

引用格式: HUANG Jianheng, LIU Xin, LEI Yaohu, et al. Inverse Problem in Non-linear Partial Volume Effect[J]. Acta Photonica Sinica, 2021, 50(2):0211002

黄建衡,刘鑫,雷耀虎,等.非线性体效应的逆问题[J].光子学报,2021,50(2):0211002

非线性体效应的逆问题

黄建衡,刘鑫,雷耀虎,李冀,郭金川

(深圳大学 物理与光电工程学院,光电子器件与系统(教育部、广东省)重点实验室,广东 深圳 518060)

摘 要:非线性体效应在计算机断层扫描重构的理论与应用中,仍然是一个悬而未决的问题。本文利用优化重构算法来解决非线性体效应,建立了离散非线性 X 射线投影变换模型,将 X 射线投影变换的逆问题变为一个非凸的优化问题,通过裁剪原用于求解凸优化问题的一阶原对偶算法,提出非线性迭代重构算法来解决非凸问题。通过构建成像系统模型对算法的收敛性和重构精度进行了模拟验证,模拟中重建的图像首先通过检验在极窄的显示窗口中显示小于 1% 的对比度,然后使用相对于真实图像的差异的 l_2 范数进行定量分析。模拟结果表明,在计算精度范围内,非线性重构算法可以收敛到真实图像,而且对于图像衬度小于 1% 的细节,重构图像也可以显示出来。该研究结果可为设计有效补偿非线性体效应伪影的计算机断层扫描成像应用算法提供参考。

关键词:X 射线;计算机断层扫描;非线性;非凸;优化;迭代算法

中图分类号:O434.1

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20215002.0211002

Inverse Problem in Non-linear Partial Volume Effect

HUANG Jianheng, LIU Xin, LEI Yaohu, LI Ji, GUO Jinchuan

(Key Laboratory of Optoelectronic Devices and Systems of Ministry of Education and Guangdong Province, College of Physics and Optoelectronic Engineering, Shenzhen University, Shenzhen, Guangdong 518060, China)

Abstract: Non-linear partial volume effect is still an unsolved problem in the theory and application of computed tomography reconstruction. In this work, an optimization-based reconstruction algorithm for effectively solving this effect was studied and developed. The discrete non-linear X-ray projection transformation model was established, when the inverse problem of X-ray projection transformation was transformed into a non-convex optimization. A non-linear iterative reconstruction algorithm was formulated to solve the non-convex optimization problem by tailoring the first-order primal-dual algorithm developed originally for solving convex optimization problems. Using computer-simulation studies, the convergence and reconstruction accuracy of the algorithm was demonstrated in this investigation. Images reconstructed were examined first through visual inspection with extremely narrow display window for revealing a contrast level of less than 1%, and then assessed with quantitative metrics such as the normalized l_2 -norm of the difference relative to its truth images. The simulation results show that the non-linear reconstruction algorithm can converge to the real image within the range of calculation accuracy, and the reconstructed image can also be displayed for the details with image contrast less than 1%. This would provide a reference for the design of computed tomography imaging application algorithm which can effectively compensate the non-linear partial volume effect artifacts.

基金项目:国家自然科学基金(Nos. 61571305, 61101175, 62075141, 61405120, 61605119),深圳市基础研究项目基金(No. JCYJ20170302142617703),深圳大学教师科研启动项目基金(Nos. 2018041, 2017017)

第一作者:黄建衡(1985—),男,助理教授,博士,主要研究方向为 X 射线相衬成像和相位恢复算法。Email: xianhuangjianheng@163.com

通讯作者:刘鑫(1978—),男,讲师,博士,主要研究方向为 X 射线相衬成像方法和 CT 算法。Email: sblix@szu.edu.cn

收稿日期:2020-09-07;**录用日期:**2021-01-06

<http://www.photon.ac.cn>

Key words: X-ray; Computed tomography; Non-linear; Non-convex; Optimization; Iterative algorithm
OCIS Codes: 110.7440; 340.7440; 080.2720; 100.6950; 100.6955

