

引用格式: DAI Mengshi, LI Chongguang, LOU Yuli, et al. Analytical Expression of Gaussian Beam Converted by Axicon-lens System[J]. Acta Photonica Sinica, 2021, 50(7):0726001

代梦诗,李重光,楼宇丽,等. 高斯光束经轴锥镜-透镜系统变换后的解析描述[J]. 光子学报, 2021, 50(7):0726001

# 高斯光束经轴锥镜-透镜系统变换后的解析描述

代梦诗,李重光,楼宇丽,陈晓雪

(昆明理工大学 理学院 激光信息处理技术与应用重点实验室,昆明 650500)

**摘 要:**从夫琅禾费衍射积分公式出发,利用卷积定理和零阶汉克变换性质,推导出基横模高斯光束垂直入射轴锥镜-透镜组合光学系统后,在透镜后焦面上的光强分布解析描述公式,建立了环形结构光强度分布与轴锥镜-透镜组合中主要光学参数之间的数学关系,为环形结构光强度分布的快速模拟,以及生成环形结构光的光学系统设计提供理论支撑。根据所推导公式进行了数值模拟和实验验证,分别得到一均匀分布的环形结构光,且二者圆环大小相近,验证了理论结果的正确性。

**关键词:**高斯光束;轴锥镜-透镜组合;夫琅禾费衍射;解析描述;环形结构光

中图分类号:O436.1

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20215007.0726001

## Analytical Expression of Gaussian Beam Converted by Axicon-lens System

DAI Mengshi, LI Chongguang, LOU Yuli, CHEN Xiaoxue

(Key Laboratory of Laser Information Processing Technology and Application, College of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

**Abstract:** Based on Fraunhofer diffraction integral formula, using convolution theorem and the property of zero-order Hank transform, the analytical mathematical formula of light intensity distribution on the back focal plane of the lens after the fundamental transverse mode Gaussian beam perpendicularly enters the axicon-lens combination optical system is derived, and the mathematical relationship between the bottle beam intensity distribution and the main optical parameters in the axicon-lens combination is established, which provides theoretical support for the rapid simulation of bottle beam intensity distribution and the design of optical system for generating bottle beam. According to the derived formula, the numerical simulation and experiment are carried out, obtaining a uniformly distributed bottle beam with similar ring size, respectively, which verifies the correctness of the theoretical results.

**Key words:** Gaussian beam; Axicon-lens combination; Fraunhofer diffraction; Analytic expression; Bottle beam

**OCIS Codes:** 260.1960; 050.1960; 140.3560; 230.4040

## 0 引言

环形结构光是一种空心光束,它在传播方向上有着强度为零的区域,而在此区域外的三维空间都围绕着高光强<sup>[1]</sup>。由于其特殊的光强分布特性,环形结构光在诸多研究领域有着重要应用<sup>[2-8]</sup>。目前,实验上已有多种方法产生环形结构光,VINAS S等用全息法获得环形结构光<sup>[9]</sup>;AHLUWALIA B等利用两束贝塞尔

基金项目:国家自然科学基金(Nos. 61465005,61565011,61540075)

第一作者:代梦诗(1998-),女,硕士研究生,主要研究方向为激光信息处理及数字全息技术。Email:757470894@qq.com

导师:李重光(1966-),男,教授,博士,主要研究方向为激光信息处理及数字全息技术。Email:2544248546@qq.com

通讯作者:楼宇丽(1975-),女,教授,博士,主要研究方向为激光信息处理及数字全息技术。Email:578928841@qq.com

收稿日期:2021-01-06;录用日期:2021-03-08

<http://www.photon.ac.cn>

光束干涉得到环形结构光<sup>[10]</sup>。但这些方法中,实验装置往往过于复杂,产生的环形结构光稳定性较差,易受干扰。利用轴锥镜产生贝塞尔光束的方法,具有装置简单、转换效率高优点<sup>[11-12]</sup>,且产生的贝塞尔光束经过傅里叶变换透镜,可被整形为环形结构光<sup>[13]</sup>。

