引用格式：ZHANG Ke, LI Lan-lan, YU Hai-jun, *et al*. Quantum Theory of Optical Fractional Fourier Transform[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2020, **49**(10):1027001
张科,李兰兰,余海军,等.光学分数傅里叶变换的量子理论[J].光子学报,2020,**49**(10):1027001

# 光学分数傅里叶变换的量子理论

张科[1],李兰兰[1],余海军[1],杜建明[1],范洪义[2]
(1 淮南师范学院 电子工程学院,安徽 淮南 232038)
(2 中国科学技术大学 材料科学与工程系,合肥 230026)

**摘　要**:采用以算符为宗量的厄密多项式理论找出生成分数傅里叶变换的算符,即将分数傅里叶变换纳入量子理论.分析坐标—动量互换算符在分数傅里叶变换加法律中的作用.在推导过程中,充分利用了算符厄密多项式的广义母函数公式以及编好序的积分理论.算符厄密多项式理论的核心是$H_n(Q)=:(2Q)^n:$,即把复杂的特殊函数结构算符用正规排序的幂级数来代替,极大地简化了运算过程.

**关键词**:分数傅里叶变换;坐标—动量互换算符;算符厄密多项式理论;编好序的积分理论
**中图分类号**:O431.2　　**文献标识码**:A　　**doi**:10.3788/gzxb20204910.1027001

# Quantum Theory of Optical Fractional Fourier Transform

ZHANG Ke[1], LI Lan-lan[1], YU Hai-jun[1], DU Jian-ming[1], FAN Hong-yi[2]
(1 *School of Electronic Engineering, Huainan Normal University, Huainan, Anhui* 232038, *China*)
(2 *Department of Material Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*)

**Abstract**: The aim of this paper is to find out the operator for generating fractional Fourier transform in Hermitian polynomial theory with the operator as the argument, and to incorporate fractional Fourier transform into quantum theory. The role of coordinate-momentum exchanging operator is explored in playing FFrT′s addition rule. In the whole derivation the generalized generating function formula of operator Hermitian polynomials and the integration method within ordered product of operators are used. The core of operator Hermite polynomial theory is the operator identity $H_n(Q)=:(2Q)^n:$, which turns the operator of complex special function into power series in normal ordering, as a result, this greatly simplifies calculations.

**Key words**: Fractional Fourier transformation; Coordinate-momentum exchanging operator; Operator Hermite polynomial theory; Integration method within ordered product of operators
**OCIS Codes**: 270.5585; 270.6570; 270.5580

## 0 引言

自从量子力学诞生以来,就出现了一种新的途径来研究经典光学,即用量子光学的理论和方法从新审视已有的经典光学变换,得到经验以后再用量子光学的方法去探寻和发现新的经典光学变换.狄拉克曾说经典分析力学的正则变换应该有量子力学的幺正变换与之对应.例如经典傅里叶变换的量子力学对应的就是坐标表象和动量表象的互换,这体现了德布罗意的波—粒子两象性.范洪义就曾经用量子力学的相干态

**基金项目**:国家自然科学基金(No.1775208),安徽省教育厅自然科学重点项目(No.KJ2019A0688),淮南师范学院重点研究项目(No.2019XJZD04)
**第一作者**:张科(1986-),男,实验师,博士,主要研究方向为量子光学和量子信息学.Email:zk626217@163.com
**通讯作者**:范洪义(1947-),男,教授,博士,主要研究方向为量子光学和量子信息学.Email:fhym@ustc.edu.cn
**收稿日期**:2020-05-15;**录用日期**:2020-06-01

表象计算推导出了光学菲涅尔变化的量子力学对应算符，该算符在发展量子层析测量理论中有关键的应用[1-2]. 因此，本文的意图是希望找到对应光学分数傅里叶变换的量子变换的幺正算符，并探寻分数变换的可加性是由什么算符来决定的. 在此基础上就可从量子论的角度来发现和丰富新的分数变换，例如提出新的分数菲涅尔变换，新的分数小波变换等.

