

引用格式: LI Shu-qing, CHENG Yong-xi, CHANG Feng. Generation and Modulation of Rogue Waves on Periodic Background [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2020, 49(6):0619001
李淑青,程永喜,常锋.周期背景下怪波的激发和调制[J].光子学报,2020,49(6):0619001

周期背景下怪波的激发和调制

李淑青,程永喜,常锋

(太原工业学院 理学系, 太原 030008)

摘要:为了研究怪波在周期背景中的激发和演化情况,以含有周期外势的自聚焦非线性薛定谔方程为模型,采用快速分步傅里叶算法,讨论了在两种周期势(实势和复势)的情况下,怪波的激发和演化情况。研究表明:在两种周期势背景下都能通过平面波加微扰来激发怪波;在实周期背景下,通过改变周期势的振幅和周期能够产生不同的光学现象;在复周期背景下,通过同样的初始波能够激发一种超大怪波,而且实部振幅对怪波具有能量耗散和减速作用,虚部振幅对怪波具有能量增益和加速作用,选择合适的实部振幅与虚部振幅可以产生强度不同的大怪波。研究结果有助于在光晶格中捕获和调节怪波,以及获得高功率波。

关键词:非线性薛定谔方程;怪波;快速分步傅里叶算法;周期势;Parity-time 对称

中图分类号:TN929

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20204906.0619001

Generation and Modulation of Rogue Waves on Periodic Background

LI Shu-qing, CHENG Yong-xi, CHANG Feng

(Department of Science, Taiyuan Institute Technology, Taiyuan 030008, China)

Abstract: In order to study the excitation and evolution of rogue waves in the periodic background, the excitation and evolution of rogue waves in the case of two kinds of periodic potentials (real potential and complex potential) are discussed by using the split-step fast Fourier transform, according to the self-focusing nonlinear Schrodinger equation model with periodic external potential. The results show that rogue waves can be excited by plane waves with a little perturbation in both kinds of periodic potential backgrounds. In the case of only real periodic potential, different optical phenomena can be generated by changing the amplitude and period of the period potential. In the parity-time symmetry periodic potential, a very large rogue wave can be excited, and the real part amplitude has energy dissipation and deceleration effect on the rogue wave, while the imaginary part amplitude has energy gain and acceleration effect on the rogue wave. Therefore, choosing appropriate real part amplitude and imaginary part amplitude can generate large rogue wave with different intensity. The study can help to capture and adjust the strange wave in the optical lattice, and get high power waves.

Key words: Nonlinear Schrodinger; Rogue; Split-step fast Fourier transform; Periodic potential; Parity-time symmetric

OCIS Codes: 190.4370; 060.4370; 060.4510

0 引言

怪波一般是指强度比周围相邻波强度高出一倍及以上的波,它能量集中,最早出现在海洋中.由于它来

基金项目:国家自然科学基金(No.11804245),太原工业学院精品课程建设(No. XJ-JPKC-201904)

第一作者:李淑青(1978—),女,副教授,硕士,主要研究方向为非线性光学.Email:lishuq@tit.edu.cn

收稿日期:2020-03-03;录用日期:2020-03-27

<http://www.photon.ac.cn>

无影去无踪,出现频率高,经常引起海难事件,逐渐受到人们的重视,KHARIF C 和 NIKOLKINA I 全面总结了近几十年的海上怪波事件^[1-2].但是由于海洋中怪波的实验难于在实验室完成,人们开始寻找其它怪波现象,发现怪波也存在于非线性光学、凝聚态物理等领域^[3-4],尤其是在 2007 年 SOLLI D R 等^[3]在光学实验中发现怪波现象,使光怪波的研究成为了热点.一直以来很多学者以非线性薛定谔方程(Nonlinear Schrödinger equation, NLS)作为描述怪波的模型,并求出了它的怪波解和高阶怪波解^[5-8],他们把平面波作为种子解,然后采用达布变换的方法得到其有理解.最近一些研究团队把周期波作为种子求出了周期背景下的怪波解^[9-11].另外,很多学者采用了数值模拟的方法对怪波的激发进行了研究,发现在平面波背景下增加微小扰动能在非线性克尔介质中产生怪波^[12-13];然而在具有周期结构的光晶格中是否能通过平面波增加扰动的方法激发怪波或者调制怪波还鲜有人研究.最近一段时间,人们开始关注光孤子在 Parity-Time(PT) 对称介质中的传播问题,并讨论了各种复势的孤子解及其稳定性^[14-16],但是鲜有人讨论在这种 PT 对称光介质中是否能够激发怪波.本文将以在非线性薛定谔方程中增加周期势的方法来研究这些问题.

