

引用格式:GAO Jian-dong, XIANG Hua-zhong, LI Nian-ning, *et al.* Influence of Weight Function on Progressive Addition Lens Design[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2020, 49(9):0922001.

高健东,项华中,李念宁,等. 权重函数对渐进镜片设计的影响[J]. 光子学报, 2020, 49(9):0922001.

## 权重函数对渐进镜片设计的影响

高健东<sup>1</sup>, 项华中<sup>1,3,4</sup>, 李念宁<sup>1</sup>, 王成<sup>1</sup>, 郑刚<sup>1,3</sup>, 庄松林<sup>2</sup>, 张大伟<sup>2,4</sup>

(1 上海理工大学 生物医学光学与视光学研究所, 教育部医用光学技术与仪器重点实验室, 上海 200093)

(2 上海理工大学 光电信息与计算机工程学院, 上海 200093)

(3 上海理工大学 上海市介入医疗器械工程研究中心, 上海 200093)

(4 上海理工大学 教育部光学仪器与系统工程研究中心, 上海 200093)

**摘 要:**为了研究权重分布函数对镜片设计的影响,在构建最小化模型的基础上,使用样条插值方法对过渡区域权重函数进行处理,设计了三组连接高权重区域和低权重区域的过渡区域变化快慢不同的权重分布函数.根据不同的权重分布函数设计了相应的渐进多焦点自由曲面镜片,并进行了仿真、加工及评价.实验结果表明权重分布矩阵对镜片光学性能有影响,曲面的平均曲率和主曲率差的过渡区域权重变化越快,镜片的光学性能越优.因此,使用过渡区域较快变化的权重函数有利于降低镜片周边像散、优化镜片光焦度和散光分布.

**关键词:**视光学;光学设计;渐进多焦点镜片;权重函数;自由曲面;像散;屈光度

中图分类号:TH74

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20204909.0922001

## Influence of Weight Function on Progressive Addition Lens Design

GAO Jian-dong<sup>1</sup>, XIANG Hua-zhong<sup>1,3,4</sup>, LI Nian-ning<sup>1</sup>, WANG Cheng<sup>1</sup>,  
ZHENG Gang<sup>1,3</sup>, ZHUANG Song-lin<sup>2</sup>, ZHANG Da-wei<sup>2,4</sup>

(1 *Engineering Research Center of Optic Instrument and System, Ministry of Education, Institute of Biomedical Optics and Optometry, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

(2 *School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

(3 *Shanghai Engineering Research Center of Interventional Medical Device, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

(4 *Engineering Research Center of Optical Instrument and System, Ministry of Education, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

**Abstract:** In order to study the influence of the weight distribution function on lens design, on the basis of constructing the minimization model, the spline interpolation method was used to process the weight function of the transition region, and three groups of weight distribution functions were designed to connect the high weight region and the low weight region. According to different weight distribution functions, the corresponding progressive addition lens was designed, and the simulation, machining and evaluation were carried out. The experimental results showed that the weight distribution matrix has an impact on the optical performance of the lens. The faster the weight changes in the transition region of

基金项目:国家自然科学基金青年科学基金(No.61605114)

第一作者:高健东(1996—),男,硕士研究生,主要研究方向为自由曲面设计与优化.Email:732872008@qq.com

导师(通讯作者):项华中(1986—),男,讲师,博士,主要研究方向为自由曲面镜片设计、光电测试技术、光学精密测量技术及医学光学与视光学等.Email:xiang3845242@163.com

收稿日期:2020-05-26;录用日期:2020-07-01

<http://www.photon.ac.cn>

the average curvature and the difference between the principal curvature of the surface, the better the optical performance of the lens. Therefore, using the weight function with fast change of transition region is beneficial to reduce the astigmatism around the lens and optimize the lens power and astigmatism distribution.

**Key words:** Optometry; Optical design; Progressive addition lens; Weight functions; Free surface; Astigmatism; Diopters