近年来，分数傅里叶变换（Fractional Fourier Transform，FFrT）[3-7]深受从事量子信息学和量子物理学研究学者的青睐. 它是基于传统傅里叶变换的基础上发展起来的一种新的变换方式，可以使光在梯度渐变介质（quadratic graded-index）中的传播得以实现，分析和处理波动信号. 它构建起了传统光学变换理论和量子光场中对应的Wigner函数之间的纽带作用，被广泛应用于光纤通信、图像和信号处理、激光雷达等领域. 在分数傅里叶变换中存在着一个最显著的性质就是满足加法律，即存在关系$(F_\alpha \cdot F_\beta)[f]=F_\alpha[F_\beta[f]]$，首先对$\beta$阶进行变换，接着对$\alpha$阶进行变换，满足加法律：$F_\alpha \cdot F_\beta=F_{\alpha+\beta}$，即对其进行两次变换（分别是$\alpha$阶和$\beta$阶）的效果可以表示为一次变换$(\alpha+\beta)$阶.

本文旨在采用以算符为宗量的厄密多项式把经典分数傅里叶变换纳入量子力学框架体系中，并在量子力学的框架体系内来证明分数傅里叶变换所具备的可加性特征，在探讨中发现坐标—动量互换算符起了关键的作用. 在计算推导中，本文充分利用了有序算符内的积分（Integral Within an Ordered Product，IWOP）技术[8-11]和算符厄密多项式理论[12-14].

## 1 以算符为宗量的厄密多项式的广义母函数

单下标厄密多项式$H_n(q)$在激光物理、信息光学、量子光学和数学分析等领域中占据十分重要的地位. $H_n(q)$在量子力学中有十分显著的物理解释，它是量子相空间中单模Fock态所对应的波函数的基础，也是量子力学中谐振子体系所具有的本征函数，同时又是分数傅里叶变换过程中算符所遵循的本征方程对应的本征函数. 本文提出把常见的特殊函数的自变数（宗量）以量子相空间理论体系中的坐标算符来代替，这里将$H_n(q)$转换为量子力学中的算符密多项式$H_n(Q)$. 利用量子力学中海森堡提出的量子算符之间存在的基本对易关系

$$[Q,P]=\mathrm{i}\hbar \tag{1}$$

式中，$Q$和$P$分别代表的是量子相空间理论体系中坐标算符以及动量算符，而且$Q=\dfrac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}$，$[a,a^\dagger]=1$，把$H_n(Q)$展开为正规乘积[15-16]形式，从而可以推导计算出在正规乘积编序下的厄密多项式所对应的母函数表示和一些新的量子力学算符恒等式. 在此基础上，获取量子力学中经典函数$H_n(q)$的表示关系，把这种方法定义为量子力学算符的厄密多项式理论技术，该方法为量子力学的计算和推导带来了很大的便利.

算符厄密多项式理论的核心主要表现为$H_n(Q)=:(2Q)^n:$，即把复杂的特殊函数结构算符用正规排序的幂级数来代替，这在很大程度上简化了运算过程. 其推导过程如下.

单变量厄密多项式$H_n(q)$所对应的母函数可以表示为

$$\mathrm{e}^{2\lambda q-\lambda^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}H_n(q) \tag{2}$$

因此有

$$H_n(q)=\frac{d^n}{\lambda^n}\mathrm{e}^{2\lambda q-\lambda^2}\Big|_{\lambda=0} \tag{3}$$

借助量子力学中的算符厄密多项式相关理论推导单变量厄密多项式$H_n(q)$以$q$展开的幂级数定义式. 在式(2)中将$q$换为$Q$，$H_n(q)\rightarrow H_n(Q)$，可见

$$\mathrm{e}^{2\lambda Q-\lambda^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}H_n(Q) \tag{4}$$

另一方面，利用量子力学中关于算符运算的Baker-Hausdorff[17-18]公式可以计算出

$$\mathrm{e}^{2\lambda Q-\lambda^2}=\mathrm{e}^{\sqrt{2}\lambda\left(a+a^\dagger\right)-\lambda^2}=:\mathrm{e}^{\sqrt{2}\lambda\left(a+a^\dagger\right)}:=:\mathrm{e}^{2\lambda Q}:=\sum_{n=0}^{\infty}:\frac{2\lambda Q}{n!}: \tag{5}$$