1 模型及解

为了突出研究周期背景下的怪波现象,选择最简单的模型,即在非线性自聚焦克尔介质中的模型中增加周期势,得到归一化的非线性薛定谔方程,表示为^[14-17]

$$i \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + V(x)q + |q|^2 q = 0 \quad (1)$$

式中, q 表示归一化的慢变波包, x 表示横坐标, z 表示归一化的纵向传播距离, $V(x)$ 表示外势.式(1)在没有增加外势时的基态怪波解可以表示成^[5,6]

$$q(z, x) = \left(1 - \frac{4 + 8iz}{1 + 4x^2 + 4z^2}\right) \exp(iz) \quad (2)$$

式(2)常被看做平面波背景下的怪波解,其中怪波在 $z=0, x=0$ 时能达到的最大振幅 $|q(0, 0)|=3$,和最大强度 $I_m = |q(0, 0)|^2=9$,其平面波背景的振幅 $|q_0(x)|=1$,强度也为 1.

通过数值模拟可以证明如果以式(2)作为初始波传输到薛定谔方程式(1)中,怪波并不能像文献[12]中演化出新的怪波串,只有以平面波背景上增加微小的单峰扰动才能够产生怪波串,为了区别文献[12]中提到的初始波,采用平面波背景增加怪波扰动作为初始波,形式为

$$q(0, x) = 1 + \epsilon \left(\frac{4}{1 + 4x^2} \right) \quad (3)$$

数值实验证明,式(3)中的 ϵ 必须是一个小量,只有 $\epsilon < 0.1$ 才能产生明显的怪波,本文取 $\epsilon = 0.05$.式(3)的波形如图 1(a)中的实线所示,以式(3)作为初始波在没有增加外势的薛定谔方程中的演化图如图 1(b)所示,可以明显看出以式(3)作为初始波可以激发出怪波串,且所激发怪波的演化和文献[12]中高斯微扰和周期微扰所激发怪波的演化基本相同.图 1(a)中的点线是怪波的演化等高图 1(b)在 $z=3.5$ 时候的波形,可以

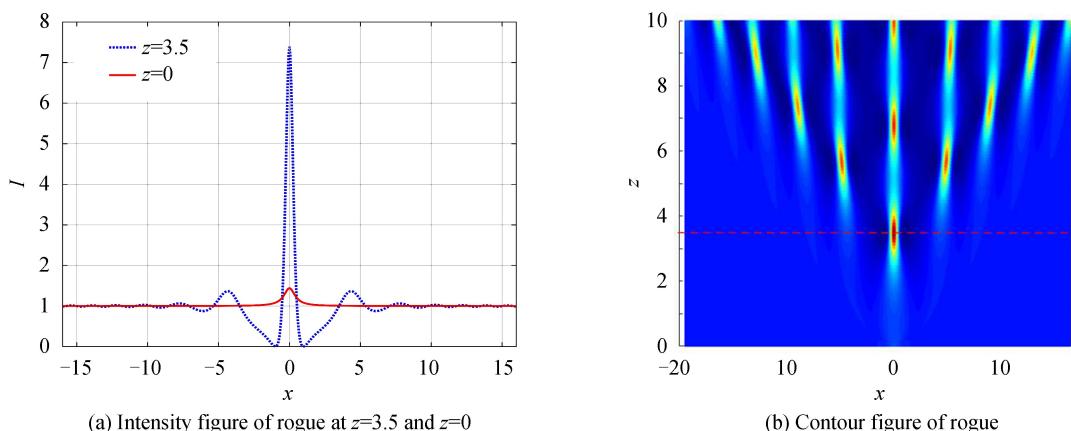


图 1 怪波在不含外势的非线性薛定谔方程中的演化
Fig.1 Evolution of rogue in NLS without external potential

看出其强度 $I=7.5$,其形状具有双洞结构,和文献[5-6]中求出的怪波解形状结构一致.之后的讨论都以式(3)作为初始扰动波来进行.

