

引用格式: YANG Jun, HUANG Jianheng, GUO Jinchuan. Analysis of Phase Grating Imaging Based on Principal Diffraction Orders Algorithm[J]. Acta Photonica Sinica, 2021, 50(11):1105002

杨君, 黄建衡, 郭金川. 基于主级次分析法的相位光栅成像分析[J]. 光子学报, 2021, 50(11):1105002

基于主级次分析法的相位光栅成像分析

杨君, 黄建衡, 郭金川

(深圳大学 物理与光电工程学院, 广东 深圳 518060)

摘要:为了更好地理解相位光栅的成像过程,提出了一种新的分析方法——主级次分析法。主级次分析法分析相位光栅成像过程的关键思路在于找到相位光栅成像过程中起主要作用的衍射级次,忽略掉不重要的衍射级次,从而极大地简化了分析过程。主级次分析法的分析结果表明,对于占空比 50% 的 π 相位光栅,其在成像过程中起主要作用的是光栅的正负一级衍射,但正负三级衍射也是必不可少的。而对于占空比 50% 的 $\pi/2$ 相位光栅,其成像过程中零级衍射的作用和正负一级衍射的作用同样重要,零级衍射不是仅仅产生有害的背景光强。

关键词: X 射线相衬成像; X 射线暗场成像; 相位光栅; 分数 Talbot 阶; 对比度

中图分类号: O434.1

文献标识码: A

doi:10.3788/gzxb20215011.1105002

Analysis of Phase Grating Imaging Based on Principal Diffraction Orders Algorithm

YANG Jun, HUANG Jianheng, GUO Jinchuan

(College of Physics and Optoelectronic Engineering, Shenzhen University, Shenzhen, Guangdong 518060, China)

Abstract: In order to understand the process of phase grating imaging intuitively and deeply, a new analysis method was proposed, which is called as the Principal Diffraction Orders Analysis (PDOA). The key point of PDOA for analysing the imaging of the phase grating is focusing on the principal diffraction orders of phase grating, while ignoring the non-essential diffraction orders, which will greatly simplify the analysis of the phase grating imaging. The analysis result of PDOA indicates that for a π -phase shift grating with 50% duty cycle, the principal diffraction orders are ± 1 diffraction orders, but ± 3 diffraction orders are also necessary. And for a $\pi/2$ -phase shift grating with 50% duty cycle, the zeroth diffraction order is not merely creating annoying background radiation. It is as important as ± 1 diffraction orders of phase grating.

Key words: X-ray phase-contrast imaging; X-ray dark-field imaging; Phase grating; Fractional Talbot order; Visibility

OCIS Codes: 050.1950; 340.7440; 340.7450

0 引言

基于光栅的 X 射线相衬成像和暗场成像是探测 X 射线通过物体后的相位信息和散射信息的技术,近十年来获得了迅速的发展^[1-5]。X 射线相衬成像对于轻元素构成的物体,具有比吸收像更高的成像对比度^[6-8]。而 X 射线暗场成像,则在乳腺微钙化、肺部疾病诊断中表现出比吸收像更好的诊断效果^[9-12]。在基于光栅的 X 射线相衬成像和暗场成像中,相位光栅在分数 Talbot 阶处的成像条纹对比度决定了恢复出信号的

基金项目: 国家自然科学基金(Nos.11674232,62075141),广东省基础与应用基础研究基金(Nos.2019A1515011785,2021A1515010048)