式中,符号$::$表示量子力学中的算符已经被编排成正规排序形式了.由IWOP理论可知在$::$内部玻色算符[19]无前后排序区别,可以进行交换,这是正规排序理论中一个十分重要的性质.联立式(4)以及式(5),就得到算符恒等式

$$H_n(Q)=:(2Q)^n: \tag{6}$$

式(6)将复杂的特殊函数结构算符用正规排序的幂级数来代替,极大地简化了运算,并有很多物理应用.联立算符恒等式(6)和坐标表象[20-21]的完备性关系(正规乘积内的高斯积分形式)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\left|q\right\rangle\left\langle q\right|=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}:\mathrm{e}^{-(q-Q)^2}:=1 \tag{7}$$

以及IWOP技术可以得到

$$H_n(Q)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}qH_n(q)\left|q\right\rangle\left\langle q\right|=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}H_n(q):\mathrm{e}^{-(q-Q)^2}:=:(2Q)^n: \tag{8}$$

所以通过式(8)有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}}H_n(x)\mathrm{e}^{-(x-y)^2}=(2y)^n \tag{9}$$

在以上的计算推导过程中没有利用数学意义上的积分运算,这反映了可以借助量子力学相关理论来实现对函数进行积分运算,即用量子力学中的算符厄密多项式函数(例$H_n(Q)$)在量子相空间某个表象中的具体显现形式来建立起对于形如ket-bra算符类型的积分关系,再借助量子力学中算符的编序理论,然后结合量子力学中算符在相同编序理论中存在的恒等式$H_n(Q)=:(2Q)^n:$,十分容易地获取到对应函数的积分运算结果.例如,可以借助此方法导出厄密多项式的乘积的广义母函数公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n!}H_n(q)H_n(p)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\exp\left[\frac{2tpq-t^2(p^2+q^2)}{1-t^2}\right] \tag{10}$$

只需将其中的$H_n(q)$换成算符$H_n(Q)=:(2Q)^n:$,考虑到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n!}H_n(Q)H_n(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}:Q^n:H_n(p)=:\mathrm{e}^{2ptQ-t^2Q^2}: \tag{11}$$

右边的正规乘积$::$可以利用式(12)的算符恒等式取消,此恒等式用IWOP技术做高斯积分后就可得到.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-fQ^2+gQ}&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\mathrm{e}^{-fq^2+gq}\left|q\right\rangle\left\langle q\right|=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}:\mathrm{e}^{-(q-Q)^2-fq^2+gq}:=\\&\sqrt{\frac{1}{f+1}}:\exp\left[\frac{-fQ^2+gQ}{1+f}+\frac{g^2}{4(1+f)}\right]:\end{aligned} \tag{12}$$

将式(12)的右边与式(11)的右边进行对照,令$t^2=\frac{f}{1+f}$,$2tp=\frac{g}{1+f}$,则可以计算出$f=\frac{t^2}{1-t^2}$,$g=\frac{2pt}{1-t^2}$,式(11)即变为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n!}H_n(Q)H_n(p)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\exp\left[\frac{2ptQ-t^2(p^2+Q^2)}{1-t^2}\right] \tag{13}$$

再将$H_n(Q)\to H_n(q)$,于是式(10)得证.

## 2 分数傅里叶变换的量子化阐述

借助量子相空间中的表象相关理论说明一下如何用编好序的算符积分理论给出分数傅里叶变换的量子力学对应.已经知道坐标—动量表象的转换恰是傅里叶变换,假设存在一函数$f(p)=\left\langle p|f\right\rangle$,$\left\langle p\right|$是动量本征态[22-24],借助坐标表象的完备性关系:$\int_{-\infty}^{\infty}\left|q\right\rangle\left\langle q\right|=1$,其中$\left|q\right\rangle$是坐标本征态,$\left\langle p|q\right\rangle=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pq}}{\sqrt{2\pi}}$,所以有

$$f(p)=\left\langle p|f\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle p|q\right\rangle\left\langle q|f\right\rangle\mathrm{d}q=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pq}}{\sqrt{2\pi}}f(p)\mathrm{d}q \tag{14}$$

在参考文献[25-26]中将它推广为分数Fourier变换(以$\alpha$角为参数,称为$\alpha$阶变换)

$$F_\alpha\left[f\right](p)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha/2-\pi/4)}}{\sqrt{2\pi\sin\alpha}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{p^2+q^2}{\tan\alpha}-\frac{2pq}{\sin\alpha}\right)\right]f(p)\mathrm{d}q \tag{15}$$

显然，当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan\alpha\to\infty$，式(15)可简化为式(14).

