

引用格式: LU Chang-ming, GAO Xin, LI Xi-yu, *et al.* A Method for Evaluating Medium and High-earth Orbit Object Telescope's Precision by Beidou's Precise Ephemeris[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2020, 49(10):1012001

陆长明,高昕,李希宇,等.基于北斗卫星精密星历的中高轨望远镜测量精度标定方法[J].光子学报,2020,49(10):1012001

# 基于北斗卫星精密星历的中高轨望远镜测量 精度标定方法

陆长明<sup>1,2,3</sup>,高昕<sup>2</sup>,李希宇<sup>2</sup>,谢梅林<sup>1</sup>,李治国<sup>1</sup>

(1 中国科学院西安光学精密机械研究所,西安 710119)

(2 北京跟踪与通信技术研究所,北京 100094)

(3 中国科学院大学,北京 100190)

**摘 要:**针对中高轨碎片光电观测望远镜(简称中高轨望远镜)野外精度标定手段有限的难题,理论分析利用国产北斗导航卫星系统鉴定天文定位和轴系定位测量精度的方法,通过分析卫星覆盖性、轨道精度和亮度等因素研究方法的可行性.对定期公布的数据间隔约为 5 min 的精密星历进行拉格朗日插值处理,并进行坐标转换,解算望远镜观测时刻在天球赤道坐标系中卫星相对测站的视赤经和视赤纬以及卫星在测站坐标系中的方位值和俯仰值,作为理论真值鉴定天文定位和轴系定位测量精度.利用此方法检测某中高轨望远镜天文定位精度优于 2",轴系定位精度优于 7".

**关键词:**北斗导航卫星系统;光电望远镜;指向测量精度;天文定位;轴系定位

中图分类号:V11

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20204910.1012001

## A Method for Evaluating Medium and High-earth Orbit Object Telescope's Precision by Beidou's Precise Ephemeris

LU Chang-ming<sup>1,2,3</sup>, GAO Xin<sup>2</sup>, LI Xi-yu<sup>2</sup>, XIE Mei-lin<sup>1</sup>, LI Zhi-guo<sup>1</sup>

(1 Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics of CAS, Xi'an 710119, China)

(2 Beijing Institute of Track and Telecommunication Technology, Beijing 100094, China)

(3 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract:** In order to solve the lacking of calibration means when working in the field, the Beidou Navigation Satellite System(BDS) is used to evaluate telescopes' astronomy and axis orientation precision, which survey the Medium And High Earth Orbit Objects(MHEO). This research is dedicated to deduce the principle of astronomy and axis orientation, and testify the feasibility of evaluating the electro-optical telescope's accuracy with BDS by analysing the satellites' coverage, orbit precision and brightness, which has big diameter. Firstly, we interpolate the regular BDS precise ephemeris by Lagrange polynomial, whose data interval is 5 minutes. With coordinate conversion, we get the apparent ascension and apparent declination in the agreement celestial coordinate system, azimuth and pitch in the station coordinate system, which are the true value for astronomy and axis orientation precision evaluation. A MHEO telescope's astronomy orientation precision is superior to 2" and axis orientation precision is superior to 7" by this method.

**Key words:** Beidou navigation satellite system; Electro-optical telescope; Orientation precision; Astronomy orientation; Axis orientation

基金项目:国家高技术研究发展计划重大专项工程(No.2015AA8085038)