第一作者: 杨君(1991-),男,博士研究生,主要研究方向为 X 射线相衬成像和暗场成像理论研究。Email:1006907716@qq.com

通讯作者: 郭金川(1964-),男,教授,博士,主要研究方向为 X 射线源、X 射线光栅的研制。Email:jcguo@szu.edu.cn

收稿日期:2021-06-15;录用日期:2021-07-19

<http://www.photon.ac.cn>

性噪比,相位光栅的成像性能决定了系统的性能。对相位光栅成像过程的分析有许多不同的方法,如1971年法国的GUIGAY J P^[13]利用光场的周期性和换元法将光栅在分数 Talbot 平面处的衍射场转换成了有限项的求和。1990年,德国的LOHMANN A W等^[14]巧妙地将物体的零级衍射和非零级衍射分开处理,获得了占空比为1/2的 $\pi/2$ 相位光栅和占空比为1/3的 $2\pi/3$ 相位光栅的分数 Talbot 阶,但该方法对于常用的占空比为1/2的 π 相位光栅并不适用。1993年,墨西哥的ARRIZON V等^[15-16]利用比较相位光栅傅里叶系数和衍射场系数的方式获得了三种不同占空比相位光栅六个位置的分数 Talbot 阶。1997年,美国的SULESKI T J^[17]则利用ARRIZON V等的方法获得了另外20种不同的分数 Talbot 阶。然而,上述方法都是针对平面波照明的情形,对于球面波照明的情形,上述方法则会变得特别复杂。2015年,AIMIN Yan等^[18]利用Wigner分布获得了相位光栅任意衍射级次对比度随光栅到探测器距离、光栅相位差和光谱的变化规律,但Wigner分布的引入加剧了计算的难度。本文提出的对相位光栅成像过程进行分析的主级次分析法,关键在于分析主要衍射级次之间干涉条纹的相互关系,极大化简了分析过程。

1 基本原理

一维相位光栅成像系统示意图如图1所示,一个发出波长为 λ 的单色点源S位于坐标系 $x_0o y_0$ 的原点,周期为 p_1 的一维相位光栅G1位于坐标系 $x_1o y_1$ 平面内,而探测器位于坐标系 $x_2o y_2$ 平面内。点源到相位光栅、相位光栅到探测器的距离分别为 z_1 和 z_2 。

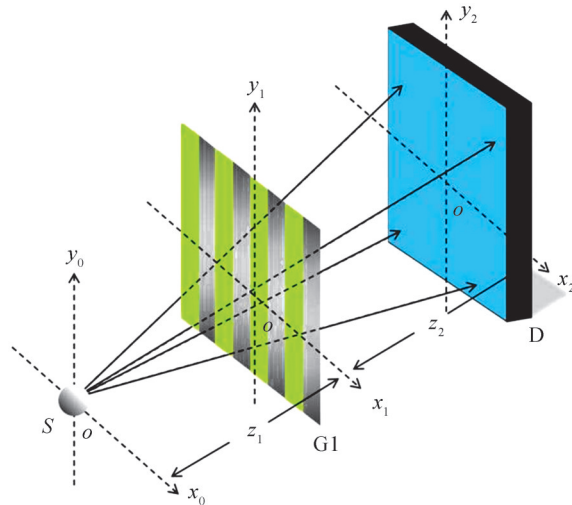


图1 单相位光栅成像系统示意图

Fig.1 Schematic of single phase grating imaging system

假定一维相位光栅的占空比为50%,其复振幅透过率为 $T_1(x_1)$,将其展开成傅里叶级数后可得

$$T_1(x_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp\left(j2\pi \frac{n}{p_1} x_1\right) \quad (1)$$

式中, a_n 为傅里叶系数, a_n 经计算可得

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + e^{j\phi}) & n = 0 \\ (e^{j\phi} - 1) \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} & n \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中, ϕ 为光栅的相位差。在相位光栅前表面的光场分布为

$$U_1(x_1) = \frac{A_1}{z_1} e^{jkz_1} = \frac{A_1 \exp(jkz_1)}{z_1} \exp\left(\frac{jk}{2z_1} x_1^2\right) \quad (3)$$

式中, $k = 2\pi/\lambda$, A_1 为距离光源单位距离处的光场振幅, r_1 为光源S到相位光栅平面上点的距离。光场经过

相位光栅后,在相位光栅后表面的光场分布变为

$$U_2(x_1) = U_1(x_1)T_1(x_1) \quad (4)$$

光场从相位光栅后表面到探测器平面经过了一次菲涅耳衍射,最终探测器平面内的光场分布为

$$U_3(x_2) = \frac{1}{\sqrt{j\lambda}} \int_{x_1=-\infty}^{+\infty} U_2(x_1) \frac{\exp(jkr_2)}{z_2} dx_1 \quad (5)$$