科研人员对环形结构光的分布进行了深入研究<sup>[14-15]</sup>。目前已报道的相关研究结果,绝大多数都用衍射积分去描述轴锥镜-透镜后方的光波场分布<sup>[16-19]</sup>,因积分结果无解析表达,所以只能用数值计算的方法来描述衍射场的分布,这对于轴锥镜-透镜后方光波场三维分布的准确、快捷描述十分不利。考虑到绝大多数实际应用中都以激光作为入射光束,因此获得一个简单的解析表达式来描述高斯光束通过轴锥镜-透镜变换之后的光场分布具有很好的理论研究价值。研究轴锥镜-透镜后方光波场的分布与轴锥镜、透镜几何光学参数之间的关系,对轴锥镜的设计、光路的搭建都具有很好的理论指导意义。

## 1 高斯光束通过轴锥镜的解析描述

轴锥镜是一种典型的非球面光学元件,具有圆锥形回转对称结构,可以实现对光束的线性聚焦。图1给出了轴锥镜-透镜系统在子午截面内的光路示意图,图中 $R$ 为轴锥镜的通光半径, $\beta$ 为锥底角, $\omega$ 为激光束到达轴锥镜前表面时的高斯光斑半径, $n$ 为轴锥镜的材料折射率, $f$ 为透镜焦距。

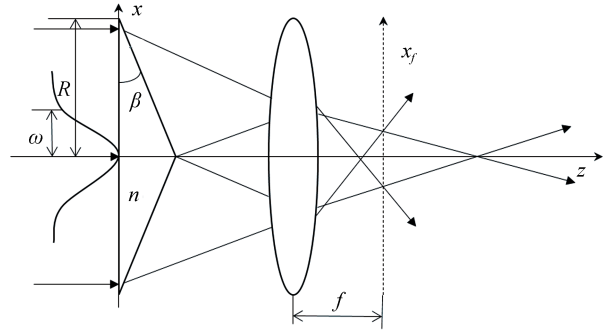


图1 高斯光束通过轴锥镜-透镜系统的子午截面几何光路示意图

Fig.1 Geometrical schematic in meridional plane for Gaussian beam passing through axicon-lens combination

为便于分析轴锥镜后方的光波场分布,以光轴为 $z$ 轴,设轴锥镜前表面为直角坐标系的 $xy$ 平面,透镜后焦面为 $x_f y_f$ 平面,则高斯光束在轴锥镜前表面的光波复振幅可写为<sup>[20]</sup>

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2P_0}{\pi\omega^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2}\right) \quad (1)$$

式中, $\lambda$ 为激光波长, $j = \sqrt{-1}$ , $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , $P_0$ 为激光器输出功率, $\omega$ 为高斯光束半径。

忽略轴锥镜中心厚度,在傍轴近似下,轴锥镜的复振幅透过率函数为

$$t(x, y) = \begin{cases} \exp\left[-jk(n-1)\beta\sqrt{x^2 + y^2}\right] & \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \\ 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > R \end{cases} \quad (2)$$

当激光束的高斯半径远小于轴锥镜的通光半径( $\omega \ll R$ )时,可以忽略孔径限制的影响,记 $\sqrt{\frac{2P_0}{\pi\omega^2}} = A_0$ ,以轴锥镜后表面为研究起点,令 $z = 0$ ,于是轴锥镜后表面上的光波复振幅可写为

$$u(x, y, 0) = A_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2}\right) \exp\left[-jk(n-1)\beta\sqrt{x^2 + y^2}\right] \quad (3)$$

直角坐标系下的夫琅禾费衍射公式为

$$u(x_f, y_f, z) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left(jk\frac{x_f^2 + y_f^2}{2z}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} u(x, y, 0) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(xx_f + yy_f)\right] dx dy \quad (4)$$

若在透镜后焦面观察,即令 $z = f$ ,可将后焦面上的衍射场看作轴锥镜后表面上光波复振幅的夫琅禾费衍射场,即将式(3)代入式(4)可得

$$u(x_f, y_f, f) = \frac{A_0 \exp(jkf)}{j\lambda f} \exp\left(jk\frac{x_f^2 + y_f^2}{2f}\right) \iint_0^{\infty} \iint_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2}\right) \exp\left[-jk(n-1)\beta\sqrt{x^2 + y^2}\right] \exp\left[-j2\pi\left(\frac{x_f}{\lambda f}x + \frac{y_f}{\lambda f}y\right)\right] dx dy \quad (5)$$

