha', \beta')$ 与会聚光波的焦平面 Σ' 上的光场分布函数 $U'(x', y')$ 之间的关系可表达为

$$U'_1(R', \alpha', \beta') = \frac{\sqrt{\cos\gamma'} \exp[-i(kR' - \pi/2)]}{\lambda R'} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} U'(x', y') \exp[-i2\pi(x'f'_x + y'f'_y)] dx' dy' \quad (3)$$

由式(1)和(3)知,当参考平面 Σ 上小平坦波面衍射源光场为对称分布行波场时,由式(1)和(2)表达的两个非傍轴衍射积分公式存在某种特殊的关系。

在分析对称小平坦波面衍射源的非傍轴衍射远场特性时,衍射源参考面 Σ 为平面,观察参考面 Σ_1 为衍射远场的半球形波面;在分析对称非傍轴会聚波面衍射源的焦平面光场特性时,衍射源参考面 Σ'_1 为半球形波面,观察参考面 Σ' 为会聚光波的焦平面,两个衍射过程为互易衍射源参考面和观察参考面过程。

将非傍轴会聚光波的焦平面光场当成新的衍射过程的衍射源,进行小平坦波面光波非傍轴衍射远场特性分析,如图2所示,新的衍射过程的衍射源参考平面 xOy 与会聚光波的焦平面 $x'Oy'$ 重合。

在小平坦波面光波非傍轴衍射远场特性分析时,图2中的向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 与向量 $\overrightarrow{A'_1O'}$ 一致,向量的三个方向角, $\alpha = \alpha'$ 、 $\beta = \beta'$ 和 $\gamma = \gamma'$ 。在参考平面 Σ 上,光场空间频率 $f_x = f'_x$ 和 $f_y = f'_y$,光场分布函数 $U(x, y) = U'(x', y')$,会聚光波的焦平面光场为行波场,圆孔函数 $\text{circ}(\lambda \sqrt{f_x^2 + f_y^2}) = 1$,由式(1)和(3)知,当半球形参考面曲率半径 $R = R'$ 时,半球形参考面 Σ_1 上的光场分布函数 $U_1(R, \alpha, \beta)$ 与半球形参考面 Σ'_1 上的光场分布函数 $U'_1(R', \alpha', \beta')$ 关系可表示为

$$U_1(R, \alpha, \beta) \exp[-i(kR - \pi/2)] = U'_1(R', \alpha', \beta') \exp[i(kR' - \pi/2)] \quad (4)$$

若设参考面 Σ (式 Σ)上的小平坦波面光场的相位为零,半球形参考面 Σ'_1 上的会聚衍射源的光场分布函数可由振幅分布函数 $u(R', \alpha', \beta')$ 表达为 $U'_1(R', \alpha', \beta') = u(R', \alpha', \beta') \exp[-i(kR' - \pi/2)]$,由式(4)知,衍射

远场半球形参考面 Σ_1 上的光场分布函数可表达为 $U_1(R, \alpha, \beta) = u(R', \alpha', \beta') \exp [i(kR - \pi/2)]$, 光场分布函数 $U_1(R, \alpha, \beta)$ 和 $U_1'(R', \alpha', \beta')$ 互为对方的复共轭函数, 即 $U_1(R, \alpha, \beta) = U_1'^*(R', \alpha', \beta')$ 或 $U_1'(R', \alpha', \beta') = U_1^*(R, \alpha, \beta)$ 。可见, 当衍射光场为对称分布行波场时, 互易衍射源参考面与观察参考面, 由归一化衍射源方倾斜因子 $K(\gamma) = \sqrt{\cos \gamma}$ 和归一化观察方倾斜因子 $K(\gamma') = \sqrt{\cos \gamma'}$ 表达的两个非傍轴衍射积分公式具有互易性。