**OCIS Codes:** 220.1250; 220.2740; 220.4610; 330.4460

## 0 引言

渐进多焦点镜片(Progressive Addition Lens, PAL)是一种屈光度可以连续变化的镜片<sup>[1]</sup>,与单光镜片只在固定距离的视野成像不同,渐进镜片可以使从远到近不同距离的视野清晰成像.并且,相比于双光镜片等,它克服了视远区和视近区视野不连续的缺点,避免产生像跳现象,适用于眼睛调节能力较弱的老年人.由于其屈光度渐进变化的特点,有研究显示,渐进多焦点镜片对青少年近视防控也有一定作用,可减缓近视发展进程<sup>[2]</sup>.在应用过程中,渐进多焦点镜片需要根据配镜者眼睛的实际情况进行设计<sup>[3]</sup>.为了设计出满足使用要求的渐进镜片,出现了许多不同的设计、优化方法和检测方法<sup>[4-11]</sup>.目前,渐进镜片的设计方法主要有Winthrop方法,Steele方法,Loos等的变分方法等.WINTHROP J T等提出渐进镜片设计可以通过设计曲面平均曲率的分布直接计算镜片矢高面型,但是这种设计方法在减小散光通道长度时,周边像散会变大以致成像失真<sup>[12]</sup>.STEELE T等利用求解椭圆形偏微分方程的方法求解镜片矢高设计渐进镜片<sup>[13]</sup>.LOOS J等构造了一个镜片最小化模型,并使用变分方法求解此模型,使镜片设计完成后的平均曲率与主曲率差最逼近预设的平均曲率与主曲率差<sup>[14]</sup>.WANG J等在此最小化模型基础上使用了有限元<sup>[15]</sup>的方法进行求解,设计出了相应的自由曲面,并且指出需要进一步研究最小化模型中的权重函数设计<sup>[16]</sup>.JIANG W等在最小化模型的基础上给出了一种数值计算的方法,可以更高效地求解模型,设计自由曲面<sup>[17]</sup>.HSU W Y等在求解最小化模型的基础上,加入了曲面的B样条设计,设计出了渐进镜片并进行了加工<sup>[18]</sup>.以上研究表明,最小化模型方法在渐进镜片设计过程中有着重要作用.而自由曲面的平均曲率和主曲率差的权重分布函数又直接影响最小化模型的计算,进而影响设计镜片的光学性能.所以需要进一步研究.

为了研究连接高权重区域和低权重区域的过渡区域权重分布函数对最小化模型设计渐进多焦点镜片的影响,本文设计了三组过渡区域不同变化速度下的权重分布矩阵,在此基础上设计镜片,同时保证视远区、视近区和加光通道的权重位置和权重数值一致,周边区域的权重数值一致,并对其进行仿真.通过对比这三组权重矩阵过渡区域变化快慢对渐进镜片仿真结果的影响,分析了权重矩阵过渡区的不同变化速度下镜片光学性能的差别.根据设计结果加工镜片,使用测量仪器对镜片光学性能进行测量,对比仿真和测量结果,来验证权重分布函数对最小化模型设计渐进镜片的影响.

## 1 渐进镜片权重设计

### 1.1 最小化模型

如图1所示,渐变多焦点镜片一般分为四个区域,视远区、视近区、连接视远区和视近区的加光通道和周边区域<sup>[19]</sup>.

镜片的屈光度分布是根据镜片前后表面的矢高和折射率、厚度等综合计算得出,如式(1)所示<sup>[17]</sup>

$$P = (1 - n)P_b + \frac{(n - 1)P_f}{1 - d\left(1 - \frac{1}{n}\right)P_f} \quad (1)$$

式中, $P_b$ 是镜片后表面的平均曲率, $P_f$ 是镜片前表面的平均曲率,单位为 $m^{-1}$ ,用D表示; $d$ 为镜片的

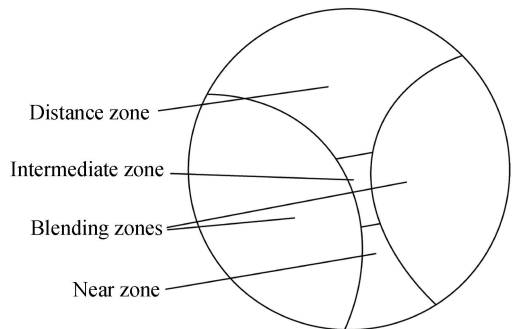


图1 渐进多焦点镜片示意图(视远区、视近区、加光通道和周边区域)

Fig.1 Progressive addition lens (Distance zone, Near zone, Intermediate zone, Blending zones)

厚度,单位为 m; $n$  为镜片材料的折射率.本文采用内渐进设计,实现镜片平均曲率的渐进变化.

为了设计符合球镜度要求和散光度要求的渐变多焦点镜片,LOOS J 等<sup>[14]</sup>构建了一个最小化数学模型

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left[ \boldsymbol{\alpha}(x, y) \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + \boldsymbol{\beta}(x, y) \left( \frac{k_1 + k_2}{2} - \mathbf{P}_0(x, y) \right)^2 \right] dA \quad (2)$$

式中, $\mathbf{u}$  是所设计的镜片曲面矢高表达, $\Omega$  是曲面的积分域, $k_1$  和  $k_2$  是曲面的两个主曲率,这两个主曲率都与曲面矢高有关. $\boldsymbol{\alpha}$  和  $\boldsymbol{\beta}$  是曲面的平均曲率和主曲率差的权重分布函数,用矩阵形式表示.矩阵  $\mathbf{P}_0$  为后表面平均曲率的分布. $J(\mathbf{u})$  为最小化函数.