令  $c = \frac{A_0 \exp(jkf)}{j\lambda f} \exp\left(jk \frac{x_f^2 + y_f^2}{2f}\right)$ , 式(4)可简化为

$$u(x_f, y_f, f) = c \times F\left\{\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2}\right) \exp\left[-jk(n-1)\beta\sqrt{x^2 + y^2}\right]\right\} \quad (6)$$

式中,  $F\{\cdot\}$  为二维傅里叶变换。利用卷积定理可将式(6)简化为

$$u(x_f, y_f, f) = \frac{c\pi\lambda\omega^2}{(n-1)\beta} \exp\left\{-\pi^2\omega^2\left[\frac{\sqrt{x_f^2 + y_f^2}}{\lambda f} - \frac{(n-1)\beta}{\lambda}\right]^2\right\} \quad (7)$$

令  $c_1 = \frac{c\pi\lambda\omega^2}{(n-1)\beta}$ , 相应地, 高斯光束通过轴锥镜-透镜系统后在透镜后焦面上的光强分布为

$$I(x_f, y_f, f) = c_1^2 \exp\left\{-2\pi^2\omega^2\left[\frac{\sqrt{x_f^2 + y_f^2}}{\lambda f} - \frac{(n-1)\beta}{\lambda}\right]^2\right\} \quad (8)$$

## 2 数值模拟与实验验证

### 2.1 数值模拟

根据式(8), 用MATLAB进行数值模拟, 给出高斯光束垂直照射轴锥镜-透镜系统后, 在透镜后焦面上的衍射强度分布结果。数值模拟中用到参数为: 激光波长  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ , 折射率  $n = 1.5$ , 高斯光束光斑半径  $\omega = 0.2 \text{ mm}$ , 透镜焦距  $f = 50 \text{ mm}$ 。图2分别给出了轴锥镜底角  $\beta = 1^\circ$ 、 $\beta = 2^\circ$  和  $\beta = 3^\circ$  时透镜后焦面上的二