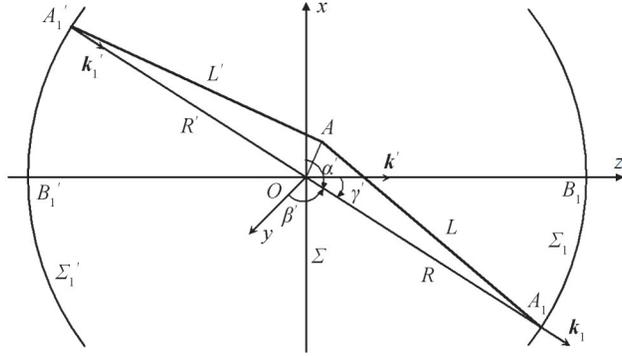


图2 光场传输过程示意图
Fig. 2 Schematic of the transformation process of light field

以参考面 Σ_1' 上的光场为平面波经过满足正弦条件的聚焦透镜变换后的光场为例, 设聚焦透镜的通光孔径为矩形结构, 并设图2中坐标原点 O 处光场的相位为零。由于满足正弦条件的聚焦透镜的变迹因子^[9] $a(\gamma') = \sqrt{\cos \gamma'}$, 参考面 Σ_1' 上的光场分布函数可表达为

$$U_1'(R', \alpha', \beta') = c_1 \frac{\sqrt{\cos \gamma'}}{\lambda R'} \text{rect}\left(\frac{f_x'}{f_{x,m}'}\right) \text{rect}\left(\frac{f_y'}{f_{y,m}'}\right) \exp[-i(kR' - \pi/2)] \quad (5)$$

式中, c_1 为实常数, $\text{rect}(\xi)$ 为矩孔函数, $f_{x,m}' = x_m'/(\lambda R')$ 和 $f_{y,m}' = y_m'/(\lambda R')$ 分别为光场在 x' 轴 (x 轴) 和 y' 轴 (y 轴) 方向的最大空间频率, x_m' 和 y_m' 分别为参考点 A_1' 在 x' 轴和 y' 轴的最大横向坐标, x_m' 和 y_m' 满足 $\sqrt{x_m'^2 + y_m'^2} < R'$ 。

由式(2)和(5)知, 会聚光波的焦平面光场分布函数 $U'(x', y')$ 可表达为

$$U'(x', y') = 4c_1 f_{x,m}' f_{y,m}' \text{sinc}(2x' f_{x,m}') \text{sinc}(2y' f_{y,m}') \quad (6)$$

式中, 辛格函数 $\text{sinc}(\eta) = \sin(\pi\eta)/(\pi\eta)$, 当 $\eta = 0$ 时, $\text{sinc}(\eta) = 1$ 。

在会聚光波的焦平面 Σ 上, 小平坦波面的光场分布函数 $U(x, y) = U'(x', y')$, 由式(1)和(6)知, 在衍射远场观察参考面 Σ_1 上, 光场分布函数 $U_1(R, \alpha, \beta)$ 可表达为

$$U_1(R, \alpha, \beta) = c_1 \frac{\sqrt{\cos \gamma}}{\lambda R} \text{rect}\left(\frac{f_x}{f_{x,m}}\right) \text{rect}\left(\frac{f_y}{f_{y,m}}\right) \exp[i(kR - \pi/2)] \quad (7)$$

当参考面曲率半径 $R = R'$, 方向角 $\alpha = \alpha'$ 和 $\beta = \beta'$ 时, 由式(5)和(7)知, $U_1(R, \alpha, \beta) = U_1'^*(R', \alpha', \beta')$ 或 $U_1'(R', \alpha', \beta') = U_1^*(R, \alpha, \beta)$, 满足互易定理。根据帕斯瓦尔定理和参考面上光场总功率的计算公式, 由式(5)~(7)知, 在参考面 Σ_1' 、 Σ 和 Σ_1 上, 参考面光场总功率均可表达为 $P = 4c_0 c_1^2 f_{x,m}' f_{y,m}'$, 其中, c_0 为常数^[13], 参考面光场满足行波场辐射能守恒定律。

当小平坦波面光场为行波场时, 圆孔函数 $\text{circ}(\lambda \sqrt{f_x^2 + f_y^2}) = 1$, 由式(1)和傅里叶变换性质知, 小平坦波面的非傍轴衍射远场分布函数 $U(R, \alpha, \beta)$ 的复共轭函数 $U^*(R, \alpha, \beta)$ 可表达为

$$U_1^*(R, \alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\cos \gamma} \exp[-i(kR - \pi/2)]}{\lambda R} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(-x, -y) \exp[-i2\pi(xf_x + yf_y)] dx dy \quad (8)$$