0 引言

在实际的计算机断层扫描(Computed Tomography, CT)成像系统中,探测器像素或X射线光源焦斑都具有一定的面积,探测器单个像素所收集的X射线光子穿过物体的路径不是一条线,而是具有一定体积的三维体范围,在这个范围内的物体体元素内,物体的衰减系数不再是均匀的,而重构时,每一个体元素只能给出一个衰减值,这就会导致非线性体(Non-linear Partial Volume NLPV)效应^[1-4]。从数学方面考虑,一般X射线投影变换模型中,探测器强度分布同物体衰减系数分布是一个线性关系^[5],当考虑探测器或源焦斑面积时,以上关系不再是一个线性关系。此时,如果仍然使用基于线性关系探测模型进行重构,必然会产生NLPV效应伪影,这显然会降低CT图像的质量^[6-8]。先前有一些工作致力于解决NLPV伪影,但基于离散X射线投影变换模型消除NLPV伪影的理论及实践工作并没有涉及,本文尝试对其精确反演的算法进行了研究和模拟。

本文提出一种优化迭代重构算法用于解决离散非线性X射线投影变换。该算法中,将非线性X射线投影变换的逆变换设计成为一个优化问题,利用迭代算法解这个优化问题从而得到线性吸收系数的重构图像。由于离散的X射线投影变换同探测器图像强度分布是一个非线性关系,这会导致优化问题是一个非凸的函数。针对这一问题,将离散的X射线投影变换成像模型分解为两个部分,一个部分为线性部分,另一个为非线性部分。对线性部分,优化问题将是一个凸的,有很多迭代算法可以解决这个凸优化问题,例如利用尚柏勒-波克(Chambolle-Pock CP)算法来解决这个凸优化^[5,9-11],CP算法可以有效地解决光滑及非光滑的凸问题,并具有良好的鲁棒性。为解决非线性部分,本文在CP算法中增加非线性部分,从而消除NLPV伪影。

通过对CP算法的改进,本文给出数值模拟过程及结果,仿真的对象为具有复杂结构的FORBILD头骨模型。为了得到算法各项性能,文中定义了几种数据指标来反映算法的收敛及精度,并在计算的过程中记录这些指标,这些指标随迭代次数的变化反映了算法收敛及精度特性。模拟结果表明,所提出的迭代算法可以在数值上精确地重构具有NLPV效应的离散非线性X射线投影变换数据。为了表现所提出算法对噪声的抑制能力,探测器数据中加入泊松噪声,模拟计算表明,重构算法仍然能够有效地抑制NLPV伪影及噪声。

1 模型与方法

1.1 非线性模型

在实际的CT成像中,探测器像素和X射线焦点的大小会导致测量数据中的NLPV效应。如图1所示,图中给出了探测器一个像素区域(红色),将一个像素分为 3×3 的亚像素探测。首先建立一个通用的点光源成像探测系统作为离散X射线投影变换模型,模型中考虑探测器像素的大小。尽管建立的是点光源成像模型,但也可以将此数据模型应用到非空间相干的扩展源上。成像系统采用笛卡尔坐标系 (x, y, z) ,不同视角下投影平面坐标系为 (u, v) 。离散的物体模型定义在三维空间中,用一个长度为 M 的矢量 \mathbf{d} 来表示物体衰减系数分布, \mathbf{d} 的串联顺序为 x - y -和 z -轴, d_i 表示一个图像像素内的物体衰减系数值。同时,使用大小为 K 的向量 \mathbf{h} 来表示测量值,按照 u -和 v -轴和角度的顺序串联起来,元素 h_j 表示探测器的测量值。假设每个探测器像素会探测到 N 个从点源发出的射线, h_j 的离散的非线性

X射线投影变换可表示为

$$h_j(\mathbf{d}) = -\ln \frac{1}{N} \sum_{n_j=1}^N \exp\left(-\sum_{i=1}^M a_{n_j i} d_i\right) \quad (1)$$

式中, $a_{n_j i}$ 是射线 l 入射到探测器像素 j 在体素 i 中的长度, M 为上述物体衰减系数分布矢量 \mathbf{d} 的长度。将式(1)中的 h_j 做泰勒级数展开,得到

$$h_j(\mathbf{d}) = h_j(\bar{\mathbf{d}}) + \nabla_{\mathbf{d}} h_j(\bar{\mathbf{d}}) \cdot (\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}}) + \Delta h_j(\mathbf{d}) \quad (2)$$