第一作者:陆长明(1981—),男,助理研究员,博士研究生,主要研究方向为空间目标探测与成像. Email: changminglu@126.com

导师(通讯作者):高昕(1973—),男,研究员,博士,主要研究方向为计算光学成像技术、空间目标成像技术等. Email: gaixin526@sina.com

收稿日期:2020-05-11;录用日期:2020-06-11

<http://www.photon.ac.cn>

## 0 引言

中高轨空间目标指轨道高度大于 10 000 km 的空间目标,包括火箭残骸、卫星碎片、卫星等,中高轨道上分布着导航定位、全球通信等高价值卫星.为了监测并预报太空环境变化,评估空间威胁,确保航天发射路径的畅通无阻,规避在轨在用卫星与空间碎片碰撞,保护太空中现有卫星安全,需要中高轨空间碎片和卫星进行编目管理.探测中高轨目标的主要手段有天基光学、地基雷达和地基光学.天基光学的成本较高,可视区域不受控制,地基雷达目前还难以探测到中高轨道上的空间目标,并且雷达是主动探测、易被发现、体积又较大、不易于全球布站,地基光学具有作用威力远、体积小、机动灵活、便于全球部署,因此光电测量是目前较为有效的中高轨空间碎片测量手段<sup>[1]</sup>.由于中高轨目标距离地面观测站较远,目标亮度一般暗于 14 星等,考虑到目标运动特性、恒星划线等影响,不适宜采用天文学中常用的长时间曝光来提高设备探测能力,因此观测中高轨空间碎片的光电望远镜(简称中高轨望远镜)一般采用高灵敏度相机,口径直径大于 300 mm,以实现暗弱目标探测.

中高轨望远镜采用两种测角定位方式:1)以观测者为测站坐标系,轴系测角给出目标的方位角和俯仰角;2)通过望远镜观测同一视场恒星的位置,测量目标与恒星的相对量,从而给出目标在以观测者为中心天球赤道坐标系中的视赤经和视赤纬<sup>[2]</sup>.中高轨望远镜外场精度检测受条件限制,无法采用室内平行光管进行检测<sup>[3]</sup>,常用方法有飞机校飞和静态拍星加所内动态扰动两种<sup>[4]</sup>,宫志华等还研究了一种光学经纬仪动态精度简易鉴定的软方法<sup>[5]</sup>.静态拍星加所内动态扰动的方法无法体现望远镜真实状态,飞机校飞组织复杂、耗费较高,不适用于望远镜日常精度标校.因此科研工作者考虑采用卫星鉴定中高轨碎片观测望远镜的测量精度.卫星可以利用低轨激光定标星和导航卫星标定望远镜测量精度<sup>[6]</sup>,由于低轨激光定标星绕地球运行速度较快,无法保证任意时刻在观测站上空都有满足观测条件的激光定标星.全球卫星导航系统一般在任意位置上空均保持有 3~4 颗卫星,并且其运动特性与中高轨卫星、碎片完全一致,因此是鉴定中高轨碎片观测望远镜测量精度的最佳选择.随着自主可控要求的不断提高,利用完全国产的北斗导航卫星检测中高轨望远镜天文定位和轴系定位精度的方法受到关注.

本文探讨了中高轨望远镜的天文定位和轴系定位测量原理,详细分析了北斗导航卫星的覆盖范围、亮度和精密星历精度,研究了基于北斗卫星鉴定中高轨碎片观测光电望远镜测量精度的可行性.北斗卫星精密星历定期公布和更新,对公布的数据采用拉格朗日方法进行插值.星历是大地直角坐标系数据,解算望远镜观测时刻卫星以观测者为中心天球赤道坐标系中的视赤经和视赤纬、卫星在测站坐标系中的方位俯仰值,以此作为理论值,鉴定中高轨望远镜的天文定位和轴系定位测量值的精度.最后利用此方法验证某中高轨望远镜的天文定位和轴系定位精度.此方法可用于中高轨望远镜精度检测和日常标定.

## 1 中高轨望远镜测量原理

### 1.1 天文定位原理

中高轨望远镜天文定位测量流程与传统照相定位方式基本一致,获取目标图像后,根据图像中目标和恒星(定标星)的相对位置,在定标星理想坐标和实测坐标之间建立映射关系,最终给出目标相对观测站的位置(视赤经、视赤纬).天文定位测量元素视赤经  $\alpha$ 、视赤纬  $\delta$  的定义如图 1(a)所示<sup>[2]</sup>.图 1(a)为天球赤道坐标系平移到观测站后的示意图, $O$  为观测站中心, $X$  指向春分点  $\gamma$ , $Z$  轴与地球自转轴平行,指向北天极.纬角  $\angle DOM$  称为视赤纬  $\delta$ ,经角  $\angle XOD$  称为视赤经  $\alpha$ .