若将 $U_1^*(R, \alpha, \beta)$ 当成会聚波面的光场分布函数, 即 $U_1'(R', \alpha', \beta') = U_1^*(R, \alpha, \beta)$, 其中, 波面曲率半径 $R' = R$, 方向角 $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ 和 $\gamma' = \gamma$, 由式(2)和(8)知, 焦平面光场分布函数 $U'(x', y') = U(-x', -y')$ 。当

小平坦波面光场为对称分布光场时, $U(-x', -y') = U(x', y')$, 则 $U'(x', y') = U(x', y')$, 可见, 当衍射光场为对称分布的行波场时, 由式(1)和(2)表达的两个非傍轴衍射积分公式具有互易性。

可见, 当衍射光场为对称分布的行波场时, 互易衍射源参考面和观察参考面, 互易了衍射积分公式中的光场分布表达函数, 也互易了倾斜因子的功能, 用于计算小平坦波面光波衍射远场分布的衍射积分公式和用于计算会聚光波焦平面光场分布的衍射积分公式具有互易性, 它与光学原理中用于阐明菲涅耳—基尔霍夫(Kirchhoff)衍射积分公式中衍射源点和观察点对称性的亥姆霍兹互易定理^[8]一致, 也与用于分析星形耦合器中波导端口衍射和耦合特性^[15-17]的互易定理一致。

3 物像共轭平面间小平坦波面光场尺度变换特性

在图1中, 焦距为 f' 的正透镜 Lens 的物像双方介质均为空气, 满足正弦条件的正透镜的一对物像共轭平面分别与 xOy 和 $x'O'y'$ 平面重合, 若透镜物方 xOy 平面上的光场为小平坦波面光场, 光场能量集中在紧邻 O 的垂轴小面积内。当光波传播距离 $R \gg \pi(x_{\text{eff}}^2 + y_{\text{eff}}^2)/\lambda$ 时, 参考面 Σ_1 上的光波波面可近似为半球面, 曲率半径为 R 的光波波面顶点与透镜物方主点 H 重合, 如图1所示, 当 $R > f'$ 时, 发散光波经过满足正弦条件的正透镜变换之后的光波为会聚光波, 曲率半径为 R' 的会聚光波波面顶点与透镜像方主点 H' 重合。当会聚光场为非傍轴光场时, 透镜像方 $x'O'y'$ 平面上的光场也为小平坦波面光场, 光场能量也集中在紧邻 O' 的垂轴小面积内, 满足 $\pi(x'_{\text{eff}}{}^2 + y'_{\text{eff}}{}^2)/\lambda \ll R'$ 。根据满足正弦条件的正透镜对光波波面法线的变迹功能, 透镜焦距 f' 与光波波面曲率半径 R 和 R' 关系为 $1/f' = 1/R + 1/R'$, 透镜物像共轭平面之间小平坦波面光场的横向放大率 $M = -R'/R$ 。

将焦距为 f' 的正透镜当成焦距为 f_1' 的准直透镜与焦距为 f_2' 的聚焦透镜组合, $f_1' = R, f_2' = R'$, 准直和聚焦透镜满足相同的特定条件, 准直透镜的变迹因子 $a(\gamma)$ 和聚焦透镜的变迹因子^[9] $a(\gamma')$ 的表达函数相同。当 xOy 参考平面上的光场为小平坦波面光场时, 光场有效横向尺寸 $x_{\text{eff}} \ll R$ 和 $y_{\text{eff}} \ll R$, 光学系统的光瞳可等效于空间频率滤波器, 光瞳函数可由空间频率表达为 $\tau(f_x, f_y)$ 。设正透镜物像双方主面之间的光程为 s , 半球形参考面 Σ_1' 上的非傍轴光场分布函数 $U'(R', \alpha', \beta')$ 与半球形参考面 Σ_1 上的非傍轴光场分布函数 $U(R, \alpha, \beta)$ 的关系可表达为

$$\frac{U_1'(R', \alpha', \beta')}{a(\gamma')} = \frac{U_1(R, \alpha, \beta)}{a(\gamma)} \tau(f_x, f_y) \exp(iks) \quad (9)$$