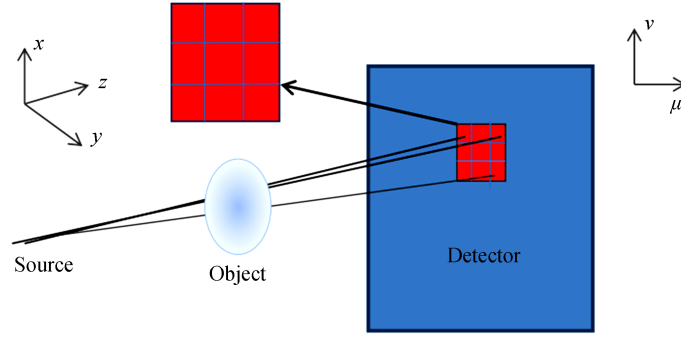


图1 点光源亚像素成像探测系统模型

Fig.1 Schematic drawing of the imaging system with sub-detector sampling

式中, \bar{d} 为级数展开中心,

$$\left. \frac{\partial h_j}{\partial d_i} \right|_{\bar{d}} = \frac{1}{N} \frac{\sum_n \exp\left(-\sum_{i=1}^M a_{n,i} \bar{d}_i\right) a_{n,i}}{\sum_{i=1}^M \exp\left(-\sum_n a_{n,i} \bar{d}_i\right)} \quad (3)$$

以及

$$\Delta h_j(d) = h_j(d) - h_j(\bar{d}) - \nabla_d h_j(\bar{d}) \cdot (d - \bar{d}) \quad (4)$$

当展开中心 $\bar{d}=0$ 时, 则有 $h_j(\bar{d})=0$ 。化简式(2)并写为矢量形式, 则有

$$h(d) = Wd + \Delta h(d) \quad (5)$$

式中, $\Delta h(d)$ 是一个长度为 M 的矢量, 其元素为 $\Delta h_j(d)$, W 是一个 $m \times k$ 的二维矩阵, 其单元

$$W_{mk} = \left. \frac{\partial d_j}{\partial h_i} \right|_{\bar{h}} = \frac{\sum_{n_j=1}^N a_{n_j,i}}{N} \quad (6)$$

由式(5)可知, 数据 $h(d)$ 可分解为线性部分 Wd 及非线性部分 $\Delta h(d)$ 。

1.2 优化问题

用 h_c 记为测量数据, 为了从 h_c 中恢复物体衰减系数的分布图像 d , 构建以下优化问题

$$h^* = \arg_{\min} D(h(d); h_c) \quad \text{s.t. } \|d\|_{\text{TV}} \leq t_1 \text{ and } d_i \geq 0 \quad (7)$$

式中, $D(h(d); h_c)$ 为模型数据同测量数据之间的距离, $\|d\|_{\text{TV}}$ 为图像全变总分 (Total Variation, TV), $\|d\|_{\text{TV}} \leq t_1$ 为图像 TV 的约束参数, $d_i \geq 0$ 是图像值为非负的约束条件。

不失一般性, 将 $D(h(d); h_c)$ 定义为图像距离的二范数, 即

$$D(h(d); h_c) = \|h(d) - h_c\|_2 = \|Wd - \Delta h(d) - h_c\|_2 \quad (8)$$

正是非线性项 $\Delta h(d)$ 使得式(7)中的约束优化变为一个非凸的优化问题, 目前还未有可以完全求解式(7)中的非凸优化问题的算法。却有大量的算法可以有效精确地求解凸优化问题。这里首先对式(7)中的优化问题进行凸优化, 在凸优化算法中对非线性项进行非线性化补偿, 使凸优化算法可适用于非凸问题。

本文采用 CP 算法求解式(7)中的凸型优化问题。如果在式(7)中的非线性项可以被假定为已知或固定, 那么该式中的数据差就可以被假定为已知或固定。这样, 式(8)中的数据差则成为一个标准的二次方程形式, 该式中的优化问题就变成了一个 TV 和非负性约束的最小化问题, 这里称这种算法为-非凸 CP 算法 (Non-Convex CP NCCP)。