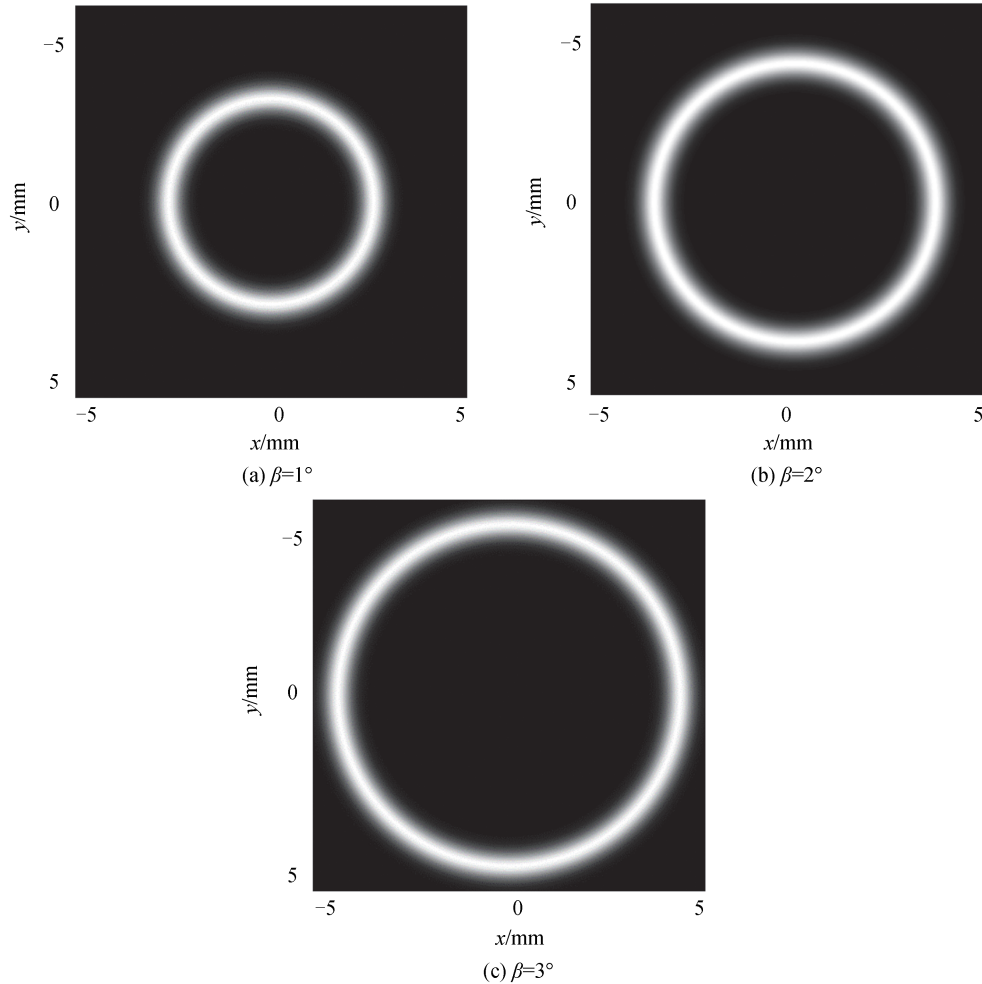


图2 高斯光束经轴锥镜-透镜系统变换后在后焦面的光强分布  
Fig.2 Light intensity distribution in focal plane of Gaussian beam after converted by axicon-lens combination.

维光强分布。从图中可看出,环半径随轴锥镜底角的增大而增大。

## 2.2 实验验证

为验证理论推导及数值模拟的正确性,搭建如图3所示的实验光路。所用激光器为632.8 nm的He-Ne激光器,轴锥镜的底角为 $2^\circ$ ,折射率为1.5,通光半径为12 mm(远大于轴锥镜前表面的高斯光斑半径),且离激光器100 mm,透镜焦距为50 mm。激光器发射的激光束经可调节衰减器的中性密度滤光片(Neutral Density Filter, ND)衰减后垂直照射轴锥镜,在距离轴锥镜较近的地方放置透镜,在其后方50 mm处由CCD摄像机进行采样,即可获得焦平面上的衍射强度分布图。

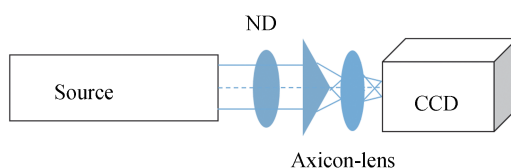


图3 高斯光束经轴锥镜-透镜系统的衍射实验光路布置图

Fig.3 Experimental configuration for Gaussian beam diffraction passing through axicon-lens combination

图4(a)、(b)分别为透镜后焦面处实验采集的光强分布及其径向上的分布曲线,图4(c)、(d)分别为相同实验条件下( $\beta=2^\circ$ )MATLAB数值模拟的二维光强分布和其径向上的分布曲线。实验中使用的是像素节距为 $5.2\ \mu\text{m}$ 、像素尺寸为 $1280 \times 1024$ 的CCD,因此图4(a)表达的实际尺寸约为 $6.7\ \text{mm} \times 5.3\ \text{mm}$ 。