对自由曲面离散化,使用间距为 1 mm 的  $N \times N$  个点来离散表示自由曲面.设置边界条件计算最小化模型<sup>[17]</sup>

$$\min J(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F(v_{ij}) \quad v_{1,1} = 0, v_{1,N} = 0, v_{N,1} = 0 \quad (3)$$

式中, $v_{ij}$  为变分量, $F(v_{ij})$  为  $J(\mathbf{u})$  离散后的变形,使用最小二乘法的求极值方法,从而获得离散点矢高数值解,如式(4)所示.

$$\frac{\partial J(\mathbf{u})}{\partial v_{ij}} = 0 \quad i \in [1, 2, \dots, N], j \in [1, 2, \dots, N] \quad (4)$$

## 1.2 权重函数过渡区域设计

权重函数  $\boldsymbol{\alpha}$  和  $\boldsymbol{\beta}$  并不方便使用具体的函数形式进行描述<sup>[20]</sup>,所以将其离散化后使用矩阵的形式描述,如式(5)所示.

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha} = f(x, y) = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1), f(x_1, y_2) & \cdots & f(x_1, y_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_N, y_1), f(x_N, y_2) & \cdots & f(x_N, y_N) \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\beta} = g(x, y) = \begin{pmatrix} g(x_1, y_1), g(x_1, y_2) & \cdots & g(x_1, y_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(x_N, y_1), g(x_N, y_2) & \cdots & g(x_N, y_N) \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (5)$$

离散后的权重函数  $\boldsymbol{\alpha}$  和  $\boldsymbol{\beta}$  可以使用图 2 所示的等高线图直观地描述.在计算过程中需要把它分为三个区域,即高权重区域,低权重区域和由高权重到低权重的过渡区域.高权重区域赋值较大,以保证目标区域平均曲率分布和主曲率差分布最符合最小化模型设计.低权重区域主要为周边像散区,赋值近似为 0,以使主曲率差较大位置分布于此.权重过渡区域是需要进行设计的区域.

本文通过使用二维插值的方法构建了三组不同权重过渡区域,以比较三组不同权重变化速度对渐进镜片设计结果的影响.通过增加权重过渡区域的大小来控制权重变化的程度.如图 3 所示,设计高权重区域分别左右间隔 6 mm、3 mm、0 mm 宽度的三组权重过渡区域.

要设计权重函数,首先需要对高权重区域和低权重区域进行赋值.对 6 mm 和 3 mm 宽度权重函数的过渡区域设计使用插值方法.对 0 mm 宽度权重函数设计时,由于过渡区域宽度为 0 mm,所以使用直接赋值的方法.通过逐行扫描权重函数矩阵,找到每一行的高权重区域,并分别在其左右间隔 6 mm、3 mm 范围内进行插值.插值过程使用双调和样条插值方法,最终获得三种不同的权重函数分布结果,如图 3 所示.图 3 中虚线圆代表直径为 60 mm 的镜片区域.

$\boldsymbol{\alpha}$  和  $\boldsymbol{\beta}$  权重函数分别使用图 3 中的三种分布进行实验,给定的权重函数分组如表 1 所示.

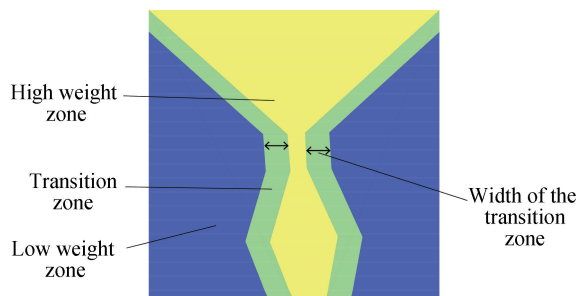


图 2 权重函数的区域划分,包括高权重区域,低权重区域,过渡区域

Fig.2 Zones of weight function, including high weight zone, low weight zone and transition zone