考虑非线性项补偿, 首先根据当前迭代的图像, 用式(4)估算非线性项, 即

$$\Delta h_m[d^{(n)}] = -\ln \frac{1}{N} \sum_n \left[\exp\left(-\sum_n a_{n,i} d_i^{(n)}\right) + \frac{1}{N} \sum_n a_{n,i} d_i^{(n)} \right] \quad (9)$$

利用测量数据 h_c 减去该非线性项则是非线性化补偿。

1.3 算法实现

在优化问题中, 引入两个参数 λ 和 $\nu^{[12]}$, 将式(7)写为

$$h^* = \arg_h \min D \left\{ \frac{1}{2} \lambda \|h(d) - d_c\|_2 + \delta_{\text{Diamond}(\nu t_1)}(\nu \nabla d|_{\text{MAG}}) + \delta_p(d) \right\} \quad (10)$$

其中指示函数定义为

$$\delta_p(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

$$\delta_{\text{Diamond}(\nu t_1)}(x) = \begin{cases} \|x\|_1 \leq t_1 \\ \|x\|_1 > t_1 \end{cases} \quad (12)$$

式中, λ 和 ν 是可调参数, 其值不会改变优化问题的解, 只会影响算法的路径和收敛效率。

NCCP算法的具体过程如下:

1) 输入

$$d_c, \lambda, \nu, t_1, \tau = 1/N, \theta = 1, n = 0$$

2) 初始化

$$d_0 = 0, p_0 = 0, q_0 = 0 \\ \bar{d}_0 = d_0, h_c$$

3) 重复

$$\begin{aligned} \bar{p} &\leftarrow p_n + \sigma W \bar{h}_n \\ p_{n+1} &\leftarrow \frac{\bar{p} - \sigma d_c}{1 + \sigma/\lambda} \\ q'_n &\leftarrow q_n + \sigma \nabla \bar{h}_n \\ p_{n+1} &\leftarrow q'_n - \sigma \frac{q'_n}{|q'_n|} \text{Project Onto } l_1 \text{ ball}_{\nu t_1} \left(\frac{q'_n}{\sigma} \right) \\ h_{n+1} &\leftarrow \text{pos} \left[h_n - \tau (W^T p_{n+1} + \nu \nabla^T q_{n+1}) \right] \\ \bar{h}_{n+1} &\leftarrow h_{n+1} + \theta (h_{n+1} - h_n) \\ h_{\text{LN}} &\leftarrow h_c - \Delta h (h_{n+1}) \\ n &\leftarrow n + 1 \end{aligned}$$

4) 判断是否收敛, 并输出。

2 仿真设计

首先对NCCP算法做验证性的模拟计算, 即在完全相同的条件下, 利用式(1)产生数据, 利用NCCP算法对探测数据进行重构, 检验算法是否能够将图像完全恢复。为了加快算法速度, 使用的模拟成像系统模型为离散扇束成像系统。若将投影矩阵改为三维投影, 该算法就可以直接适用于三维成像系统。

模拟中选择具有高低不同衬度的FORBILD头骨模型作为仿真物体(如图2), 该物体被分 512×512 个网格。光源到探测器及光源到物体旋转中心的距离分别为150 cm及100 cm, 物体旋转1 080个角度, 旋转范围为 $0 \sim 2\pi$; 设计线阵探测器像素个数为500, 像素大小为 $1.2 \text{ mm} \times 1.2 \text{ mm}$ 。数据产生时, 每个像素分为5个亚像素, 对应式(1)中的 $N=5$, 再利用式(1)得到探测数据。