式中, r_2 为相位光栅平面上的点到探测器平面上点的距离,将式(1)、(3)和(4)代入式(5),经过计算和化简后有

$$U_3(x_2) = A_3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(-j\pi p n^2) \exp\left(j2\pi n \frac{x_2}{M_1 p_1}\right) \quad (6)$$

式中, A_3 为系数常数, p 为分数 Talbot 阶, M_1 为光栅的放大率,它们的表达式分别为

$$A_3 = \frac{A_1 \exp[jk(z_1 + z_2)]}{\sqrt{z_1 z_2 (z_1 + z_2)}} \exp\left[\frac{jkx_2^2}{2(z_1 + z_2)}\right] \quad (7)$$

$$p = \frac{\lambda z_2}{M_1 p_1^2} \quad (8)$$

$$M_1 = \frac{z_1 + z_2}{z_1} \quad (9)$$

为了简便起见,记 $c_n = a_n \exp(-j\pi p n^2) \exp\left(j2\pi n \frac{x_2}{M_1 p_1}\right)$,则式(6)可表示为

$$U_3(x_2) = A_3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \quad (10)$$

式(10)对应的光强在忽略掉常系数 A_3 后可写成

$$I(x_2) = U_3(x_2)U_3^*(x_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_n c_m^* \quad (11)$$

1.1 占空比 50% 的 π 相位光栅

当相位光栅为 π 相位光栅时,此时 $c_n c_m^*$ 可以展开成

$$c_n c_m^* = \frac{4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{nm\pi^2} \exp[j\pi p(m^2 - n^2)] \exp\left[j2\pi \frac{x_2}{M_1 p_1}(n - m)\right] \quad (12)$$

如果将 $c_n c_m^*$ 对应于一个有序的数组 (n, m) ,那么式(11)则包含了二维整数的集合。该集合具有明显的对称性,充分利用这种对称性,可以化简式(11)。 $c_n c_m^*$ 的对称项为

$$c_m c_n^* = \frac{4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{nm\pi^2} \exp[-j\pi p(m^2 - n^2)] \exp\left[-j2\pi \frac{x_2}{M_1 p_1}(n - m)\right] \quad (13)$$

式(12)和(13)恰好互为共轭,将它们相加后可得相位光栅的 n 级和 m 级衍射级次间的干涉条纹

$$c_n c_m^* + c_m c_n^* = \frac{8\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{nm\pi^2} \cos\left[2\pi \frac{x_2}{M_1 p_1}(n - m) + \pi p(m^2 - n^2)\right] \quad (14)$$

由于相位光栅的占空比为 50%,因此相位光栅的傅里叶系数 a_n 只能取奇数,不能取偶数。单相位光栅的自成像强度由于是周期性分布的,因此其强度分布可以展开成傅里叶级数的形式。而由傅里叶级数的特征可知,其基频项振幅最大,包含的能量最多(零频除外)。基频项的频率最小,决定了整个级数的频率,而高频项仅仅决定了级数的细节。因此,要求式(11)的光强周期,首先要考虑的就是找到其基频项。找到了基频项,条纹的周期也就确定了。

从式(14)可以很容易看出,当 $n - m$ 的绝对值和 nm 的绝对值最小时,式(14)即是基频项。图 2 给出了 n 和 m 几种可能的组合,当数组取 $(-1, 1)$ 时,即考虑正负一级衍射光之间的干涉时,其干涉条纹周期最大,振

幅也最大,此时式(14)变为

$$c_1 c_{-1}^* + c_{-1} c_1^* = \frac{8}{\pi^2} \cos\left(2\pi \frac{2x_2}{M_1 p_1}\right) \quad (15)$$

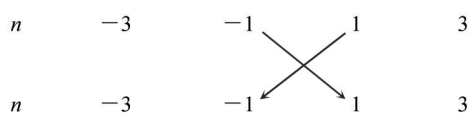


图2 n 和 m 的几种取值组合

Fig.2 The several combinations of n and m

由式(15)立即可得条纹的周期为

$$p_f = \frac{1}{2} M_1 p_1 \quad (16)$$

式(16)即是我们所熟知的占空比为 $50\% \pi$ 相位光栅的成像条纹周期。而对于 π 相位光栅成像条纹的对比度在什么位置取得最大值,即分数 Talbot 阶 p 的确定,则需要额外考虑相位光栅的正负三级衍射。 π 相位光栅正一级和正三级衍射之间、负一级和负三级衍射之间干涉产生的条纹分别为

$$c_1 c_3^* + c_3 c_1^* = \frac{8}{3\pi^2} \cos\left(2\pi \frac{2x_2}{M_1 p_1} - 8\pi p - \pi\right) \quad (17)$$

$$c_{-1} c_{-3}^* + c_{-3} c_{-1}^* = \frac{8}{3\pi^2} \cos\left(2\pi \frac{2x_2}{M_1 p_1} + 8\pi p + \pi\right) \quad (18)$$