式中, 空间频率 $f_x = \cos \alpha/\lambda$ 和 $f_y = \cos \beta/\lambda$ 用于光场参量的坐标变换。

由式(1)、(2)和(9)知, 正透镜像方参考平面 $x'O'y'$ 上的小平坦波面光场分布函数 $U'(x', y')$ 可由正透镜物方参考平面 xOy 上的小平坦波面光场空间频谱分布函数 $S(f_x, f_y)$ 表达为

$$U'(x', y') = -M \exp(i\Phi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\gamma, \gamma') S(f_x, f_y) \tau(f_x, f_y) \exp[i2\pi(x'f_x' + y'f_y')] df_x' df_y' \quad (10)$$

式中, $\Phi = k(R' + R + s) - \pi$ 为相位延迟, 系数 $c(\gamma, \gamma') = a(\gamma')/a(\gamma) \sqrt{\cos \gamma / \cos \gamma'}$ 。

在物方参考平面 xOy 上, 光场空间频谱分布函数 $S(f_x, f_y)$ 为光场分布函数 $U(x, y)$ 的二维傅里叶变换, $S(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp[-i2\pi(xf_x + yf_y)] dx dy$; 在像方参考平面 $x'O'y'$ 上, 光场空间频谱分布函数 $S'(f_x', f_y')$

为光场分布函数 $U'(x', y')$ 的二维傅里叶变换, $S'(f_x', f_y') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U'(x', y') \exp[-i2\pi(x'f_x' + y'f_y')] dx' dy'$ 。

根据空间频率的定义和物像共轭平面之间横向放大率的计算公式, 正透镜物像共轭平面之间的空间频率变换关系为 $f_x' = f_x/M$ 和 $f_y' = f_y/M$, 光瞳函数 $\tau(f_x, f_y)$ 可表达为 $\tau(Mf_x', Mf_y')$ 。由式(10)知, 正透镜像方参考平面 $x'O'y'$ 上的小平坦波面光场空间频谱分布函数 $S'(f_x', f_y')$ 可由正透镜物方参考平面 xOy 上的小平坦波面光场空间频谱分布函数 $S(f_x, f_y)$ 表达为

$$S'(f_x', f_y') = -M \exp(i\Phi) c(\gamma, \gamma') S(Mf_x', Mf_y') \tau(Mf_x', Mf_y') \quad (11)$$

当变换光学系统为对称光学系统时, $R' = R$, 正透镜物像共轭平面的横向放大率 $M = -1$, 方向角

$\gamma' = \gamma$, 透镜物像双方变迹因子 $a(\gamma') = a(\gamma)$, 系数 $c(\gamma, \gamma')$ 与正透镜所满足的条件无关, $c(\gamma, \gamma') = 1$ 。若正透镜物方参考平面 xOy 上的小平坦波面光场为行波场, 且变换光学系统的光瞳没有对空间频谱分布函数为 $S(f_x, f_y)$ 的光场产生限制作用, 光瞳函数 $\tau(f_x, f_y) = 1$, 即 $\tau(-f'_x, -f'_y) = 1$, 由式(10)和(11)知, 正透镜物像共轭平面之间的光场分布函数关系和光场空间频谱分布函数关系分别为

$$U'(x', y') = U(-x', -y') \exp(i\Phi) \quad (12)$$

$$S'(f'_x, f'_y) = S(-f'_x, -f'_y) \exp(i\Phi) \quad (13)$$

当小平坦波面光场为对称分布行波场时, 由式(12)和(13)知, 对称光学系统的正透镜物像共轭平面之间光场分布函数关系为 $U'(x', y') \exp(-i\Phi/2) = U(x', y') \exp(i\Phi/2)$, 对称光学系统的正透镜物像共轭平面之间光场空间频谱分布函数关系为 $S'(f'_x, f'_y) \exp(-i\Phi/2) = S(f'_x, f'_y) \exp(i\Phi/2)$, 它与两个非傍轴衍射积分公式互易性的结论一致。