基于CP算法中的收敛条件, 通过监测以下几个指标在迭代重构时的变化情况来分析算法特性。这些指标包括原始-对偶差距(primal-dual gap) $\text{cPD}(d_n)$, 归一化的TV距离 $D_{\text{TV}}(d_n)$, 归一化的图像距离 $D_d(d_n)$, 和归一化的数据距离 $D_h(d_n)$, 分别定义为

$$\text{cPD}(d_n) = \frac{\lambda}{2} \|W d_n - d_{\text{true}}\|_2^2 - \left[-\frac{1}{2\lambda} \|p_n\|^2 - d_{\text{LN}}^T p_n - \nu t_1 \left\| (|q_n|_{\text{MAG}}) \right\|_{\infty} \right] \quad (13)$$

$$D_{\text{TV}}(d_n) = \frac{\|d_n\|_{\text{TV}} - \|d_{\text{true}}\|_{\text{TV}}}{\|d_{\text{true}}\|_{\text{TV}}} \quad (14)$$

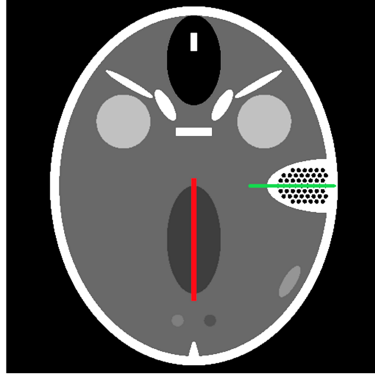


图2 FORBILD头骨模型,图像为 512×512 的离散网格模型

Fig.2 FORBILD phantom with high-contrast ear section, the digital phantoms are sampled on a 512×512 grid

$$D_d(d_n) = \frac{\|d_n\|_{TV} - \|d_{true}\|_2}{\|d_{true}\|_2} \quad (15)$$

$$D_h(d_n) = \frac{\|Wh_n - d_c\|_2}{\|d_c\|_2} \quad (16)$$

当迭代到足够的次数时 $n \rightarrow \infty$, 以上指标都能趋近于0, 这样就验证了NCCP算法的收敛性^[12-13]。

为了研究NCCP算法在不同条件下的特性,在采集数据 h_c 中人为加入噪声,再进行重构,并记录迭代时各项指标数据来检查算法的收敛特性。仿真的成像系统参数同模拟验证系统完全相同;加入的探测器噪声为泊松噪声,在正向投影时,探测器每个像素中加入 10^7 个噪声光子。

3 模拟结果

3.1 算法验证

由于在模拟计算中使用已知图像进行正向投影,图像的TV值 t_1 可以计算出来, $t_1 = 1170$, 在重构时将此值做为重构的约束条件。参数 λ 只影响算法收敛速率,经过多次模拟实验得到可选择 $\lambda = 1$ 。

图3是模拟计算得到FORBILD模型的重构图像,其中图3(a)为利用NCCP算法的重构结果,图3(b)和(c)利用滤波反投影(FBP)算法的重构结果。通过对比可以清楚地看出FBP算法重构图像中存在很多NLPV效应的伪影。图4(a)~(d)是NCCP算法各项指标的收敛曲线。模拟中得到在 10^5 次的迭代之后, NCCP算法各项指标都趋近于无限小。特别是对于归一化的图像距离,数值达到 10^{-5} , 重构图像同原始图像在视觉上完全没有区别, NLPV效应伪影在重构图中完全消失,由此验证了NCCP算法的有效性。

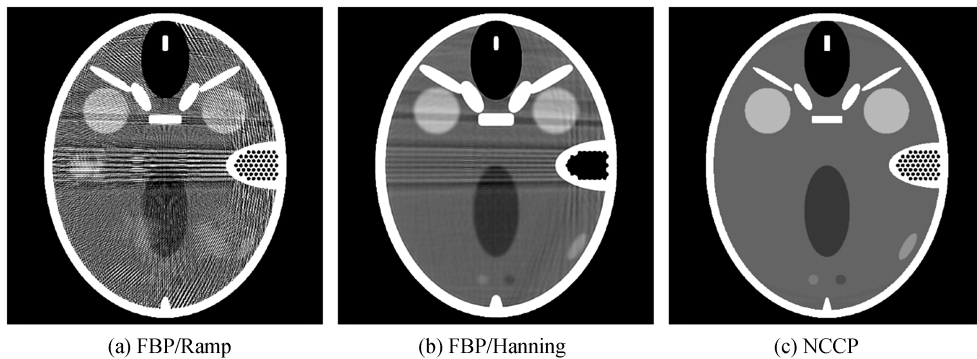


图3 FORBILD模型重构图像,所有图像显示物体衰减系数范围为 $[0.207, 0.215](\text{cm}^{-1})$

Fig.3 Reconstructed images from data generated with a discrete FORBILD head phantom. All images are displayed using the same displaying window of $[0.207, 0.215](\text{cm}^{-1})$