天文定位利用目标和恒星同帧画幅图像,计算目标确切角位置信息.当与目标在同一画幅上已知恒星达到一定数量后,天文定位根据同画幅中多颗恒星位置,计算目标的精准位置.天文定位处理主要在定标星的理论值  $(\xi, \zeta)$  和实测值  $(x_s, y_s)$  之间建立映射关系.理论值是在切平面上定义的直角坐标系,定标星在此坐标系中的理想坐标和其赤道坐标  $(\alpha_1, \delta_1)$  是一一对应关系,计算模型为

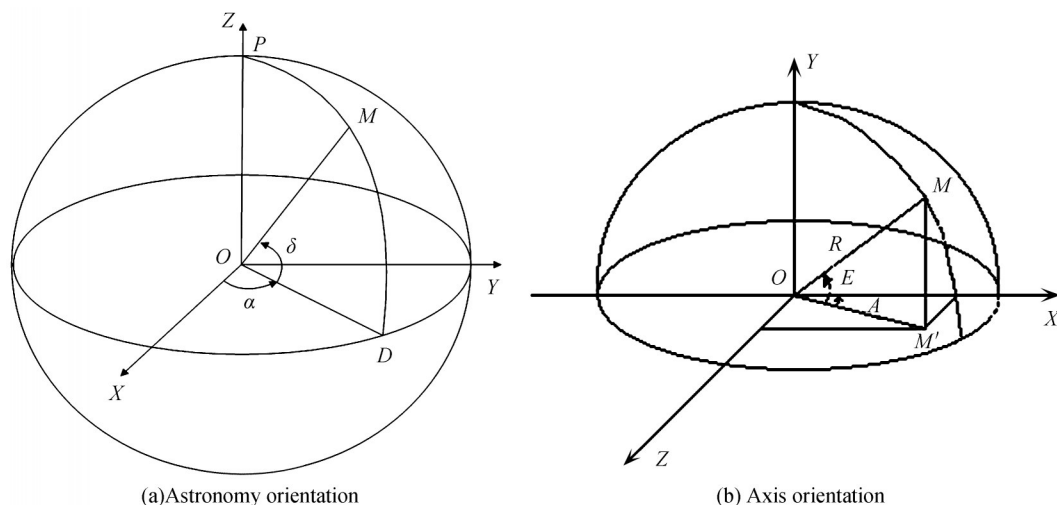


图1 天文定位和轴系定位原理示意图  
Fig.1 The theory of astronomy and axis orientation

$$\begin{cases} \xi = \frac{\cos(\delta_1)\sin(\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin(\delta_1)\sin(\delta_0) + \cos(\delta_1)\cos(\delta_0)\cos(\alpha_1 - \alpha_0)} \\ \zeta = \frac{\sin(\delta_1)\cos(\delta_0) - \cos(\delta_1)\sin(\delta_0)\cos(\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin(\delta_1)\sin(\delta_0) + \cos(\delta_1)\cos(\delta_0)\cos(\alpha_1 - \alpha_0)} \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $(\alpha_0, \delta_0)$  为探测器图像中心对应的赤道坐标.