当正透镜满足正弦条件时, 正透镜物像双方参量 $R' \sin \gamma' = R \sin \gamma$, 正透镜物像双方变迹因子 $a(\gamma) = \sqrt{\cos \gamma}$ 和 $a(\gamma') = \sqrt{\cos \gamma'}$, 系数 $c(\gamma, \gamma') = 1$ 。若正透镜物方参考平面 xOy 上的小平坦波面光场为行波场, 且光学系统的光瞳没有对空间频谱分布函数为 $S(f_x, f_y)$ 的光场产生限制作用, 由式(10)和(11)知, 正透镜物像共轭平面之间的光场分布函数关系和光场空间频谱分布函数关系可分别表达为

$$U'(x', y') = -\frac{\exp(i\Phi)}{M} U\left(\frac{x'}{M}, \frac{y'}{M}\right) \quad (14)$$

$$S'(f'_x, f'_y) = -M \exp(i\Phi) S(Mf'_x, Mf'_y) \quad (15)$$

当变换光学系统为非对称光学系统时, 正透镜物像共轭平面的横向放大率 $M \neq -1$, 方向角 $\gamma' \neq \gamma$, 变迹因子 $a(\gamma') \neq a(\gamma)$ 。若正透镜不满足正弦条件, $R' \sin \gamma' \neq R \sin \gamma$, 系数 $c(\gamma, \gamma')$ 随着方向角 γ 变化而变化, 由式(10)和式(11)知, 该正透镜物像共轭平面之间的光场空间频谱分布函数关系不满足线性关系, 该正透镜物像共轭平面之间的光场分布函数关系不满足尺度变换关系。

当小平坦波面光场的空间频谱分布函数 $S(f_x, f_y)$ 在光瞳函数 $\tau(f_x, f_y) = 0$ 区域不等于零时, 光学系统的光瞳对空间频谱分布函数为 $S(f_x, f_y)$ 的小平坦波面衍射光场产生限制作用时, 光学系统的光瞳等效于空间频率滤波器, 光瞳拦截了光瞳函数 $\tau(f_x, f_y) = 0$ 区域的小平坦波面光场的空间频谱, 光学系统不满足无失真系统^[21]条件, 由式(10)和(11)知, 正透镜物像共轭平面之间的光场分布函数关系不满足尺度变换关系。

以参考平面 xOy 上小平坦波面光场为平面波经过满足正弦条件的聚焦透镜变换后的焦平面光场为例, 在正透镜物方参考平面 xOy 上, 小平坦波面光场的光场分布函数 $U(x, y)$ 和空间频谱分布函数 $S(f_x, f_y)$ 分别表达为

$$U(x, y) = 4c_1 f_{x,m} f_{y,m} \operatorname{sinc}(2xf_{x,m}) \operatorname{sinc}(2yf_{y,m}) \quad (16)$$

$$S(f_x, f_y) = c_1 \operatorname{rect}\left(\frac{f_x}{f_{x,m}}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{f_y}{f_{y,m}}\right) \quad (17)$$

式中, $f_{x,m}$ 和 $f_{y,m}$ 分别为正透镜物方参考平面上的光场在 x 轴和 y 轴方向的最大空间频率。

正透镜满足正弦条件 $R' \sin \gamma' = R \sin \gamma$, 当 xOy 参考平面上的光场为小平坦波面光场时, 光学系统的光瞳可等效于空间频率滤波器。若光学系统的入射光瞳为距孔, 光瞳函数可由空间频率表达为 $\tau(f_x, f_y) = \operatorname{rect}(f_x/f_{x,a}) \operatorname{rect}(f_y/f_{y,a})$, 其中, $f_{x,a}$ 和 $f_{y,a}$ 分别为可通过光瞳的光场在 x 轴和 y 轴方向的最大空间频率。由式(10)、(11)、(16)和(17)知, 在正透镜像方参考平面 $x'O'y'$ 上, 小平坦波面光场的光场分布函数 $U'(x', y')$ 和空间频谱分布函数 $S'(f'_x, f'_y)$ 可分别表达为

$$U'(x', y') = -\frac{4c_1 f_{x,\min} f_{y,\min}}{M} \operatorname{sinc}\left(\frac{2x' f_{x,\min}}{M}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{2y' f_{y,\min}}{M}\right) \exp(i\Phi) \quad (18)$$

$$S'(f'_x, f'_y) = -c_1 M \operatorname{rect}\left(\frac{Mf'_x}{f_{x,\min}}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{Mf'_y}{f_{y,\min}}\right) \exp(i\Phi) \quad (19)$$