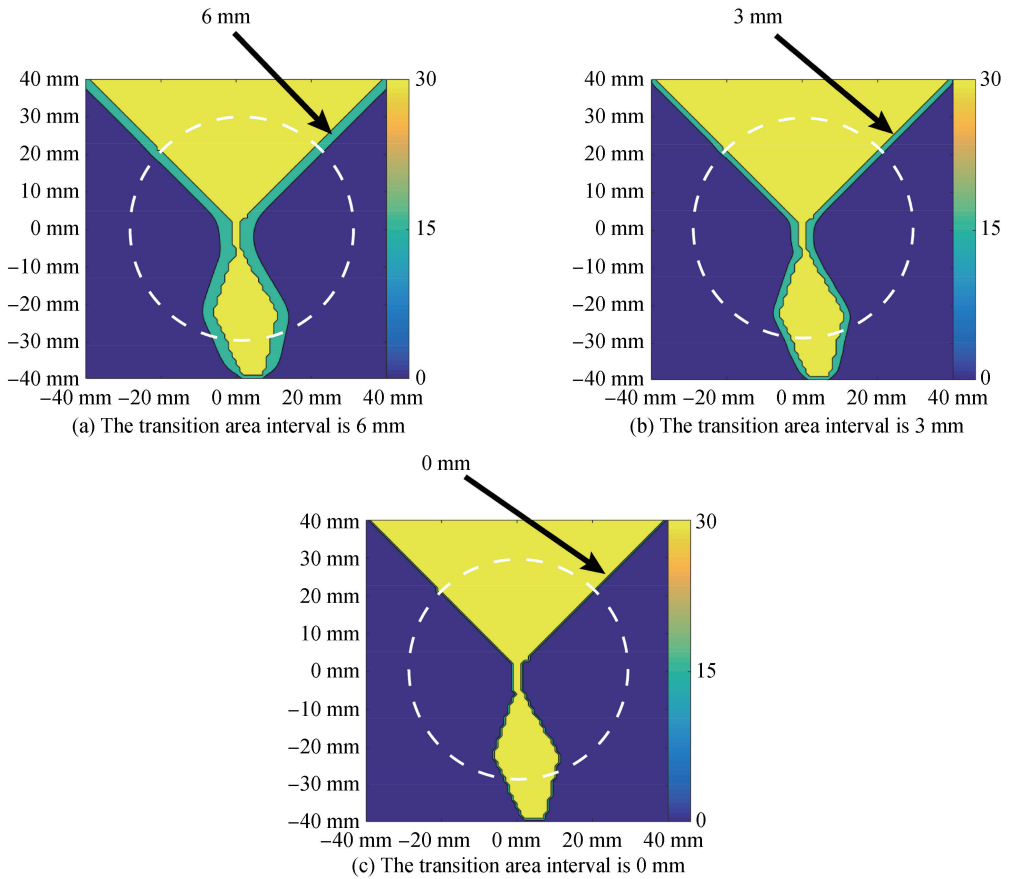


图3 三组不同权重函数分布

Fig.3 Three distributions of different weight functions

表1 不同过渡区域宽度的权重函数组合

Table 1 Combination of weight functions for different transition zone widths

Number of lens	Transition zone width of $\alpha$ /mm	Transition zone width of $\beta$ /mm
1	6	6
2	3	3
3	0	0

## 2 实验结果分析

为了说明权重函数对镜片光学性能的影响,选取了如表2所示的镜片基础参数进行设计。

表2 镜片基础参数

Table 2 Basic parameters of lens

Case	Distance Sph/D	Add/D	Distance Cyl/D	Index $n$	Front curvature radius $R^f$ /mm	Thickness $d$ /mm
Progressive addition lens	0	2.0	0	1.597	147.6	2.8

根据表2参数,给定某一屈光度分布之后,利用式(1)计算出平均曲率分布函数,用矩阵  $\mathbf{P}_0$  表示,平均曲率分布如图4所示.图中虚线圆代表直径为60 mm的镜片区域。

使用相同的  $\mathbf{P}_0$  和不同组的权重函数进行计算,从而获得相应的自由曲面.为了说明权重函数变化对自由曲面光学性能的影响,使用以色列 Roltex 公司根据莫尔偏折法设计的渐进多焦点镜片仿真软件(Free Form Verifier, FFV)进行仿真.仿真结果如图5所示,其中 Sph 表示等效球镜度,Add 表示加光度,Cyl 表示散光度,单位为  $\text{m}^{-1}$ ,用 D 表示.Axis 表示散光所在轴位,单位为  $(^\circ)$ .镜片直径为60 mm,球镜度变化间隔为0.25D.视远区和视近区的小圈分别代表(0 mm, 8 mm)处的视远点和(2 mm, -14 mm)处的视近点.图中黑

色直线分别从视远点和视近点出发,使用不规则扇形近似划分出镜片的视远区和视近区.其夹角大小可以表示人眼可视范围,并且根据视远点视近点坐标、直线长度和夹角可以计算出镜片视远区和视近区的面积,可视角度和面积结果保留一位小数.