定标星的实测坐标  $(x_s, y_s)$  是定标星在探测器图像对应的横向为  $x$  轴, 纵向为  $y$  轴坐标系下的坐标. 实测坐标系是以探测器图像的横向和纵向为坐标轴的直角坐标系. 在此坐标系下, 实测坐标  $(x_s, y_s)$  的计算, 一般采用修正矩分析法, 计算模型为

$$\begin{cases} x_s = \frac{\sum_{i,j} x_i [I(x_i, y_i) - I_b]}{\sum_{i,j} I(x_i, y_i)} \\ y_s = \frac{\sum_{i,j} y_i [I(x_i, y_i) - I_b]}{\sum_{i,j} I(x_i, y_i)} \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $I(x_i, y_j)$  表示  $(x_i, y_j)$  灰度值,  $I_b$  表示探测器图像的背景强度.

采用探测器图像处理的六常数模型式(3)和十二常数模型式(4), 建立理想坐标和实测坐标之间的映射关系<sup>[2]</sup>. 六常数模型需要大于3个定标星, 十二常数模型模型需要定标星个数大于6个.

$$\begin{cases} \xi = a + b \cdot x_s + c \cdot y_s \\ \zeta = d + e \cdot x_s + f \cdot y_s \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \xi = a_1 + b_1 \cdot x_s + c_1 \cdot y_s + d_1 \cdot x_s^2 + e_1 \cdot x_s \cdot y_s + f_1 \cdot y_s^2 \\ \zeta = a_2 + b_2 \cdot x_s + c_2 \cdot y_s + d_2 \cdot x_s^2 + e_2 \cdot x_s \cdot y_s + f_2 \cdot y_s^2 \end{cases} \quad (4)$$

## 1.2 地平式望远镜轴系定位原理

大口径天文望远镜一般采用地平式机架. 地平式望远镜为三轴跟踪结构, 三轴分别为垂直轴、水平轴和视轴, 通过绕垂直轴与水平轴旋转实现视轴的指向天区任意方向. 在垂直轴和水平轴上分别安装轴角编码器, 测量望远镜视轴指向的方位角  $A$  和俯仰角  $E$ ,  $A$  取值范围为  $0^\circ \sim 360^\circ$ , 由观测站正北向东顺时针起计,  $E$  取值范围为  $-90^\circ \sim 90^\circ$ , 由地平向天顶起计. 望远镜跟踪目标获取图像后, 判读出目标偏离视轴中心的偏离量, 即脱靶量  $\Delta x$  和  $\Delta y$ , 综合编码器数据、时间信息、望远镜参数等, 利用拍标拍星参数进行轴系误差模型修正, 修正模型有单项差修正模型和球谐函数修正模型, 式(6)是单向差修正模型, 式(8)是球谐函数修正模型, 利用气象数据进行大气折射修正, 给出目标相对测站的方位角  $A$  和俯仰角  $E$ . 地平式望远镜力学优越性

高、回转半径小及安装简单,但在天顶方向因方位角速度无穷大导致存在跟踪盲区。

轴系定位方式是望远镜系统基本的定位方式,将目标的脱靶量、望远镜指向位置、曝光中心时间和误差修正量进行合成,得到被测目标的轴系测量数据。轴系定位方式算法简单,假设 CCD 图像中心坐标为  $(x_0, y_0)$ ,目标星像的重心  $(x_s, y_s)$ ,图像的比例尺为  $(S_x, S_y)$ ,望远镜系统的指向  $(A_0, E_0)$ ,则目标的方位  $A_s$ 和仰角  $E_s$ 的计算公式为

$$\begin{cases} E_s = E_0 \pm (y_s - y_0) \cdot S_y \\ A_s = A_0 \pm (x_s - x_0) \cdot S_x / \cos(E_s) \end{cases} \quad (5)$$