现在证明式(15)中的积分核等于矩阵元 $\left\langle p\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a}\left|q\right\rangle$，即满足关系

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha/2-\pi/4)}}{\sqrt{2\pi\sin\alpha}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{p^2+q^2}{\tan\alpha}-\frac{2pq}{\sin\alpha}\right)\right]=\left\langle p\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a}\left|q\right\rangle \tag{16}$$

式中，$a^\dagger$，$a$ 是光子产生算符和湮灭算符[27-28]，满足基本对易关系 $[a,a^\dagger]=1$. 事实上，已知厄密多项式 $H_n\left(q\right)$ 的乘积的母函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n!}H_n(p)H_n(q)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\exp\left[\frac{2tpq-t^2(p^2+q^2)}{1-t^2}\right] \tag{17}$$

令 $t=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$，$1-t^2=1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}$，则可以推导出

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha n}}{2^n n!}H_n(p)H_n(q)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}}{\sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}}\exp\left[\frac{2pq}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}-\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}(p^2+q^2)}{1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}}\right]=\\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}}{\sqrt{2\mathrm{i}\sin\alpha}}\exp\left[\frac{2pq}{2\mathrm{i}\sin\alpha}-\frac{(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}-1)(p^2+q^2)+(p^2+q^2)}{1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}}\right]=\\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}}{\sqrt{2\mathrm{i}\sin\alpha}}\mathrm{e}^{\left(p^2+q^2\right)}\exp\left[\frac{2pq}{2\mathrm{i}\sin\alpha}-\frac{(p^2+q^2)(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)}{2\mathrm{i}\sin\alpha}\right]=\\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}}{\sqrt{2\mathrm{i}\sin\alpha}}\mathrm{e}^{\left(p^2+q^2\right)/2}\exp\left[\frac{2pq}{2\mathrm{i}\sin\alpha}-\frac{p^2+q^2}{2\mathrm{i}\tan\alpha}\right]=\\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}}{\sqrt{2\mathrm{i}\sin\alpha}}\mathrm{e}^{\left(p^2+q^2\right)/2}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{p^2+q^2}{\tan\alpha}-\frac{2pq}{\sin\alpha}\right)\right]\end{aligned} \tag{18}$$

所以有

$$K_\alpha(p,q)\equiv\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha/2-\pi/4)}}{\sqrt{2\pi\sin\alpha}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{p^2+q^2}{\tan\alpha}-\frac{2pq}{\sin\alpha}\right)\right]=\mathrm{e}^{-\left(p^2+q^2\right)/2}\pi^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)n}}{2^n n!}H_n(p)H_n(q) \tag{19}$$

考虑到粒子数态的坐标表象所对应的波函数为

$$\left\langle q|n\right\rangle=\mathrm{e}^{-q^2/2}\frac{H_n(q)}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,2^n n!}}=\left\langle n|q\right\rangle \tag{20}$$

它也可以用 $H_n\left(Q\right)=:(2Q)^n:$ 立即导出，由于存在关系

$$\left|q\right\rangle\left\langle q\right|=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-q^2}:\mathrm{e}^{2qQ-Q^2}:=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-q^2}\sum_{n=0}^{\infty}:\frac{Q^n}{n!}H_n(q): \tag{21}$$

以及 $a\left|0\right\rangle=0$，$\left\langle m|n\right\rangle=\delta_{mn}$，所以可以计算出

$$\begin{aligned}\left\langle m|q\right\rangle\left\langle q|0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-q^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n\left(q\right)}{n!}\left\langle m\right|:\left(\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^n:\left|0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-q^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(q)}{\sqrt{2^n}\,n!}\left\langle m\right|:a^{\dagger n}:\left|0\right\rangle=\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-q^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(q)}{\sqrt{2^n n!}}\left\langle m|n\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-q^2}\frac{H_m(q)}{\sqrt{2^m m!}}\end{aligned} \tag{22}$$