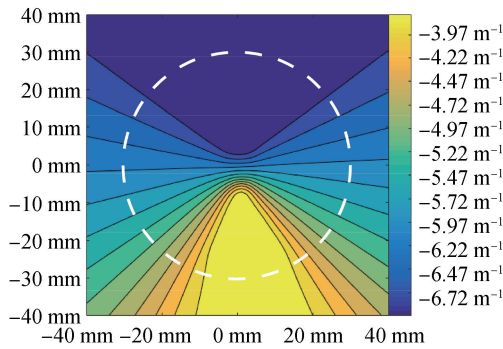


图4 平均曲率  $P_0$  的分布  
Fig.4 Distribution of mean curvature  $P_0$

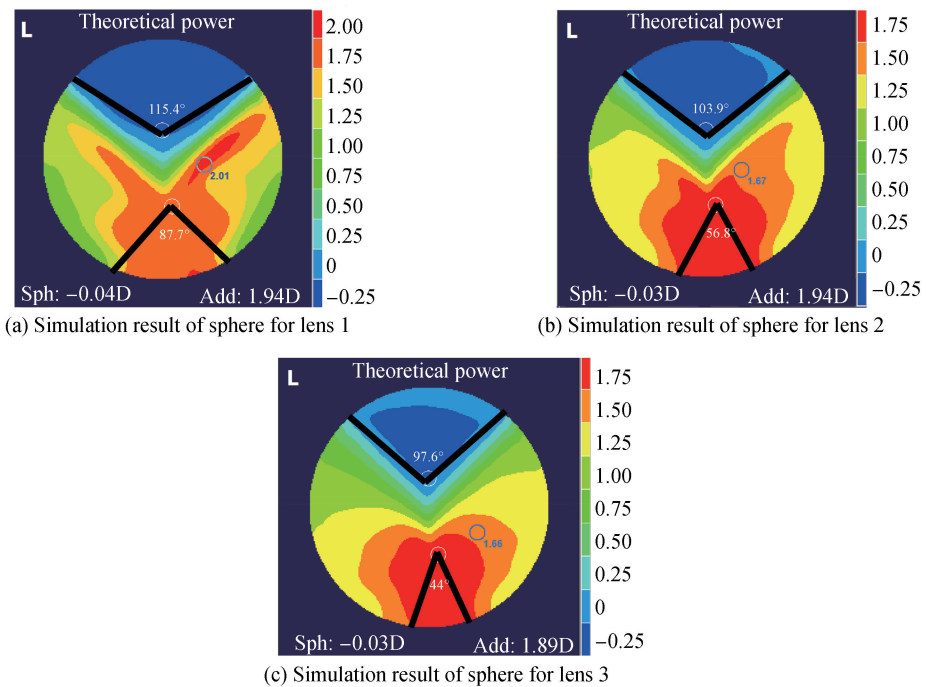


图5 镜片球镜度仿真结果  
Fig.5 Simulation results of lens sphere

从图5球镜度仿真结果可以发现,从镜片1到镜片3,随着权重函数过渡区域间隔减小,权重变化越快,视远区周边球镜度变化越慢.并且镜片从视远区到视近区的加光变化变慢,导致视近区可视角度从87.7°、56.8°到44.0°持续减小.同时,视远区的可视角度从115.4°、103.9°到97.6°不断减小.视远区等效球镜度分别为-0.04D, -0.03D和0.03D,与理论值最大相差0.04D.加光度分别为1.94D, 1.94D和1.89D,与理论值最大相差0.11D.

从图6散光度仿真结果可以看出,从镜片1到镜片3,镜片视远区面积从585.7 mm<sup>2</sup>、567.9 mm<sup>2</sup>到505.0 mm<sup>2</sup>,不断减小,视近区面积从290.4 mm<sup>2</sup>、182.6 mm<sup>2</sup>到137.8 mm<sup>2</sup>,连续减小,加光通道的宽度基本不变.散光从高权重区域到低权重区域变化减慢,并且从集中在通道两旁的位置逐渐分散在低权重的较大部分区域.镜片最大像散分别为-2.52D, -1.87D和-1.61D.视远区散光度分别为-0.13D, -0.06D和-0.06D,与理论值最大相差0.13D.

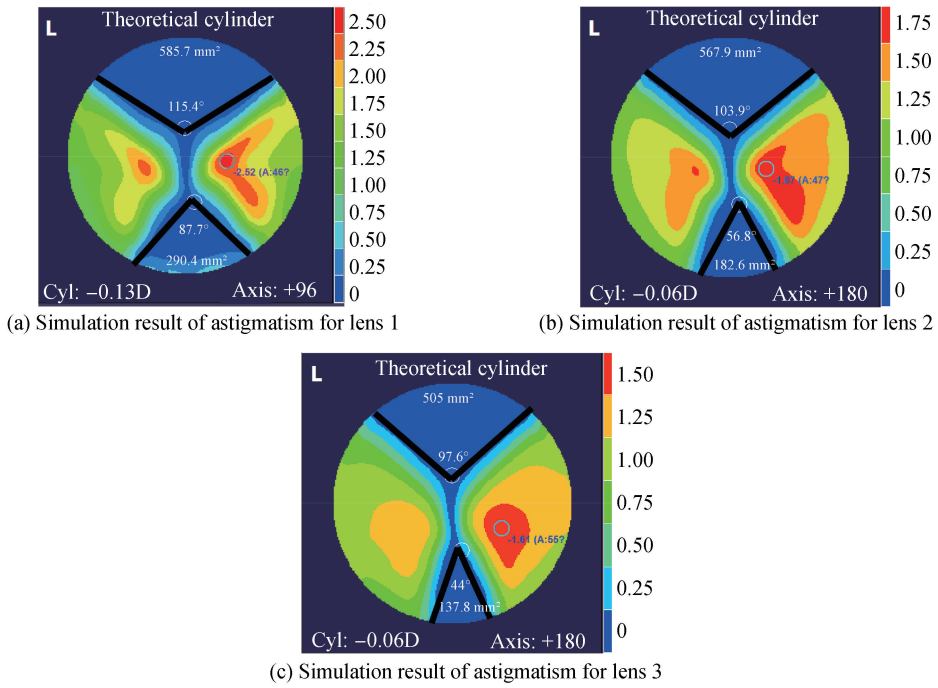


图6 镜片散光度仿真结果  
Fig.6 Simulation results of lens astigmatism

用自由曲面加工机床对三组镜片进行加工,每组加工1片,镜片直径为60 mm.用VM2000自由曲面检测仪器(明月镜片股份有限公司)测量了三组镜片,检测结果如图7和图8所示.