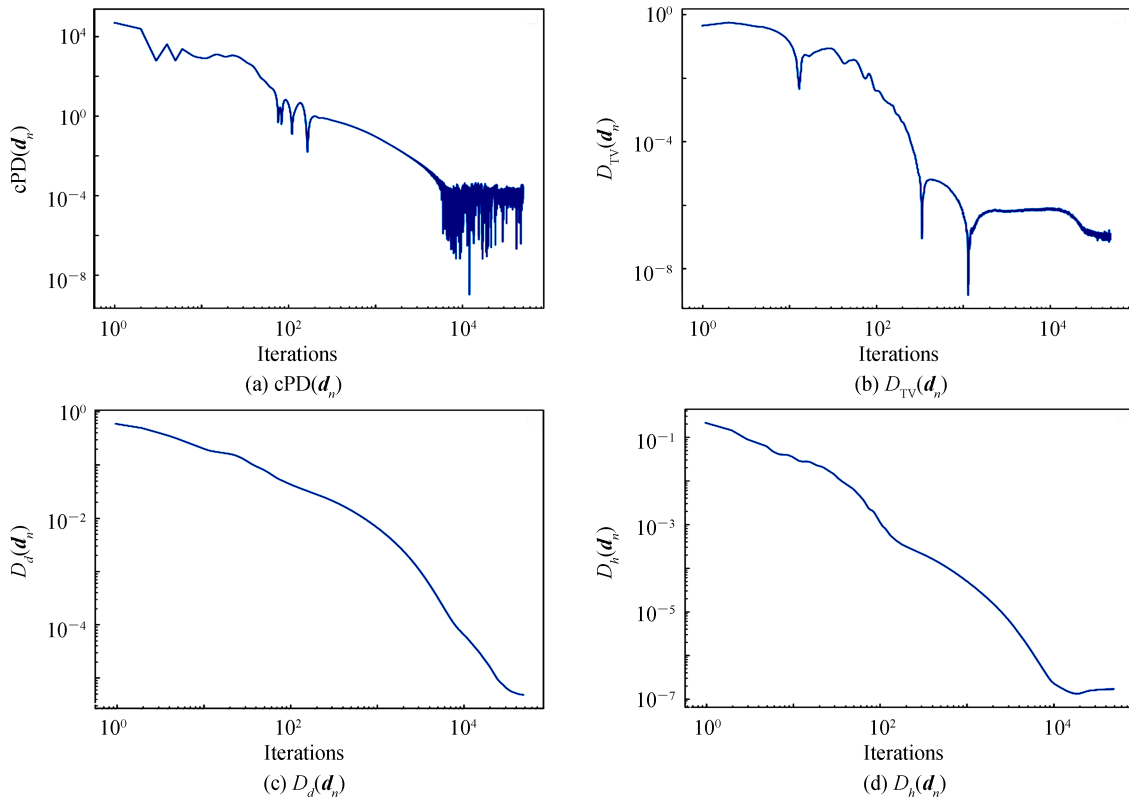


图4 $cPD(d_n)$ 、 $D_{TV}(d_n)$ 、 $D_d(d_n)$ 和 $D_h(d_n)$ 随迭代次数的变化曲线
Fig. 4 The curves of $cPD(d_n)$, $D_{TV}(d_n)$, $D_d(d_n)$ and $D_h(d_n)$ with the number of iterations

3.2 噪声特性

以上的模拟验证中,探测数据的产生及图像重构都是在完全相同的系统参数下进行,而在实际应用中是不可能做到的,所以有必要通过模拟在不同条件下的重构图像来探讨NCCP算法的特性。加入有噪声进行模拟重构时,适当调整图像的TV约束条件,为有效抑制噪声的同时尽可能较少图像信息损失,取 $t_1=1170 \times 95\%$ 。同时为与其它算法做对比,利用Ramp及Hanning滤波器的FBP算法进行了模拟重构。