2 实周期势背景下的怪波现象

稳定的孤子可以存在于非线性晶格中,但是非线性晶格中能否产生怪波还处于研究期^[18],接着将数值研究在周期势背景下能否激发怪波.采用如下形式的实周期势函数^[16]

$$V(t)=V_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) \quad (4)$$

式中, V_0 表示振幅,物理上指光晶格的调制深度, l 表示晶格的周期常数.

2.1 幅度对怪波激发的影响

首先研究在周期背景下能否产生怪波,当 $l=2, V_0 < 1$ 时,怪波的演化规律和平面波背景下的情况相似,和图 1 的情况类似,可见通过平面波上增加微扰的方法也能在光晶格中激发怪波.但是随着周期势振幅的增加,将出现不一样的图景,这种图景类似 Kuznetsov-Ma(KM)孤子解^[19].如选择周期 $l=2$,振幅 $V_0=2$ 进行长距离数值模拟,如图 2(a)所示,从图中可以看出,在 $x=0$ 的方向上出现了 6 个怪波,而且怪波的强度略有不同,前两个怪波的强度弱,之后四个怪波的强度相等.为了能够清晰地看出怪波的具体形状,图 2(b)画出了第一个怪波的近距离图.对比文献[9]中以周期解作为种子通过达布变换所求出的怪波精确解的形状,可以看出此处的怪波形状和文献[9]中精确解的形状一致.