从图7可以发现,加工出的镜片的视近区可视角度从 $72.4^\circ$ 、 $57.6^\circ$ 到 $40.0^\circ$ 持续减小,镜片视近区周边球镜度变化更慢.镜片视远区的可视角度从 $112.2^\circ$ 、 $109.8^\circ$ 到 $99.5^\circ$ 逐渐减小.镜片视远区屈光度在0D左右,视近区球镜度在+2D左右,这些特点与仿真结果一致,并且加工镜片的球镜度分布与仿真结果基本一致.

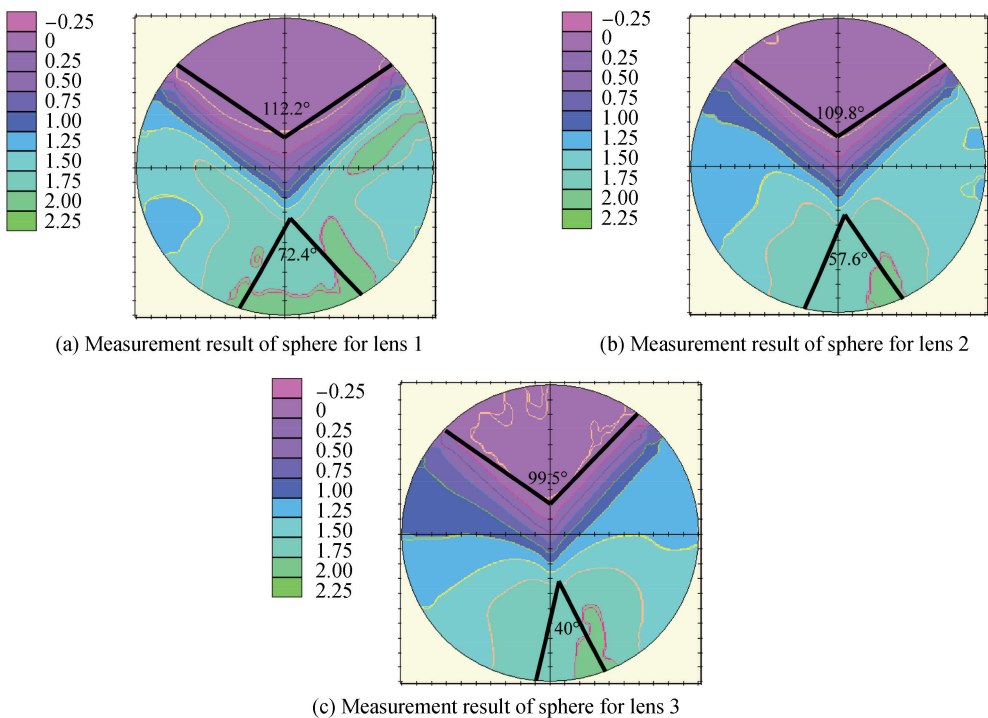


图7 镜片球镜度测量结果  
Fig.7 Measurement results of lens sphere

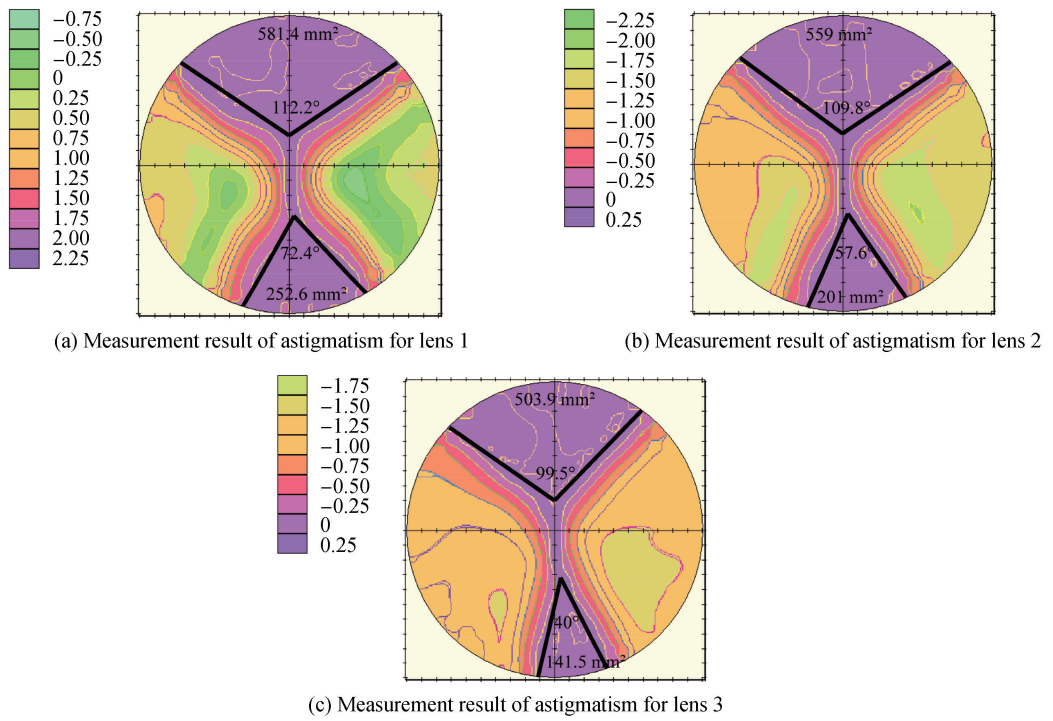


图 8 镜片散光度测量结果

Fig.8 Measurement results of lens astigmatism

从图 8 可以发现,镜片加光通道的宽度与设计值基本一致,镜片视远区面积从 581.4 mm<sup>2</sup>、559.0 mm<sup>2</sup>到 503.9 mm<sup>2</sup>,不断减小,视近区面积从 252.6 mm<sup>2</sup>、201.0 mm<sup>2</sup>到 141.5 mm<sup>2</sup>,逐渐减小,周边像散更集中于加光通道附近.镜片 1 最大周边像散约为 -2.75D,镜片 2 最大周边像散约为 -2.25D,镜片 3 最大周边像散约为 -1.75D,散光度的分布结果与仿真结果基本一致.

为了进一步说明权重函数过渡区域对渐进镜片的影响,统计了镜片仿真结果和测量结果中的可视区面积、可视角度数据,如表 3 所示.

表 3 渐进镜片视远视近区面积和可视角度  
Table 3 The area and viewing angle of PALs

Case		Area of distance zone/mm <sup>2</sup>	Angle of distance zone/(°)	Area of near zone/mm <sup>2</sup>	Angle of near zone/(°)
Lens 1	Simulation	585.7	115.4	290.4	87.7
	Measurement	581.4	112.2	252.6	72.4
Lens 2	Simulation	567.9	103.9	182.6	56.8
	Measurement	559.0	109.8	201.0	57.6
Lens 3	Simulation	505.0	97.6	137.8	44.0
	Measurement	503.9	99.5	141.5	40.0