式(17)、(18)与式(15)周期相同,但振幅和相位不同。为了让式(15)所代表的基频条纹的振幅能得到加强,式(17)、(18)应与式(15)同相或相差 2π 的整数倍,即

$$8\pi p + \pi = 2h_1 \pi \quad (19)$$

其中 $h_1 = 1, 2, 3, \dots$, 式(19)化简后可得

$$p = \frac{2h_1 - 1}{8} \quad (20)$$

式(20)即是我们所熟知的占空比为 $50\% \pi$ 相位光栅的分数 Talbot 阶^[2]。从以上的分析可以看出,对于占空比为 $50\% \pi$ 相位光栅,其主要的衍射级次为正负一级衍射,二者形成的干涉条纹周期最大、能量也最强,因此直接决定了最终的成像条纹周期。然而,仅仅考虑 π 相位光栅的正负一级衍射无法确定其分数 Talbot 阶,为了确定 π 相位光栅成像的分数 Talbot 阶,还需要考虑正三级衍射与正一级衍射之间、负三级衍射与负一级衍射之间干涉形成的条纹相位与基频条纹相位之间的关系。

1.2 占空比 50% 的 $\pi/2$ 相位光栅

当相位光栅为 $\pi/2$ 相位光栅时,此时傅里叶系数 a_n 为

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+j) & n=0 \\ (j-1) \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} & n \neq 0 \end{cases} \quad (21)$$

从式(21)可知,对于占空比为 50% 的 $\pi/2$ 相位光栅,零级系数不为零,而其它的偶级次系数都为零。因此,当 n 和 m 的其中一项取零时,式(14)应改写成

$$c_n c_0^* + c_0 c_n^* = 2 \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \cos\left(2\pi \frac{n}{M_1 p_1} x_2 - \pi p n^2 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (22)$$

当 $n = \pm 1$ 时,式(22)所代表的条纹振幅和周期取得最大值,零级和负一级衍射、零级和正一级衍射间干涉产生的条纹分别为

$$c_{-1} c_0^* + c_0 c_{-1}^* = \frac{2}{\pi} \cos\left(-2\pi \frac{x_2}{M_1 p_1} - \pi p + \frac{\pi}{2}\right) \quad (23)$$

$$c_1 c_0^* + c_0 c_1^* = \frac{2}{\pi} \cos\left(2\pi \frac{x_2}{M_1 p_1} - \pi p + \frac{\pi}{2}\right) \quad (24)$$

容易看出,式(23)和式(24)的条纹周期相同,都为

$$p_f = M_1 p_1 \quad (25)$$

从式(23)和(24)可知, $\pi/2$ 相位光栅的零级衍射参与形成了基频条纹,这说明零级衍射和正负一级衍射在相位光栅成像过程中同样重要。为了能让式(23)和式(24)所代表的条纹能够相互加强,二者的相位差应为 2π 的整数倍,即需满足条件

$$2\pi p - \pi = 2h_2 \pi \quad (26)$$

式中, $h_2=0,1,2,\dots$,式(26)化简后可得

$$p = \frac{2h_2 + 1}{2} \quad (27)$$

式(25)和(27)分别是我们所熟知的占空比 $50\%\pi/2$ 相位光栅的成像条纹周期和分数 Talbot 阶^[19-20]。与占空比 $50\%\pi$ 相位光栅不同的是,占空比 $50\%\pi/2$ 相位光栅的基频条纹有两条,二者间的相位关系直接决定了分数 Talbot 阶,而无需考虑更高级次衍射之间的干涉。另外,对于占空比 $50\%\pi/2$ 相位光栅而言,只有零级和正负一级衍射之间的干涉能产生周期为 $M_1 p_1$ 条纹,其它级次的衍射间干涉形成的条纹周期都比 $M_1 p_1$ 要小。