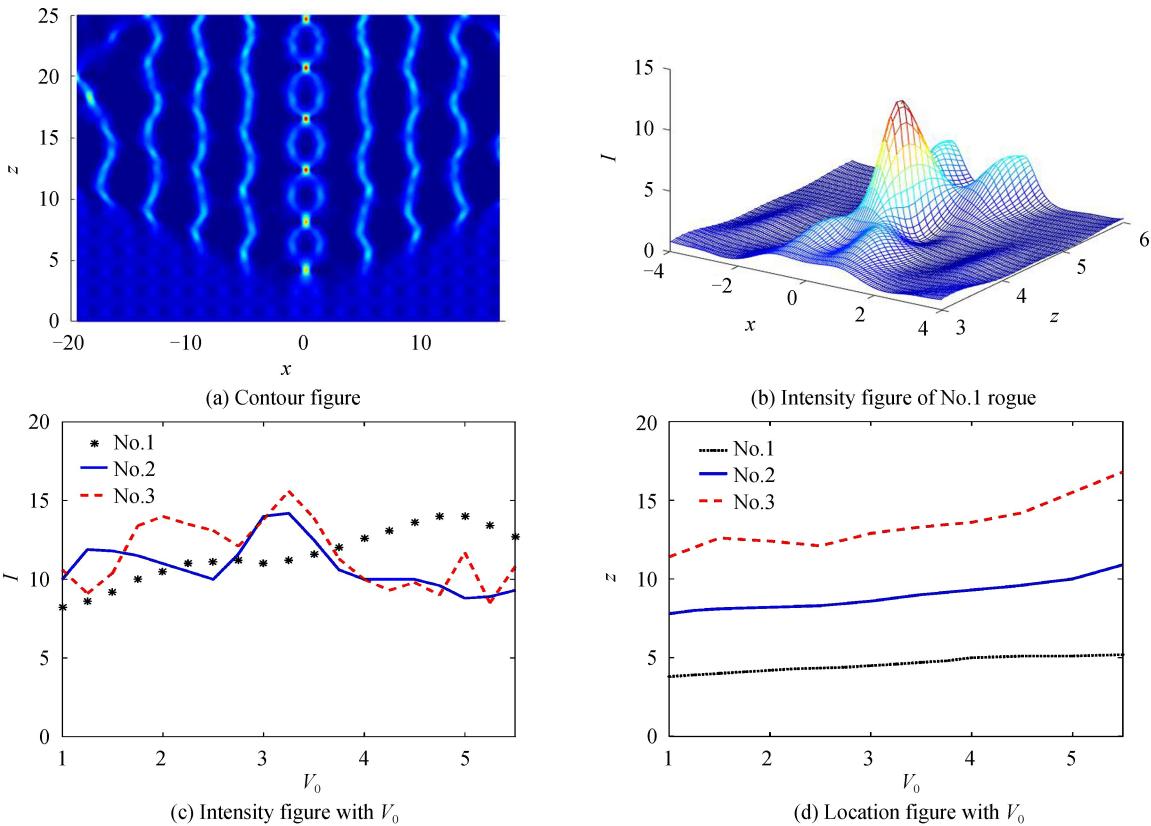


图 2 实周期背景下激发的怪波

Fig.2 Rogue waves on the real periodic background

为了研究实周期势的振幅对怪波形成的影响,固定周期 $l=2$,改变实周期势函数的振幅,研究不同振幅情况下,以式(3)作为初始波,在含有实外势式(4)薛定谔方程中的演化情况.在图 2(a)中,前三个怪波的强度不等,在不同 V_0 下,前三个怪波的强度随着振幅 V_0 的变化规律如图 2(c)所示,可以看出三个怪波的强度没有明显的递增和递减关系,在 $I=11$ 附近来回波动.同时也研究了怪波出现的位置随着周期势振幅的变化规律,图 2(d)表示了三个怪波的中心位置随着 V_0 的变化,可以看出,随着 V_0 的增大,三个怪波出现的中心位置

都后移,即随着 V_0 的增大,怪波的位置延迟出现。但是当 $V_0 > 6$ 时,又有不同于图 2 的现象产生,由于情况较复杂,鉴于篇幅此处不作讨论。

2.2 周期对产生怪波的影响研究

选择式(3)为初始波,采用快速分步傅里叶算法,令 $V_0 = 3$ 保持不变,改变周期势的周期 l 。研究发现,当 $l < 1$ 时,以式(3)作为初始波演化的图像和没有增加外势所产生的图 1(b)基本一样,可见周期太小,可以近似看成平均场,所以周期场可以近似看成平面波场。当周期 $1 \leq l < 5$ 时,同样以式(3)作为初始波,将演化出像图 2(a)一样的怪波现象,区别在于随着周期的增大,怪波出现的位置延迟,怪波的强度像图 2(c)一样在一定的强度附近来回波动,无明显的递增和递减规律,但是最大强度都不超过 20 个单位,这些规律和 2.1 节的讨论的内容基本一致,此处不再赘述。

但是当 $l \geq 5$ 时,将出现新的图像,图 3(a)是当周期 $l = 6$,仍然以式(3)为初始波后的演化等高图,图中出现了两列 AB 呼吸子^[18,20],图 3(b)是对应的呼吸子的强度和初始波,从图中可以看出呼吸子的周期和外势的周期相同。1986 年 AKHMEDIEV N 最早求出了薛定谔方程的周期解,被称为 AB 呼吸子解,它具有横向周期性的特点^[18],之后在 2004 年求出了含有高阶效应的非线性薛定谔方程的呼吸子解^[20],怪波解就是在 AB 呼吸子解取极限的情况下得到的。因此怪波和 AB 呼吸子有密切的关系,此处只改变实周期势的周期就得到了呼吸子解。可见改变实周期势的周期可以激发和调制出不同的光学现象。