图5是利用不同算法模拟得到含泊松噪声数据的FORBILD重构图像。从图5(c)中可以看到噪声对NCCP算法重构效果有一定影响,物体边界产生了一定的扭曲。但是对比图5(a)和(b)中FBP算法重构图像中出现大量的伪影,NCCP重构图像中并没有出现星状伪影。图6是NCCP重构及FBP重构图的剖面对比曲线图,剖面位置对应图2(a)中的红色竖线和绿色横线,分别为图像低衬度(对比度0.4%)及高衬度区域(对比度100%)。从曲线图中可以看到,使用Ramp滤波器FBP算法重构结果受到严重的伪影干扰,使用Hanning滤波器FBP算法的重构结果稍好,而NCCP算法重构结果几乎看不到伪影干扰,其对应曲线图中可

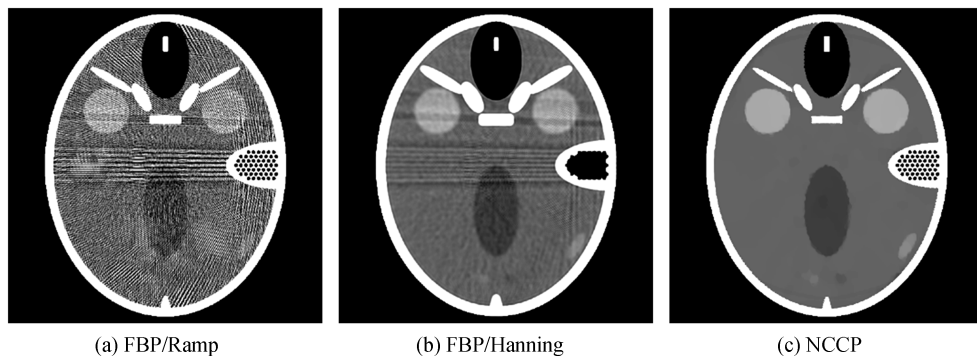


图5 含泊松噪声数据重构图像,所有图像显示物体衰减系数范围为 $[0.207, 0.215](\text{cm}^{-1})$

Fig. 5 Reconstructed images from poisson noisy data. All images are displayed using the same displaying window of $[0.207, 0.215](\text{cm}^{-1})$

以清晰看到低衬度区域物体边界变化(对比度0.4%),可见NCCP算法对于图像衬度小于1%的细节也可以重构出来。

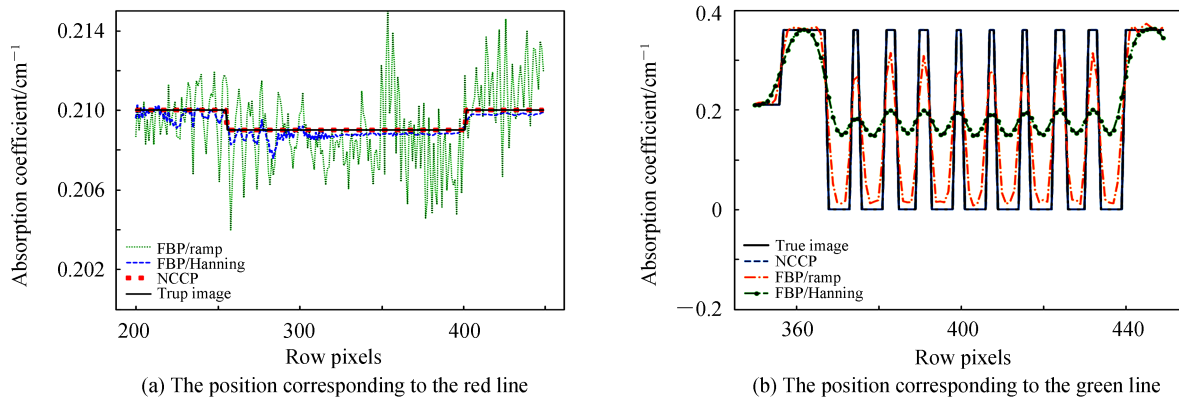


图6 含噪声数据重构剖面对应图2中不同位置的曲线图
Fig.6 Profile plots across the lines in Fig. 2 from reconstructed noisy images