利用 Matlab 数值仿真来进一步说明占空比 $50\%\pi/2$ 相位光栅的零级衍射在成像过程中所具有的重要作用。X 射线管的电压为 40 kVp,其光谱分布如图 3(a)所示,平均能量为 25 keV。X 射线管的焦斑大小为 $5 \mu\text{m}$,相位光栅是周期为 $4.3 \mu\text{m}$ 的 $\pi/2$ 相位光栅。X 射线管到相位光栅、相位光栅到探测器的距离分别为 1.1061 m 和 0.2572 m。相位光栅成像条纹数值仿真结果如图 3(b)所示。

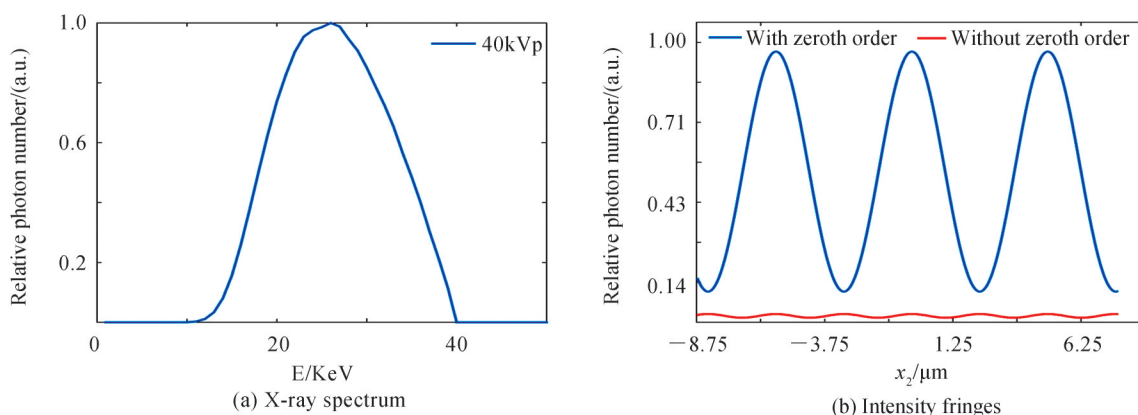


图3 仿真结果
Fig.3 Simulation results

图 3(b)中的蓝色曲线表示在仿真中,存在零级衍射时 $\pi/2$ 相位光栅的成像条纹,红色曲线表示消除了零级衍射后 $\pi/2$ 相位光栅的成像条纹。可以看出,在缺少零级衍射时,成像条纹对比度接近于零。而且,缺少零级衍射的成像条纹周期是拥有零级衍射条纹周期的一半,这是因为此时光栅的正负一级衍射起到了主要的作用。因此, $\pi/2$ 相位光栅的零级衍射在成像过程中是不可或缺的。对于占空比 $50\%\pi/2$ 相位光栅,其主要衍射级次为正负一级和零级衍射,三者之间形成的两条干涉条纹均为基频条纹,其周期决定了最终成像条纹周期,而两条基频条纹之间的相位关系决定了分数 Talbot 阶。

2 结论

在对相位光栅成像过程进行分析的众多传统方法中,其共同特点是对相位光栅的所有衍射级次都进行了考虑而不加以区分主次。而本文提出的主级次分析法与之最大的不同点在于,通过抓住相位光栅的主要衍射级次、忽略次要衍射级次,极大化简了分析过程。而衍射级次是否是主要级次,可以通过衍射级次之间

干涉产生的条纹周期和振幅是否最大来确定。主级次分析法对于相位光栅成像过程分析所具有的简明高效的特点,在对双相位光栅干涉仪进行分析时会体现地特别淋漓尽致,该内容将在另文中进行详细地介绍。对于其它占空比的相位光栅,例如占空比为 $1/3$ 和 $2/3$ 的相位光栅,主级次分析法同样适用。而对于任意占空比的相位光栅,主级次分析法给出的条纹对比度极大值位置与数值仿真结果有一定的偏差,其原因还需要进一步的分析。事实上,目前其他研究人员也无法获得任意占空比相位光栅成像条纹对比度的极大值位置,只能对某些特殊占空比的相位光栅进行分析。