式中, $f_{x,\min} = \min\{f_{x,m}, f_{x,a}\}$ 为 $f_{x,m}$ 和 $f_{x,a}$ 中的最小值, $f_{y,\min} = \min\{f_{y,m}, f_{y,a}\}$ 为 $f_{y,m}$ 和 $f_{y,a}$ 中的最小值。

当 $f_{x,a} > f_{x,m}$ 、 $f_{y,a} > f_{y,m}$ 时,光学系统的光瞳没有对空间频谱分布函数为 $S(f_x, f_y)$ 的光场产生限制作用, $f_{x,\min} = f_{x,m}$ 、 $f_{y,\min} = f_{y,m}$,由式(18)表达的透镜像方参考平面 $x'O'y'$ 上的光场与式(16)表达的透镜物方参考平面 xOy 上的光场满足尺度变换关系。

式(14)与傅里叶光学导论在傍轴近似条件下基于菲涅尔衍射理论推导的成像透镜物像双方共轭参考平面之间的光场尺度变换特性^[1]基本一致。可见,非傍轴衍射积分公式中的衍射源方倾斜因子和观察方倾斜因子与满足正弦条件的透镜物像双方变迹因子将物像共轭平面之间的光场关系从傍轴领域推广到非傍轴领域,适用于满足正弦条件正透镜的物像共轭参考平面之间的光场特性分析。

4 结论

在直角坐标系中,当衍射源光场为对称分布行波场时,互易衍射源参考面和观察参考面,便互易了由倾斜角余弦平方根表达的归一化倾斜因子的功能。对称小平坦波面衍射源的非傍轴衍射远场分布计算公式与对称非傍轴会聚波面衍射源的焦平面光场分布计算公式具有互易性,它与亥姆霍兹互易定理或天线理论中的互易定理一致。

当正透镜物像共轭平面上的光场均为小平坦波面行波场时,基于两个非傍轴衍射积分公式和满足正弦条件的正透镜物像双方变迹因子验证了几何光学中基于费马原理论证的正弦条件与光学系统中垂轴小面积物体成完善像之间的关系,明确了物像共轭平面之间光场尺度变换关系的适用条件。