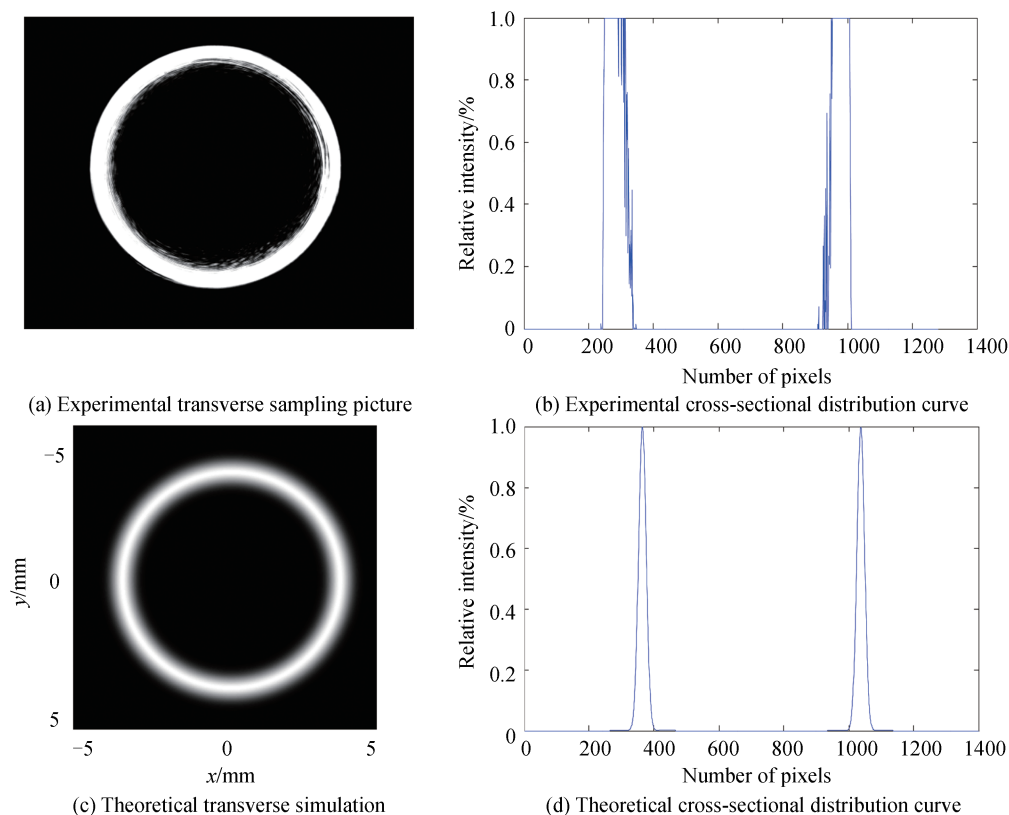


图4 透镜后焦面处的横截面采样图及其分布曲线

Fig.4 Transverse sampling distribution and cross-sectional curve at the back focal plane of the lens

对比图4(a)、(c),以及图4(b)、(d),可直观看出,根据理论公式模拟的结果与实际实验所得均为一圆环分布,且圆环大小较为接近,验证了理论结果的正确性。

从实验采样图片中还可以看出,环形结构光亮度分布不均匀,且有粗有细,这是由于He-Ne激光束的中心线与轴锥镜的光轴不严格重合造成的。另外,由单点金刚石车床加工出来的轴锥镜,为避免“崩边”,其锥

顶不可能是理想的“尖顶”,而是具有一定尺寸的圆弧顶或双曲面顶,这些都会影响环形结构光强度分布的均匀性。

### 3 结论

本文从光波衍射的角度出发,通过衍射积分公式研究了轴锥镜-透镜组合光学系统对高斯光束的变换。根据基横模高斯光束的解析描述,利用夫琅禾费衍射公式推导出高斯光束垂直入射条件下,透镜后焦面上的光强分布公式,建立了高斯光束参数、轴锥镜几何光学参数及透镜焦距,与透镜后焦面上环形结构光强度分布之间的简单数学关系。解析公式的获得,为环形结构光的快速和准确描述提供了数学依据,同时也为轴锥镜设计、参数选择和光路搭建提供了有益的帮助。最后,实际布置了高斯光束变换和测试光路,实验结果与理论模拟结果基本一致,初步验证了理论推导的正确性。