在式(22)中如果 $n=0$，则 $H_0(q)=1$，从而得到 $\left|\left\langle q|0\right\rangle\right|^2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-q^2}$，即真空态的波函数为 $\left\langle q|0\right\rangle=\pi^{-1/4}\mathrm{e}^{-q^2/2}$，将其代入式(22)左边，于是就证明了式(20). 类似的，粒子数态的动量表象[29-30]所对应的波函数为

$$\left\langle p|n\right\rangle=\pi^{-1/4}\mathrm{e}^{-p^2/2}\frac{(-\mathrm{i})^n H_n(q)}{\sqrt{2^n n!}} \tag{23}$$

再结合方程 $\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|=1$，就可将式(19)改为

$$K_\alpha(p,q)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)n}\langle p|n\rangle\langle n|q\rangle=\langle p|e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a}\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|q\rangle=\langle p|e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a}|q\rangle \tag{24}$$

注意这里初态对应的是坐标本征态，终态对应的是动量本征态．于是分数Fourier变换关系式(15)用量子力学表达为

$$F_\alpha[f](p)=\int_{-\infty}^{+\infty}K_\alpha(p,q)f(p)\mathrm{d}q=\langle p|e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a}|f\rangle \tag{25}$$

式中，$e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a}$是产生分数Fourier变换所对应的算符．

## 3 分数傅里叶变换的可加性证明

分数傅里叶变换之所以在光纤通信(在quadratic graded-index介质中的传播)、量子光学和激光雷达等方面起着重要的作用，是因为其特征是具有可加性．事实上借助于式(24)和(25)式可以得到

$$\begin{aligned}(F_\alpha\circ F_\beta)[f](p)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}K_\alpha(p,p')\mathrm{d}q'\int_{-\infty}^{+\infty}K_\beta(p',q)f(p)\mathrm{d}q=\\ \int_{-\infty}^{\infty}\langle p|e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a}\left|q\right|_{q=p'}\rangle\mathrm{d}q'\langle p'|e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)a^\dagger a}|f\rangle\end{aligned} \tag{26}$$

可见要特别关注其中的算符 $\int_{-\infty}^{\infty}\left|q\right|_{q=p'}\rangle\mathrm{d}q'\langle p'|$. 利用量子力学的Fock表象中坐标和动量算符对应的本征态$|q\rangle$和$|p\rangle$的关系式

$$|q\rangle=\frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\left[-\frac{q^2}{2}+\sqrt{2}\,qa^\dagger-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right]|0\rangle \tag{27}$$

$$|p\rangle=\frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\left[-\frac{p^2}{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}pa^\dagger-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right]|0\rangle \tag{28}$$

结合真空投影算符的正规乘积形式

$$|0\rangle\langle 0|=:e^{-a^\dagger a}: \tag{29}$$

以及用IWOP技术积分给出

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\left|q\right|_{q=p'}\rangle\mathrm{d}q'\langle p'|=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q|q\rangle\langle p'|_{p'=q}=\\ &\int\frac{\mathrm{d}q}{\pi^{1/2}}\exp\left[-\frac{q^2}{2}+\sqrt{2}\,qa^\dagger-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right]|0\rangle\langle 0|\exp\left[-\frac{q^2}{2}-\sqrt{2}\,qa^\dagger+\frac{a^2}{2}\right]=\\ &\int\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}:\exp\left[-q^2+\sqrt{2}\,q(a^\dagger-\mathrm{i}a)-\frac{a^{\dagger 2}-a^2}{2}-a^\dagger a\right]:=\\ &:\exp\left[-(\mathrm{i}+1)a^\dagger a\right]:=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}a^\dagger a\right]\end{aligned} \tag{30}$$

再用算符公式

$$e^{\lambda a^\dagger a}=:\exp\left[(e^\lambda-1)a^\dagger a\right]: \tag{31}$$

可把式(31)化为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|q\right|_{q=p'}\rangle\mathrm{d}q'\langle p'|=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}a^\dagger a\right] \tag{32}$$