式中,加号和减号的选取和探测器图像上方位和仰角增大的方向有关。

修正测量数据中系统误差的方法为:用拍星拍标求解出的照准差、水平轴与垂直轴的不垂直度、零位差、定向差、视轴差、垂直轴误差,按式(6)对测量数据进行修正。

$$\begin{cases} A_i = A_i + f_{A_i}(A_i, E_i) \\ E_i = E_i + f_{E_i}(A_i, E_i) \\ f_{A_i}(A_i, E_i) = V \sin(A_h - A_i) \tan(E_i) + k \tan(E_i) + c \sec(E_i) + g \\ f_{E_i}(A_i, E_i) = l - V \cos(A_h - A_i) + d \cos(E_i) \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $A_i$ 是测得的目标方位角;  $E_i$ 是测得的目标俯仰角;  $A_h$ 是垂直轴倾斜方向的方位角;  $k$ 是水平轴与垂直轴的不垂直度,为水平轴倾斜误差;  $V$ 是垂直轴误差;  $c$ 是照准差;  $g$ 是定向差;  $l$ 是零位差;  $d$ 是俯仰角为零时的视轴扰动。

使用球谐误差修正模型

$$F(\theta, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ A_l^0 P_l^0(\cos\theta) + \sum_{m=1}^l [A_l^m \cos(m\lambda) + B_l^m \sin(m\lambda)] P_l^m(\cos\theta) \right\} \quad (7)$$

式中,  $P_l^m(\cos\theta)$ 是连带勒让德多项式,表示为  $P_l^m(\cos\theta) = \frac{(1 - \cos^2\theta)^{\frac{m}{2}}}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^{l+m}}{d(\cos\theta)^{l+m}} (\cos^2\theta - 1)^l$

地平式望远镜球谐函数误差模型近似为

$$\begin{aligned} f_A(A, E) \sin E &= A_0 + A_1 \cos E + A_2 \cos A \sin E + A_3 \sin A \sin E + A_4 \cos^2 E + \\ &A_5 \cos A \sin E \cos E + A_6 \sin A \sin E \cos E + A_7 \cos^3 E + \\ &A_8 \cos A \sin E \cos^2 E + A_9 \sin A \sin E \cos^2 E + A_{10} \cos^4 E + \\ &A_{11} \cos A \sin E \cos^3 E + A_{12} \sin A \sin E \cos^3 E \\ f_B(A, E) \sin E &= B_0 + B_1 \cos E + B_2 \cos A \sin E + B_3 \sin A \sin E + B_4 \cos^2 E + \\ &B_5 \cos A \sin E \cos E + B_6 \sin A \sin E \cos E + B_7 \cos^3 E + \\ &B_8 \cos A \sin E \cos^2 E + B_9 \sin A \sin E \cos^2 E + B_{10} \cos^4 E + \\ &B_{11} \cos A \sin E \cos^3 E + B^{12} \sin A \sin E \cos^3 E \end{aligned} \quad (8)$$

大气扰动对轴系测量的结果有一定影响,需要对其进行修正。大气折射对方位角测量结果没有影响,对俯仰角的折射效应称为蒙气差,可采用大气折射修正模型校正蒙气差对测量值的影响<sup>[7]</sup>。

## 2 可行性分析

### 2.1 覆盖可行性分析

北斗卫星导航系统的星座系统由 30 颗中地球轨道(Middle Earth Orbit, MEO)卫星,3 颗地球静止轨道(Geostationary Earth Orbit, GEO)卫星和 3 颗倾斜地球同步轨道(Inclined GeoSynchronous Orbit, IGSO)卫星组成,在任意时刻有合适数量的北斗卫星被地基光电望远镜可视,如图 2。