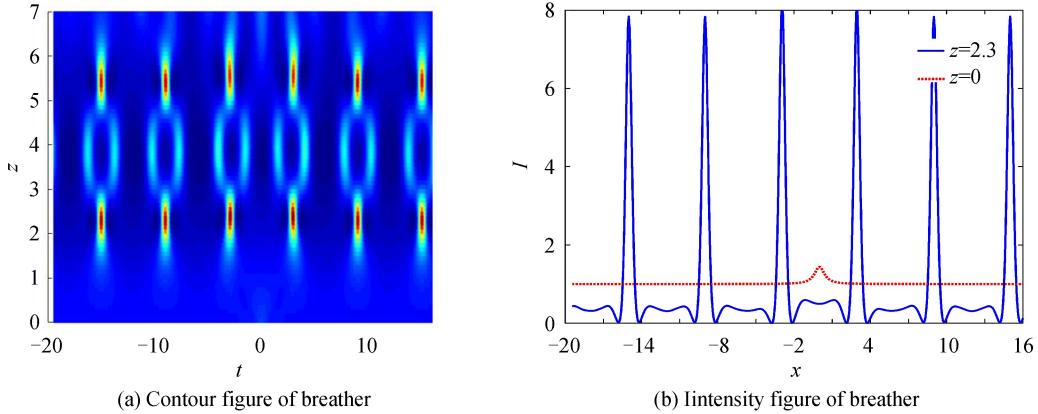


图 3 周期背景下的呼吸子
Fig.3 Breather on the periodic background

3 复周期势背景下的怪波现象

PT 对称光介质中的势函数是复函数,并且要求实部是关于位置的偶对称函数,虚部是关于位置的奇对称函数。因此需要研究在这种复周期势中能否激发怪波及其演化特点。取复周期势函数形式为^[16]

$$V(t) = V_0 \cos(2x) - iW_0 \sin(2x) \quad (5)$$

式中, V_0 和 W_0 表示调制深度。这种势一般可以通过空间调制的折射率以及空间分布的增益和损耗相互结合来实现。式(5)中复势函数的第一项 $V_0 \cos(2x)$ 和第二项 $-W_0 \sin(2x)$ 分别满足 PT 对称关系,它们分别表示非线性耗散和增益部分的横向周期性调制,显然实部与虚部的调制周期都为 π 。当 $W_0 = 0$ 时,式(5)就成为只含有实周期势的函数,虽然和式(4)的形式不同,但是它们的演化特点基本一致。这部分内容在第 2 节已经讨论,此处不再赘述,重点讨论 $W_0 \neq 0$ 的情形。为了与只含有实周期势的情况形成对比,仍然选择式(3)作为初始波,且 $\epsilon = 0.05$ 。

3.1 超大怪波现象

采用快速分步傅里叶算法(Split-step Fast Fourier Transform,SFFT),选择步长为万分之一,经过大量数值模拟发现,选择合适的实部振幅和虚部振幅可以产生一种新的怪波现象,图 4 是当 $V_0 = 0.2$ 且 $W_0 = 0.6$ 时,以式(3)作为初始波后的演化强度和等高图,演化过程中出现一种超大怪波,它的强度远远超过式(2)的最大强度 9,达到了 56 个单位,当选择其它合适的振幅时,它的强度可以达到 145 个单位,而且它的形状特殊,没有双洞结构,像是几个怪波的集合,图 4(b)是它的等高图。为了弄清楚出现这种结果的原因,研究实部

振幅和虚部振幅对其形成的影响.