对比表 3 中三组镜片的仿真和测量结果,可以发现镜片仿真和加工后的视远视近区面积相差最大为 37.8 mm<sup>2</sup>,最小为 1.1 mm<sup>2</sup>.可视角度相差最大为 15.3°,最小为 0.8°.镜片 1 与镜片 2 视远区面积相差约为 30 mm<sup>2</sup>,可视角度相差约为 5°,视近区面积相差约为 70 mm<sup>2</sup>,可视角度相差约为 20°.镜片 2 与镜片 3 视远区面积相差约为 60 mm<sup>2</sup>,可视角度相差约为 10°,视近区面积相差约为 60 mm<sup>2</sup>,可视角度相差约为 15°.

对比三组权重函数下的镜片仿真和加工结果,可以发现权重过渡区域主要影响镜片周边像散.当权重过渡区域宽度为 6 mm,仿真结果镜片周边像散极值为 -2.52D,加工结果周边像散极值近似为 -2.75D,约为 1.3 倍 Add.权重过渡区域宽度为 3 mm,仿真结果镜片周边像散极值为 -1.87D,加工结果周边像散极值近似为 -2.25D,约为 1 倍 Add.而权重过渡区域宽度为 0 mm,仿真结果镜片周边像散极值为 -1.61D,加工结果周边像散极值近似为 -1.75D,约为 0.85 倍 Add,相比而言像散最小,其次影响镜片视远视近区区的面积和可视角度.三组镜片的视远视近区面积和可视角度随着过渡区域宽度减小而减小.对于直径为 60 mm 的镜片

来讲,过渡区域从 6 mm 到 3 mm,视远区面积大约减小 30 mm<sup>2</sup>,视近区面积大约减小 70 mm<sup>2</sup>,过渡区域从 3 mm 到 0 mm,视远区面积大约减小 60 mm<sup>2</sup>,视近区面积大约减小 60 mm<sup>2</sup>.权重过渡区域对镜片通道宽度影响较小.

### 3 结论

本文通过二维插值的方法构造了不同的权重函数进行渐进镜片的设计,通过 3 组不同权重函数过渡区域的设计,计算出 3 组自由曲面面型,仿真结果和加工后的测量结果共同表明了过渡区域权重分布对镜片光学性能的重要性.对比仿真和加工测量结果,发现权重过渡区域主要影响镜片周边像散的度数和分布,其次影响视远视近区面积和可视角度,对光焦度影响较小.0 mm 宽权重过渡区域周边像散约为 0.85 倍 Add,相比于 3 mm 宽的 1 倍 Add 和 6 mm 宽的 1.3 倍 Add,其周边像散最小,且周边像散较为分散,从高权重区域到低权重区域的像散变化较慢,视远视近区面积略有减小,镜片光学性能最优,符合渐进镜片的设计目标.本文从权重函数设计方面对渐进镜片设计有了进一步的研究,得到了周边像散较低的加工镜片.在实际使用中,由于周边像散得到有效控制,佩戴者会获得更清晰的视觉,对应用具有积极的意义.