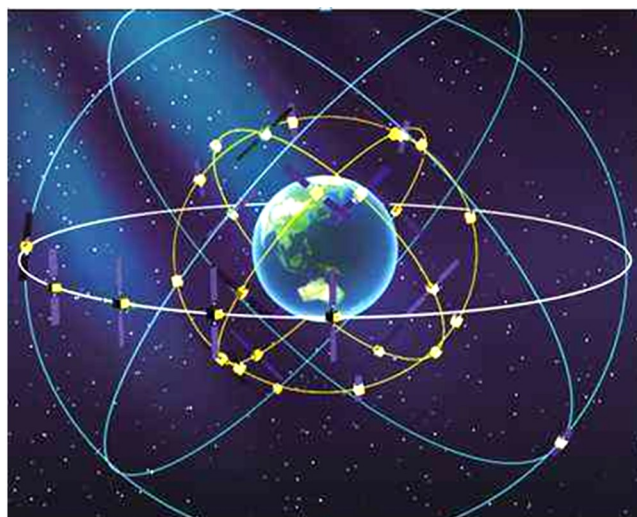


图2 北斗导航卫星系统示意图  
Fig.2 Beidou navigation system's satellites

## 2.2 精度可行性分析

### 2.2.1 北斗精密星历获取

北斗导航卫星精密星历的下载地址是 <ftp://cdis.gsfc.nasa.gov/pub/gps/products/mgex/>,如图3所示.精密星历给出了北斗卫星每隔5 min在WGS-84坐标系中的三维坐标及卫星钟差.对精密星历中的三维坐标进行插值处理,解算观测时刻北斗卫星的精密坐标.世界大地坐标系-84(World GeodicalSystem-84, WGS-84)是地心地固坐标系,坐标原点为地球质心,Z轴指向BIH1984.0定义的协议地球极方向,X轴指向BIH1984.0起始子午面和赤道的交点,Y轴与X轴和Z轴构成右手系.

### FTP 目录 /pub/gps/products/mgex/ 位于 cdis.gsfc.nasa.gov

#### 转到高层目录

02/06/2018 12:00上午 目录 [1660](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1661](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1662](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1663](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1664](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1665](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1666](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1667](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1668](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1669](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1670](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1671](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1672](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1673](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1674](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1675](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1676](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1677](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1678](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1679](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1680](#)  
 02/06/2018 12:00上午 目录 [1681](#)

#### 转到高层目录

04/10/2020 07:29上午 63,562 [CODMGXFIN\\_20200890000\\_01D\\_01D\\_OSB\\_B1A.gz](#)  
 04/10/2020 07:28上午 709,793 [CODMGXFIN\\_20200890000\\_01D\\_05M\\_ORB.SP3.gz](#)  
 04/10/2020 07:28上午 3,980,431 [CODMGXFIN\\_20200890000\\_01D\\_30S\\_CLK.CLK.gz](#)  
 04/10/2020 07:27上午 548 [CODMGXFIN\\_20200890000\\_03D\\_12H\\_ERP.ERP.gz](#)  
 04/10/2020 07:29上午 63,101 [CODMGXFIN\\_20200900000\\_01D\\_01D\\_OSB\\_B1A.gz](#)  
 04/10/2020 07:29上午 713,057 [CODMGXFIN\\_20200900000\\_01D\\_05M\\_ORB.SP3.gz](#)  
 04/10/2020 07:28上午 4,014,268 [CODMGXFIN\\_20200900000\\_03D\\_12H\\_ERP.ERP.gz](#)  
 04/10/2020 07:29上午 552 [CODMGXFIN\\_20200910000\\_01D\\_01D\\_OSB\\_B1A.gz](#)  
 04/10/2020 07:29上午 63,162 [CODMGXFIN\\_20200910000\\_01D\\_05M\\_ORB.SP3.gz](#)  
 04/10/2020 07:28上午 712,780 [CODMGXFIN\\_20200910000\\_01D\\_30S\\_CLK.CLK.gz](#)  
 04/10/2020 07:28上午 4,005,772 [CODMGXFIN\\_20200910000\\_03D\\_12H\\_ERP.ERP.gz](#)  
 04/10/2020 07:29上午 556 [CODMGXFIN\\_20200920000\\_01D\\_01D\\_OSB\\_B1A.gz](#)  
 04/10/2020 07:30上午 62,564 [CODMGXFIN\\_20200920000\\_01D\\_05M\\_ORB.SP3.gz](#)  
 04/10/2020 07:29上午 712,854 [CODMGXFIN\\_20200920000\\_01D\\_30S\\_CLK.CLK.gz](#)  
 04/10/2020 07:29上午 4,007,904 [CODMGXFIN\\_20200920000\\_03D\\_12H\\_ERP.ERP.gz](#)  
 04/10/2020 07:30上午 551 [CODMGXFIN\\_20200930000\\_01D\\_01D\\_OSB\\_B1A.gz](#)  
 04/10/2020 07:29上午 62,581 [CODMGXFIN\\_20200930000\\_01D\\_05M\\_ORB.SP3.gz](#)  
 04/10/2020 07:28上午 712,827 [CODMGXFIN\\_20200930000\\_01D\\_30S\\_CLK.CLK.gz](#)  
 04/10/2020 07:27上午 4,008,338 [CODMGXFIN\\_20200930000\\_03D\\_12H\\_ERP.ERP.gz](#)  
 04/10/2020 07:27上午 551 [CODMGXFIN\\_20200940000\\_01D\\_01D\\_OSB\\_B1A.gz](#)  
 04/10/2020 07:29上午 62,685 [CODMGXFIN\\_20200940000\\_01D\\_05M\\_ORB.SP3.gz](#)  
 04/10/2020 07:27上午 720,687 [CODMGXFIN\\_20200940000\\_01D\\_30S\\_CLK.CLK.gz](#)