4 结论

本文建立了离散X射线探测成像系统模型,利用CP算法解决成像系统模型中的线性问题,再用非凸优化函数来描述模型中上述非线性关系。并在此基础上提出一种改进算法—NCCP算法,使原本适用于线性问题的CP算法能够应用于非线性问题。仿真结果表明,NCCP算法能够有效地消除理想数据中的重构伪影,并收敛到真实数据;对加入噪声数据的情况也可以重构图像,并极大地抑制伪影。

本文针对NLPV效应问题,通过仿真设计和模拟计算验证了NCCP算法对消除或减少NLPV效应伪影的有效性,但该算法的有效性具有一定的条件。例如,模拟仿真中数据的产生和重构是一种离散-离散模型(Digital-Digital),即利用离散化模型产生离散化数据的模型。而实际成像系统中,物体是连续的,探测是离散化的,使用连续-离散模型更符合实际情况。其次,模拟仿真中正向投影产生时每个探测像素分为了5个亚像素,重构时也采用了5个亚像素,这种取值是否合理,取多少个亚像素才能逼近实际情况,还需要探讨。再次,本文构建模型时利用点源作为成像系统光源,这是一种比较理想的情况。当使用扩展源时,同样将光源离散化为多个点,在探测器的像素不考虑亚像素的情况下,每个像素都收集多个点源的光线,此时探测器探测模型与所提出探测模型是一致的,本文算法在使用扩展源时同样适用。但是,若进一步考虑使用连续扩展源的同时考虑探测器亚像素情况,该探测模型还不适用,需要进一步的研究。

参考文献

- [1] GLOVER G H, PELC N J. Nonlinear partial volume artifacts in x-ray computed tomography[J]. Medical Physics, 1980, 7(3):238-248.
- [2] JOSEPH P M, SPITAL R D. The exponential edge-gradient effect in X-ray computed tomography [J]. Physics in Medicine and Biology, 1981, 26(3): 473-487.
- [3] HEUSCHER D J, VEMBAR M. Reduced partial volume artifacts using spiral computed tomography and an integrating interpolator[J]. Medical Physics, 1999, 26(2): 276-286.
- [4] HSIEH J. Nonlinear partial volume artifact correction in helical CT [J]. IEEE Transactions on nuclear science, 1999, 46(3):743-747.
- [5] QIAO Zhiwei. The total variation constrained data divergence minimization model for image reconstruction and its chambolle-pock solving algorithm[J]. Acta Physica Sinica, 2018, 67(19):198701.
- [6] KEMERIN G J, LAMERS R J, THELISSEN G R, et al. The nonlinear partial volume effect and computed tomography densitometry of foam and lung[J]. Medical Physics, 1995, 22(9):1445-1450.
- [7] JUCIUS R A, KAMBIC G X. Measurements of computed tomography X-ray fields utilizing the partial volume effect[J]. Medical Physics, 1980, 7(4):379-382.
- [8] CHIVERTON J P, WELLS K. Volumetric partial volume quantification via a statistical model of 3-D voxel gradient magnitude[C]. In Nuclear Science Symposium Conference Record, 2004, 7:4106-4110.
- [9] CHEN B, ZHANG Z, SIDKY E Y, et al. Image reconstruction and scan configurations enabled by optimization-based

- algorithms in multispectral CT[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2017, 62:8763-8793.
- [10] CHEN B, ZHANG Z, XIA D, et al. Algorithm-enabled partial-angular-scan configurations for dual-energy CT [J]. *Medical Physics*, 2018, 45(5):1857-1870.
- [11] PAN X, CHEN B, SIDKY E Y, et al. Non-convex optimization-based reconstruction in multispectral CT[C]. *The Fifth International Conference on Image Formation in X-ray Computed Tomography*, 2018: 373-376.
- [12] SIDKY E Y, JØRGENSEN J H, PAN X. Convex optimization problem prototyping for image reconstruction in computed tomography[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2012, 57:3065-3091.
- [13] CHAMBOLLE A, POCK T. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2011, 40:120-145.