### 参考文献

- [1] XIANG Hua-zhong, ZHU Tian-feng, WEI Ye-fei, *et al.* Design of multi-optical axis progressive addition lens[J]. *Optics Technology*, 2015, **41**(4): 70-74.  
项华中,朱天凤,魏叶飞,等.多光轴渐进变焦眼镜设计[J]. *光学技术*, 2015, **41**(4): 70-74.
- [2] DAI Hong-bing, LI Guo-sheng. More focus on youth gradual glasses myopic degree of control[J]. *Chinese and Foreign Medical Research*, 2011, **9**(11): 13-14.  
代红兵,李国生.渐进多焦点眼镜对青少年近视度数控制的研究[J]. *中外医学研究*, 2011, **9**(11): 13-14.
- [3] TANG Y H, WU Q Y, CHEN X Y, *et al.* A personalized design for progressive addition lenses[J]. *Optics Express*, 2017, **25**(23): 28100.
- [4] WU Quan-ying, QIAN Lin, CHEN Hao, *et al.* Research on meridian lines design for progressive addition lenses[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(11): 3186-3191.  
吴泉英,钱霖,陈浩,等.渐进多焦点眼用镜片的子午线设计研究[J]. *光学学报*, 2009, **29**(11): 3186-3191.
- [5] TANG Yun-hai, WU Quan-ying, CHEN Xiao-yi, *et al.* Optimization design of the meridian line of progressive addition lenses based on genetic algorithm[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, **34**(9): 0922005.  
唐云海,吴泉英,陈晓翌,等.基于遗传算法的渐进多焦点镜片子午线优化设计[J]. *光学学报*, 2014, **34**(9): 0922005.
- [6] LIU Zhi-ying, TIAN Yu, LI Dan, *et al.* Analysis of relationship between surface error and optical power of PAL[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2017, **46**(4): 0422002.  
刘智颖,田宇,李丹,等.渐进多焦点镜片面形误差与光焦度关系的分析[J]. *光子学报*, 2017, **46**(4): 0422002.
- [7] LI Y Y, HUANG W, FENG H H, *et al.* Customized design and efficient machining of astigmatism-minimized progressive addition lens[J]. *Chinese Optics Letters*, 2018, **16**(11): 113302.
- [8] XIANG H Z, GUO H, FU D X, *et al.* Multi-optical-axis measurement of freeform progressive addition lenses using a Hartmann-Shack wavefront sensor[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2018, **104**: 259-265.
- [9] XIANG H Z, GAO J D, LI N N, *et al.* Comparison of different astigmatic optical lenses by direct measurement of surface shape[J]. *Optical Engineering*, 2020, **59**(2): 024113.
- [10] WU Q Y, TANG Y H, CHEN X Y, *et al.* Method for evaluating ophthalmic lens based on eye-lens-object optical system[J]. *Optical Express*, 2019, **27**(26): 37274-37285.
- [11] XIANG H Z, LI N N, GAO J D, *et al.* Comparison and applications of spherocylindrical, toroidal, and ellipsoidal surfaces for the correction of astigmatism in spectacle lenses[J]. *Optical Express*, 2020, **28**(2): 1745-1757.
- [12] WINTHROP J T, CORPORATION A O. Progressive addition spectacle lens; US,4861153[P]. 1989-08-19.
- [13] STEELE T, MCLOUGHLIN H, PAYNE D. Progressive addition power lens; US,6776486[P]. 2004-08-17.
- [14] LOOS J, JOACHIM R, GÜNTHER S, *et al.* A variational approach to progressive lens design[J]. *Computer-Aided Design*, 1998, **30**(8): 595-602.
- [15] KWON Y W, BANG H C. The finite element method using matlab[M]. Boca Raton: CRC Press, 2015.
- [16] WANG J, SANTOSA F. A numerical method for progressive lens design[J]. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2004, **14**(04): 619-640.
- [17] JIANG W, BAO W, TANG Q, *et al.* A variational-difference numerical method for designing progressive-addition lenses[J]. *Computer-Aided Design*, 2014, **48**: 17-27.
- [18] HSU W Y, LIU Y L, *et al.* Design, fabrication, and metrology of ultra-precision optical freeform surface for progressive addition lens with B-spline description[J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2012, **63**(1-4): 225-233.



- [19] SANTOSA F, WANG J, GULLIVER R. Analysis of a variational approach to progressive lens design[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2003, **64**(1): 277-296.
- [20] ANG J, SANTOSA F. A numerical method for progressive lens design[J]. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2004, **14**(4): 619-640.