参考文献

- [1] GOODMAN J W. Introduction to Fourier optics (2nd edition) [M]. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc., 1996: 1-120.
- [2] YE Yidong, LI Jianmin, YAN Hong, et al. Numerical simulation for optical beam diffraction propagation [J]. Chinese Journal of Lasers, 2006, 33(Supplement): 284-286.
叶一东,李建民,颜宏,等.光束衍射传输的数值仿真方法[J]中国激光,2006,33(增刊):284-286.
- [3] LI Xiaotong, CEN Zhaofeng. Geometrical optics, aberrations and optical design (3rd edition) [M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2014: 97-116, 297-309
李晓彤,岑兆丰.几何光学·像差·光学设计(第3版)[M].杭州:浙江大学出版社,2014:97-116,297-309.
- [4] CAI Yanmin, WANG Xiangzhao, BU Yang, et al. Optical design of Fourier transform lens for measurement of illumination pupil of lithography tools [J]. Chinese Journal of Lasers, 2015, 42(4): 0416001.
蔡燕民,王向朝,步扬,等.光刻机照明光瞳测量用傅里叶变换物镜光学设计[J]中国激光,2015,42(4):0416001.
- [5] ARTIGLIA M, COPPA G, VITA P D P, et al. Mode field diameter measurements in single-mode optical fibers [J]. Journal of Lightwave Technology, 1989, 7(8): 1139-1152.
- [6] LU Zengxiong, JIN Chunshui, MA Dongmei, et al. Analysis of effect of tiny pinhole deviation on far-field wave-front quality [J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(8): 0812002.
卢增雄,金春水,马冬梅,等.微小孔偏差对远场波前质量影响分析[J].光学学报,2011,31(8):0812002.
- [7] LI Lianhuang, GUO Fuyuan. An improved definition of divergence half-angle for the far-field of fiber [J]. Optik, 2012, 123(4): 283-285.
- [8] BORN M, WOLF E. Principles of optics (7th edition) [M]. Oxford: Cambridge University Press, 1999: 116-203, 412-516.
- [9] GU M. Advanced optical imaging theory [M]. Berlin: Springer-verlag Berlin Heidelberg GmbH, 2000: 143-176.
- [10] WOLF E. Electromagnetic diffraction in optical systems. I. An integral representation of the image field [J]. Proceeding of the Royal Society, Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1959, 253(1274): 349-357.
- [11] SHEPPARD C J R. Validity of the Debye approximation [J]. Optics Letters, 2000, 25(22): 1660-1662.
- [12] GUO Jiang, LÜ Baida, DUAN Kailiang. The revision of Debye formula [J]. Lasers Technology, 2005, 29(4): 380-382.
郭江,吕百达,段开棕.德拜公式的修正[J].激光技术,2005,29(4):380-382.
- [13] GUO Fuyuan, LI Lianhuang, ZHENG Hua. Diffraction and collimation characteristics of small light fields with planar wavefronts [J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(4): 0426001.
郭福源,李连煌,郑华.小平坦波面光场的衍射与准直特性[J].光学学报,2021,41(4):0426001.
- [14] GUO Fuyuan, LI Lianhuang, ZHENG Hua. Diffraction characteristic of light field with converging wave front [J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(5): 0526001.
郭福源,李连煌,郑华.会聚波面光场的衍射特性[J].光学学报,2021,41(5):0526001.
- [15] DRAGONE C. Efficient N×N star couplers using Fourier optics [J]. Journal of Lightwave Technology, 1989, 7(3): 479-489.

- [16] QIU Liang, DING Zhu, YANG Xianglin. The theoretical study and design of $N \times N$ dielectric slab star coupler [J]. Journal of Microwave, 1997, 13(4): 307-313, 326.
邱亮, 丁竹, 杨祥林. $N \times N$ 星形平板介质光波导耦合器的理论与设计 [J]. 微波学报, 1997, 13(4): 307-313, 326.
- [17] GUO Fuyuan, WANG Minghua. Coupling characteristics of star waveguide coupler [J]. Acta Optica Sinica, 2006, 26(12): 1797-1802.
郭福源, 王明华. 星形光波导耦合器的耦合特性分析 [J]. 光学学报, 2006, 26(12): 1797-1802.
- [18] LI Yu, LI Peng, WU Dongjing, et al. Tightly focusing property of off-axial vector beams [J]. Acta Photonica Sinica, 2020, 49(4): 0426002.
李渝, 李鹏, 吴东京, 等. 离轴矢量光束的紧聚焦特性 [J]. 光子学报, 2020, 49(4): 0426002.
- [19] ZHANG Ruili, CHEN Ziyang, PU Jixiong. Radiation forces on a rayleigh particle by highly focused hybridly polarized vector beams [J]. Acta Photonica Sinica, 2015, 44(2): 0214004.
张瑞丽, 陈子阳, 蒲继雄. 强聚焦混合偏振矢量光束在瑞利粒子上产生的辐射力 [J]. 光子学报, 2015, 44(2): 0214004.
- [20] CHEN Jun. Optical electromagnetic theory [M]. Beijing: Science Press, 2005: 1-74.
陈军. 光学电磁理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2005: 1-74.
- [21] WU Dazheng, ZHANG Yongrui, WANG Songlin, et al. Analysis of signals and linear systems (4th edition) [M]. Beijing: Higher Education Press, 2005: 171-182.
吴大正, 张永瑞, 王松林, 等. 信号与线性系统分析(第四版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005: 171-182.