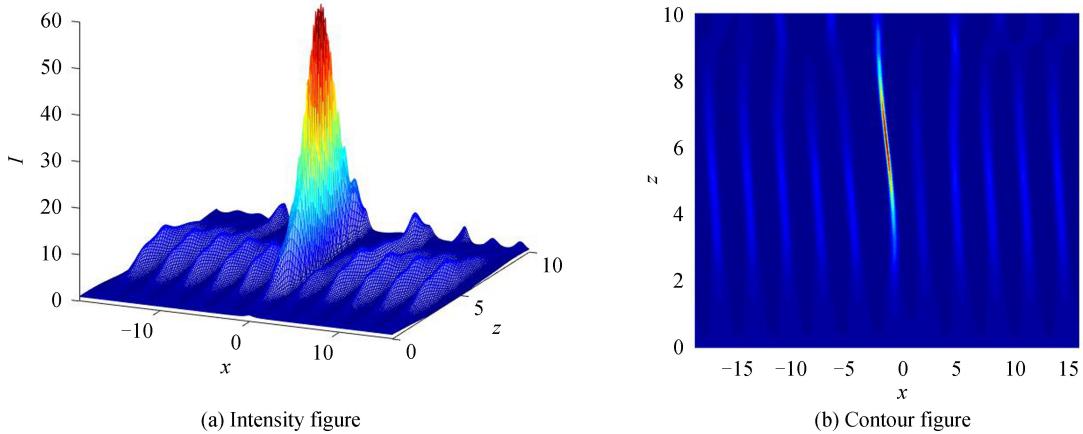


图 4 超大怪波

Fig.4 Big rogue waves figure

3.2 实部振幅和虚部振幅对怪波形成的影响

首先研究固定虚部振幅 W_0 后, 实部振幅 V_0 对怪波强度的影响, 如图 5(a), 从图中可以看出当 W_0 分别等于 0.2、0.3、0.4 和 0.5 时, 随着 V_0 的增加, 怪波的强度迅速下降, 说明调节实部振幅 V_0 的大小可以使怪波能量损耗, 且当实部振幅 $V_0 > 0.5$ 时, 无论虚部振幅为多少, 怪波的强度都趋近于同一个值, 约为式(2)中怪波的最大强度 9. 从图中还可以看出 W_0 越大, 怪波强度下降得越快, 说明虚部振幅 W_0 越大, 损耗速度越大. 图 5(b)表示固定实部振幅 V_0 后, 虚部振幅 W_0 对怪波形成的影响. 可以看出随着虚部振幅 W_0 的增大, 怪波强度逐渐增加, 说明调节虚部振幅的大小可以使怪波能量增益. 也可以看出 V_0 越小, 曲线越陡, 强度增加得越快, 说明 V_0 越大, 能量增益越慢.

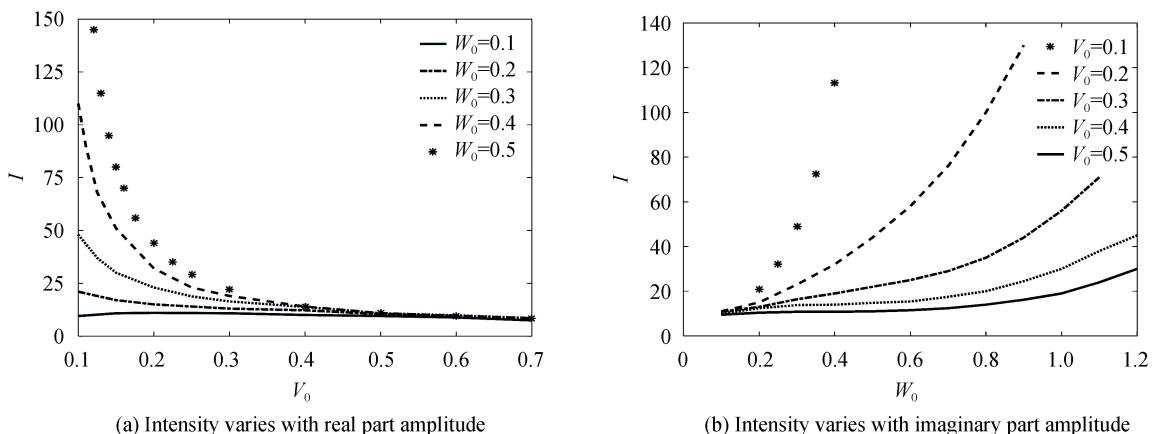


图 5 怪波强度随实部振幅和虚部振幅的变化

Fig.5 The the rogue intensity varies with real and imaginary part amplitude

综合图 5 可知: 实部振幅 V_0 具有使怪波能量耗散和减速的作用, 虚部振幅 W_0 具有使怪波能量增益和加速的作用, 可见选择不同的实部和虚部振幅可以产生不同强度的怪波. 从图中还可以看出最值情况, 如图 5(a)中选择 $V_0=0.12, W_0=0.1$ 时, 超大怪波的强度可以达到 145 个单位; 图 5(b)中选择 $W_0=0.9, V_0=0.2$ 时, 怪波的强度为 130 个单位; 但是当 $W_0=0.1$ 时候, 不论 V_0 取多少, 其强度基本在 9 附近保持不变. 这对光晶格中怪波的产生和调节及捕获具有一定的理论参考意义.

4 结论

本文采用平面波加怪波微扰作为初始波, 采用数值模拟的方法, 以自聚焦非线性薛定谔方程增加周期外势作为模型, 研究了含有实周期势和复周期势两种情况下, 怪波的激发和调制. 研究发现两种周期势中都可

以产生怪波现象,但是产生怪波的强度差别较大,在含有实周期势的情况下,产生怪波的强度和通过达布变换所求的怪波解的强度相差不多,但是在含有复周期势的情况下,产生怪波的强度远远超过怪波解的强度,称为超大怪波.另外,调节周期势函数的周期可以产生不同的光学现象,既可以产生怪波又可以产生AB呼吸子.复周期势的实部振幅具有使怪波能量耗散和减速的作用,虚部振幅具有使怪波能量增益和加速的作用,可见选择合适的实部振幅和虚部振幅可以产生不同强度的怪波.