#### 参考文献

- [1] ARLT J, PADGETT M J. Generation of a beam with a dark focus surrounded by regions of higher intensity[J]. *Optics Letters*, 2000, 25(4): 191-193.
- [2] BAYRAKTAR M, EYYUBOGLU H T. Propagation properties of optical bottle beam in turbulence [J]. *Optical Engineering*, 2019, 58(3): 1-9.
- [3] HEUKE S, LEGESSE F B, AKIMOV D, et al. Bessel beam coherent anti-Stokes Raman scattering microscopy [J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2015, 32(9): 1773-1779.
- [4] MIKUTIS M, KUDRIUS T, SLEKYSI G, et al. High 90% efficiency Bragg gratings formed in fused silica by femtosecond Gauss-Bessel laser beams[J]. *Optical Materials Express*, 2013, 3(11):1862-1871.
- [5] MITRA S, CHANAL M, CLADY R, et al. Millijoule femtosecond micro-Bessel beams for ultra-high aspect ratio machining[J]. *Applied Optics*, 2015, 54(24): 7358-7365.
- [6] BHUYAN M, VELPULA P, COLOMBIER J, et al. Single-shot high aspect ratio bulk nanostructuring of fused silica using chirp-controlled ultrafast laser Bessel beams[J]. *Applied Physics Letters*, 2014, 104(2): 021107.
- [7] FACCIO D, RUBINO E, LOTTI A, et al. Nonlinear light-matter interaction with femtosecond high-angle Bessel beams [J]. *Physical Review A*, 2012, 85(3): 033829.
- [8] COUAIRON A, LOTTI A, PANAGIOTOPOULOS P, et al. Ultrashort laser pulse filamentation with Airy and Bessel beams[J]. *International Society for Optics and Photonics*, 2013: 87701E.
- [9] VINAS S, JAROSZEWIEZ Z, KOLODZIEJCZYK A, et al. Zone plates with black focal spots [J]. *Applied Optics*, 1992, 31(2): 192-198.
- [10] AHLUWALIA B, CHEONG W, YUAN X C, et al. Design and fabrication of a double-axicon for generation of tailorable self-imaged three-dimensional intensity voids[J]. *Optics Letters*, 2006, 31(7): 987-989.
- [11] CHENG Zhiming, WU Fengtie, FANG Xiang, et al. Multi-bottle beam generated by vaulted axicon[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(21):212-217.  
程治明, 吴逢铁, 方翔, 等. 圆顶轴棱锥产生多个局域空心光束[J]. *物理学报*, 2012, 61(21):212-217.
- [12] CHENG Zhiming, WU Fengtie, FANG Xiang, et al. Theory and experiment of generating multi-bottle beam with higher light-intensity gradient [J]. *Acta Optica Sinica*, 2012, 32(11):1114002.  
程治明, 吴逢铁, 方翔, 等. 产生多个高光强梯度局域空心光束的理论与实验[J]. *光学学报*, 2012, 32(11):1114002.
- [13] MCGLOIN D, DHOLAKIA K. Bessel beams: diffraction in a new light[J]. *Contemporary Physics*, 2005, 46(1):15-28.
- [14] WANG Suochen, WU Fengtie, ZHU Qingzhi. Numerical analysis and experiments of LED generating bottle beams[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2017, 46(6): 0626006.  
王硕琛, 吴逢铁, 朱清智. LED产生局域空心光束的数值分析与实验[J]. *红外与激光工程*, 2017, 46(6):0626006.
- [15] ZHANG Z, PENG Z, MATTHEW M, et al. Trapping aerosols with optical bottle arrays generated through a superposition of multiple Airy beams [J]. *Chinese Optics Letters*, 2013, 11(3):84-86.
- [16] SRINIVASA A, DEEPIKA Y, SAMANTA G K. Nonlinear frequency conversion of 3D optical bottle beams generated using a single axicon [J]. *Optics Letters*, 2020, 46(3): 657-660.
- [17] YANG Guiyang, MA Guolu, ZENG Guoying. Generation theory and experimental study of two stage non-diffracting beam [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2018, 47(7): 0708003.  
杨贵洋, 马国鹭, 曾国英. 双级无衍射光束的生成理论与实验研究[J]. *光子学报*, 2018, 47(7): 0708003.
- [18] YANG Guiyang, MA Guolu, ZENG Guoying. Influence of the surface deviation axicon on the propagation characteristics of non-diffracting beam [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2019, 48(1): 0126002.  
杨贵洋, 马国鹭, 曾国英. 轴棱锥透镜面形偏差对无衍射光束传播特性的影响[J]. *光子学报*, 2019, 48(1): 0126002.
- [19] GASKILL J D. Linear systems, Fourier transforms, and optics[M]. New York: John Wiley & Sons, 1978:320-333.
- [20] 陈家璧, 彭润玲. 激光原理及应用[M]. 3版. 北京: 电子工业出版社, 2013:57-60.