Scale Transformation Properties of Small Light Fields with Flat Wave Front

GUO Fuyuan, LI Lianhuang, ZHENG Hua

(Key Laboratory of Optoelectronic Science and Technology for Medicine of Ministry of Education, Fujian Provincial Key Laboratory of Photonic Technology, Institute of Laser & Optoelectronics Technology, College of Photonic and Electronic Engineering, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China)

Abstract: In the optical system, the conjugate transformation of the light field between object and its image is a common transformation. Based on the paraxial approximation and the Fresnel diffraction theory, the relation of light field between the object plane and its conjugate image plane of lens is presented in the book of Introduction of Fourier Optics. It is consistent with the scale transformation of the geometric optics prediction. The sine condition is a requirement for lens which carries out a perfect image for the object with vertical axis facet in an optical system. It was demonstrated by Fermat's principle in the field of geometrical optics, but it could not be explained by the classical diffraction integral formulae in the non-paraxial field. As the law of conservation of radiant energy in the traveling wave field was underappreciated in the classical diffraction theory, the classical diffraction integral formulae have limitations. As the Huygens' principle and the law of conservation of radiation energy in traveling wave field were engaged for analyzing the diffraction process of the non-paraxial light field in the cylindrical coordinate system, it was presented that the rationality of the normalized inclination factor was expressed by the square root of the cosine of the inclination angle in the side of diffraction source for analyzing the far field characteristics what diffracted from small light fields with flat wave front, and it was presented that the rationality of the normalized inclination factor was expressed by the square root of the cosine of the inclination angle in the observation side for analyzing the characteristics of the light field in the focal plane what diffracted from convergent hemispherical wave front also. Based on the normalized inclination factor expressed by the square root of the cosine of inclination angle, the non-paraxial integral formulas for analyzing the far-field characteristics of the diffraction source with the symmetric small flat wave front and the focal plane field characteristics of the diffraction source with the symmetric convergent wave front are suggested in the rectangular coordinate system respectively. As the light field of the diffraction source is a symmetric traveling wave field, and the Parseval's theorem and the calculation formula of the total power of the light field on the reference surface are employed, the total power of the light field on the observation reference surface which was expressed by the new normalized inclination factor equal to the total power of the light field on the diffraction source

reference. It satisfies the law of conservation of energy. So the new normalized inclination factor is reasonable. As the Huygens' principle is engaged for analyzing the diffraction process of the symmetric traveling wave field, both the diffraction source reference surface and the observation reference surface coincide with the light wave fronts. The diffraction source reference surface is a small flat wave front, and the observation reference surface is a hemispherical wave front for analyzing the far field characteristics what diffracted from small light fields with a flat wave front. The diffraction source reference surface is a hemispherical wave front, and the observation reference surface is a small flat wave front for analyzing the characteristics of the light field in the focal plane what diffracted from the convergent hemispherical wave front. These two diffraction processes are the process of exchanging the diffraction source reference surface and the observation reference surface. If the diffraction source reference surface and the observation reference surface were reciprocated, the expression function of the traveling wave field of symmetric diffraction source and the expression function of the traveling wave field of observation surface in two diffraction integral formulae are reciprocated, and the functions of two inclination factors in two diffraction integral formulae are reciprocated also. Then, the reciprocity between the non-paraxial diffraction integral formula used to calculate the far field distribution of light wave what diffracted from symmetric small traveling wave field with a flat wave and the non-paraxial diffraction integral formula used to calculate the light field distribution of focal plane what diffracted from symmetric traveling wave field hemispherical wave front is clarified. As the normalized inclination factor of diffraction source side expressed by the square root of the cosine of inclination angle of diffraction source side and the normalized inclination factor of observation side expressed by the square root of the cosine of inclination angle of observation side are engaged, and the apodization function of the lens on the normal of light wave front is taken into consideration. The scale transformation characteristic of traveling wave fields with flat wavefront between the object-image conjugate planes of the lens which satisfied the sine condition is verified, and the applicable conditions of the relationship of scale transformation are expounded.

Key words: Physical optics; Diffraction theory; Inclination factor; Reciprocity; Sine condition; Scale transformation

OCIS Codes: 260.1960; 260.2160; 070.7345