综上所述,主级次分析法是对占空比为50%相位光栅的成像过程十分有效的分析方法,它将为分析任意占空比相位光栅成像过程提供新的分析思路,从而为设计成像条纹对比度更高的相位光栅提供理论指导和科学解释。

参考文献

- [1] MOMOSE A, KAWAMOTO S, KOYAMA I, et al. Demonstration of X-ray Talbot interferometry [J]. The Japan Society of Applied Physics, 2003, 42(7B): L866-L868.
- [2] PFEIFFER F, WEITKAMP T, BUNK O, et al. Phase retrieval and differential phase contrast imaging with low-brilliance X-ray sources [J]. Nature Physics, 2006, 2(4):258-261.
- [3] PFEIFFER F, BECH M, BUNK O, et al. Hard-X-ray dark-field imaging using a grating interferometer [J]. Nature Materials, 2008, 7(2):134-137.
- [4] DONATH T, CHABIOR M, PFEIFFER F, et al. Inverse geometry for grating-based x-ray phase-contrast imaging [J]. Journal of Applied physics, 2009, 106(5):054703.
- [5] BECH M, TAPFER A, VELROYEN A, et al. In-vivo dark-field and phase-contrast x-ray imaging [J]. Scientific Reports, 2013, 3:3209.
- [6] WILKINS S W, GUREYEV T E, GAO D, et al. Phase-contrast imaging using polychromatic hard X-rays [J]. Nature, 1996, 384(6607):335-338.
- [7] ZHU Peiping, ZHANG Kai, WANG Zhili, et al. Low-dose, simple, and fast grating-based X-ray phase-contrast imaging [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2010, 107(31):13576-13581.
- [8] SEIFERT M, LUDWIG V, GALLERSDORFER M, et al. Single-shot Talbot-Lau x-ray dark-field imaging of a porcine lung applying the moire imaging approach [J]. Physics in Medicine and Biology, 2018, 63(18):185010.
- [9] WANG Zhentian, HAUSER N, SINGER Gad, et al. Non-invasive classification of microcalcifications with phase-contrast X-ray mammograph [J]. Nature Communications, 2014, 5(3797):1-9.
- [11] SCHERER K, YAROSHENKO A, BOLUKBAS D A, et al. X-ray dark-field radiography - in-vivo diagnosis of lung cancer in mice [J]. Scientific Reports, 2017, 7(402):1-9.
- [12] FORTE S, WANG Z T, ARBOLEDA C, et al. Can grating interferometry-based mammography discriminate benign from malignant microcalcifications in fresh biopsy samples? [J]. European Journal of Radiology, 2020, 129:109077.
- [13] GUIGAY J P. On Fresnel diffraction by one-dimensional periodic objects, with application to structure determination of phase objects [J]. Optica Acta: International Journal of Optics, 1971, 18(9):677-682.
- [14] LOHMANN A W, THOMAS J A. Making an array illuminator based on the Talbot effect [J]. Applied Optics, 1990, 29(29):4337-4340.
- [15] ARRIZON V. Talbot array illuminators with binary phase gratings [J]. Optics Letters, 1993, 18(1):1-7.
- [16] ARRIZON V, CASTANEDA J O. Multilevel phase gratings for array illuminators [J]. Applied Optics, 1994, 33(25):5925-5931.
- [17] SULESKI T J. Generation of Lohmann images from binary-phase Talbot array illuminators [J]. Applied Optics, 1997, 36(20):4686-4691.
- [18] YAN Aimin, WU Xizeng. A general theory of interference fringes in x-ray phase grating imaging [J]. Medical Physics, 2015, 42(6):3036-3047.
- [19] MOMOSE A, KUWABARA H, YASHIRO W. X-ray phase imaging using Lau effect [J]. Applied Physics Express, 2011, 4(6):066603.
- [20] MOMOSE A, YASHIRO W, KIDO K, et al. X-ray phase imaging: from synchrotron to hospital [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A, 2014, 372(2010):20130023.