本文将 $e^{\mathrm{i}\pi a^\dagger a/2}$ 称为坐标—动量互换算符，主要原因在于

$$\begin{cases}\left|q'\right|_{q'=p}\rangle=e^{\mathrm{i}\pi a^\dagger a/2}|p\rangle\\ \langle p|e^{\mathrm{i}\pi a^\dagger a/2}=\langle q'|_{x'=p}\end{cases} \tag{33}$$

将式(30)代入式(26)可以得到

$$
\begin{aligned}
(F_\alpha \circ F_\beta)[f](p) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle p | \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha a^\dagger a} \big| | p' \rangle \mathrm{d}p' \langle p' | \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) a^\dagger a} | f \rangle = \\
\langle p | \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) a^\dagger a} | f \rangle = F_{\alpha+\beta}[f](p)
\end{aligned}
\tag{34}
$$

所以加法律得证.

# 4 结论

本文借助量子力学在的算符厄密多项式理论和编好序的积分理论,找出了生成分数傅里叶变换的算符,从而将经典分数傅里叶变换纳入了量子论的框架之中.然后分析了坐标—动量互换算符在分数傅里叶变换加法律规则中所起的作用,便于将来从量子光学方法发现经典光学的别的分数变换.

**参考文献**


[1] FAN Hong-yi, HU Li-yun. Optical Fresnel transformation and quantum tomography[J]. *Optics Communications*, 2009, **282**(18): 3734-3736.

[2] Xie Chuan-mei, FAN Hong-yi. A new theorem relating quantum tomogram to the Fresnel operator[J]. *Chinese Physics B*, 2011, **20**(6): 060303.

[3] FAN Hong-yi. Fractional Hankel transform studied by charge-amplitude state representations and complex fractional Fourier transformation[J]. *Optics Letters*, 2003, **28**(22): 2177-2179.

[4] JIA Li-juan, LIU Zheng-jun. Double image encryption algorithm based on random fractional fourier transform[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2009, **38**(4): 1020-1024.
贾丽娟,刘正君.基于随机分数傅里叶变换的双图像加密算法[J].光子学报, 2009, **38**(4): 1020-1024.

[5] OZAKTAS H M, ARIKAN O, KUTAY M A, *et al*. Digital computation of the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, **44**(9): 2141-2150.

[6] WANG Hong-xia, HE Jun-fa, ZHAO Xuan-ke, *et al*. Implementation of the multiple-spectrum fractional fourier transform using multi-focus hololens [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(9): 1109-1111.
王红霞,何俊发,赵选科,等.用多焦点全息透镜实现多重谱分数傅里叶变换[J].光子学报, 2002, **31**(9): 1109-1111.

[7] FAN Yue, FAN Hong-yi. New eigenmodes of propagation in quadratic graded index media and complex fractional Fourier transform [J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2003, **39**(1): 97-100.

[8] FAN Hong-yi, LI Hong-qi, XU Xing-lei. New route to deducing integration formulas by virtue of the IWOP technique[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2011, **55**(3): 415-417.

[9] FAN Hong-yi, ZAIDI H R. Application of IWOP technique to the generalized Weyl correspondence[J]. *Physics Letters A*, 1987, **124**(6) : 303-307.

[10] FAN Hong-yi. Normally ordering some multimode exponential operators by virtue of the IWOP technique[J]. *Journal of Physics A*, 1990, **23**(10): 1833-1839.

[11] FAN Hong-yi, LU Hai-liang, GAO Wei-bo, *et al*. ABCD rule for Gaussian beam propagation in the context of quantum optics derived by the IWOP technique[J]. *Annals of Physics*, 2006, **321**(9) : 2116-2127.

[12] ISRAEL M, MINIIOWITZ R. An efficient finite element method for nonconvex waveguide based on Hermitian polynomials[J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, 1987, **35**(11): 1019-1026.

[13] MCWHIRTER J G, BAXTER P D, COOPER T. An EVD algorithm for Para-Hermitian polynomial matrices[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**: 2158-2169.

[14] WIENER N. Hermitian polynomials and Fourier analysis.[J]. *Journal of Mathematics and Physics*, 1929, **18**: 70-73.