参考文献

- [1] KHARIF C, PELINOVSKY E. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon[J]. *European Journal of Mechanics B-Fluid*, 2003, **22**: 603-634.
- [2] NIKOLKINA I, DIDENKULOVA I. Rogue waves in 2006-2010[J]. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 2011, **11**(11): 2913-2914.
- [3] SOLLI D R, ROPERS C, KOONATH P. Optical rogue waves[J]. *Nature*, 2007, **450**(12): 1054-1057.
- [4] BLUDOV Y V, KONOTOP V V, AKHMEDIEV N. Matter rogue waves[J]. *Physical Review A*, 2009, **80**: 033610.
- [5] AKHMEDIEV N, ANKIEWICZ A, TAKI M. Waves that appear from nowhere and disappear without a trace[J]. *Physics Letters A*, 2009, **373**: 675-678.
- [6] AKHMEDIEV N, ANKIEWICZ A, SOTO-CRES J M. Rogue waves and rational solutions of the nonlinear Schrödinger equation[J]. *Physical Review E*, 2009, **80**: 026601.
- [7] WANGX B, HAN B. Novel rogue waves and dynamics in the integrable pair-transition-coupled nonlinear Schrödinger equation[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2020, **99**: 105987.
- [8] LANZ Z. Rogue wave solutions for a coupled nonlinear Schrödinger equation in the birefringent optical fiber[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2019, **98**: 128-134.
- [9] CHEN J B, PELINOVSKY D E. Rogue periodic waves in the focusing nonlinear Schrodinger equation[J]. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 2018, **474**: 1-18.
- [10] CHENJ, PELINOVSKY D E, WHITE R E. Rogue waves on the double-periodic background in the focusing nonlinear Schrodinger equation[J]. *Physical Review E*, 2019, **100**: 052219.
- [11] LIR M, GENG X G. Rogue periodic waves of the sine-Gordon equation[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2020, **102**: 106147.
- [12] LI Shu-qing, YANG Guang-ye, LI Lu. Rogue solution of Hirota equation and its transmission[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **63**(10): 104215.
李淑青, 杨光晔, 李禄. Hirota 方程的怪波解及其传输特性研究[J]. 物理学报, 2014, **63**(10):104215.
- [13] LI Shu-qing, CHANG Feng, GUO Zun-guang. The second-order rogue solution of Hirota equation and its transmision [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2016, **45**(10): 1006003.
李淑青, 常锋, 郭尊光. Hirota 方程的二阶怪波解及其传输特点[J]. 光子学报, 2016, **45**(10):1006003.
- [14] HU S M, MA X K, LU D Q, et al. Solitons supported by complex PT-symmetric Gaussian potentials[J]. *Physical Review A*, 2011, **84**: 043818.
- [15] SHI Z W, JIANG X J, ZHU X, et al. Bright spatial solitons in defocusing Kerr media with PT-symmetric potentials [J]. *Physical Review A*, 2011, **84**: 053855.
- [16] ABDULLAEVF K, KARTASOV Y V, KONOTOP V V, et al. Solitons in PT-symmetric nonlinear lattices[J]. *Physical Review A*, 2011, **83**: 041805.
- [17] LI Shu-qing, QIAO Shi-zhu, CHENG Yong-xi, et al. Cotrolling optical solitons in self-focusing Kerr medium by adding potential barrier(trap)[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2018, **47**(9): 0919003.
李淑青, 乔士柱, 程永喜 等, 添加势垒(阱)对光孤子在自聚焦克尔介质中的传输的操控作用[J]. 光子学报, 2018, **47**(9):0919003.
- [18] AKHMEDIEV N, KORNEEV V I. Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear Schrödinger equation [J]. *Theoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika*, 1986, **69**(2): 184-194.
- [19] MA Y C. The perturbed plane-wave solutions of the cubic Schrödinger equation[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 1979, **60**: 43-58.
- [20] LI S Q, LI L, LI Z H. Properties of soliton solutions on a cw background in optical fibers with higher-order effects[J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2004, **21**(12): 2089-2094.