[15] FAN Hong-yi, CHEN Jun-hua. Normal ordering of the Dirac radial momentum operator and the power of radial coordinate operators by virtue of the IWOP technique[J]. *Journal of Physics A General Physics*, 2001, **34**(49): 10939.

[16] LIU Han-jun, WANG Xiao-qin. Simple realization of normal and antinormal ordering product of boson operators for SU(1,1) lie algebra[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2001, **30**(4): 400-402.
刘汉俊,王晓芹.SU(1,1)李代数玻色算符正规和反正规乘积的简单实现[J].光子学报, 2001, **30**(4): 400-402.

[17] WEISS G H, MARADUDIN A A. The baker-hausdorff formula and a problem in crystal physics [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1962, **3**(4): 771-777.

[18] KOLSRUD M. Maximal reductions in the Baker-Hausdorff formula[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1993, **34**(1): 270-285.

[19] YU Zhao-xian, ZHANG De-xing, LIU Ye-hou. The algebraic structure of two-parameter deformed two-mode bose operators and their application[J]. *Acta Photonica Sinica*, 1997, **26**(10): 877-881.
于肇贤,张德兴,刘业厚.双参数变形双模玻色算符的代数结构及其应用[J].光子学报, 1997, **26**(10): 877-881.

[20] YU Hai-jun, ZHONG Guo-bo, MA Jian-guo, *et al*. Ridgelet transform research based on the coordinate representation

[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(13): 134205

余海军，钟国宝，马建国，等. 基于坐标表象的脊波变换研究[J]. 物理学报，2013，**62**(13)：134205.

[21] FAN Hong-yi, TANG Xu-bing. Operator Fredholm integration equation in intermediate coordinate-momentum representation and its analogue to thermo conduction equation[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2008, **49**(5): 1169-1172.

[22] ZHANG Zhong-can, HU Chen-guo. Path integral of the angular momentum eigenstates evolving with the parameter linked with rotation angle under the space rotation transformation[J]. *High Energy Physics and Nuclear Physics*, 1998, **22**(2): 153-161.

张忠灿，胡陈果. 在空间转动变换下的角动量本征态随转角的参变数演变的路径积分[J]. 高能物理与核物理，1998，**22**(2)：153-161.

[23] FAN Hong-yi. Inverse operators and some new completeness relations in q-deformed Fock space[J]. *Physics Letters A*, 1994, **191**(5): 347-351.

[24] FAN Hong-yi, YE Xiong. Common eigenstates of two particles' center-of-mass coordinates and mass-weighted relative momentum[J]. *Physical Review A*, 1995, **51**(4): 3343-3346.

[25] FAN Hong-yi. Time evolution of the Wigner function in the entangled-state representation[J]. *Physical Review A*, 2002, **65**(6): 064102.

[26] YU Li, LU Ying-yang, ZENG Xiao-ming. Deriving the integral representation of a fractional Hankel transform from a fractional Fourier transform[J]. *Optics Letters*, 1998, **23**(15):1158-1160.

[27] YANG Zhi-yong, HOU Xun. The effects of time/frequency squeezing-frequency/time expanding in quantum systems and their nonclassica properties[J]. *Acta Photonica Sinica*, 1998, **27**(9): 769-777.

杨志勇，侯洵. 量子体系中的时域压缩-频域展宽正、逆效应及其非经典性[J]. 光子学报，1998，**27**(9)：769-777.

[28] MANOHAR A V. Bosonic operator methods for the quark model[J]. *Physical Review D*, 2004, **70**(1):014004.

[29] DONG Jian-ping, XU Ming-yu. Some solutions to the space fractional Schrodinger equation using momentum representation method[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2007, **48**(7):072105.

[30] CHEN Zong-yun, HUANG Nian-ning, ZHOU Yi-chang. On the functional evaluation of effective potential in scalar QED[J]. *Acta Physica Sinica*, 1982, **31**(5): 660-663.

陈宗蕴，黄念宁，周义昌. 关于标量量子电动力学有效势的泛函算法[J]. 物理学报，1982，**31**(5)：660-663.

**Foundation item**: National Natural Science Foundation of China (No.1775208), Natural Science Foundation of Anhui Higher Education Institutions of China (No. KJ2019A0688), Key Projects of Huainan Normal University(No. 2019XJZD04)