图3 北斗卫星精密星历下载示意图  
Fig.3 Download of Beidou satellites' precise ephemeris

### 2.2.2 插值处理

精密星历的采样率为5 min,而中高轨望远镜测量数据采样率一般为几秒,因此需要采用合理的模型进行插值或拟合,以获取观测时刻北斗卫星的精密位置.对精密星历进行插值处理主要有切比雪夫多项式、拉格朗日多项式、三角函数多项式、逐次线性内插等方法,其中拉格朗日多项式插值法<sup>[2]</sup>被广泛采用,拉格朗日多项式插值法的定义为

设  $y=f(x)$  是区间  $[a, b]$  上的实函数,  $x_i (i=0, 1, \dots, n)$  是  $[a, b]$  上  $n+1$  个互异实数, 且  $y=f(x)$  在  $x_i$  的值为  $y_i=f(x_i)$ , 则区间  $[a, b]$  上任意一点  $x$  的  $n$  阶拉格朗日插值多项式的代数表达式为<sup>[2-3]</sup>

$$f(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (9)$$

式中, 点  $x_i (i=0, 1, \dots, n)$  称为插值节点, 包含插值节点的区间  $[a, b]$  称为插值区间.

用拉格朗日多项式进行卫星轨道的内插计算, 当多项式的阶数取 12 阶时, 北斗 GEO 在  $(x, y, z)$  三个方向的误差为 (1.95 cm, 1.75 cm, 0.94 cm), 三维综合误差约为 2.78 cm. 北斗 IGSO 的精度约为在  $(x, y, z)$  三个方向的误差为 (1.38 cm, 1.59 cm, 1.80 cm), 三维综合误差约为 2.77 cm. 北斗 MEO 的精度约为在  $(x, y, z)$  三个方向的误差为 (16.70 cm, 6.91 cm, 3.24 cm), 三维综合误差约为 18.36 cm<sup>[9]</sup>.

### 2.2.3 误差分析

北斗卫星的位置可以从广播星历和精密星历中解算, 广播星历是接收机直接从天线接收到的卫星所发射的信号中分离出来的, 具有实时性. 精密星历是通过在地面上的固定已知精确坐标的观测点联合观测计算出来的卫星轨道. 精密星历的精度高于广播星历.

为了系统地评估北斗卫星导航系统广播轨道的精度及其变化情况, 统计分析 2014 至 2017 年的广播星历轨道误差, 结果表明: 从 2014 年至 2017 年, IGSO 和 MEO 卫星轨道精度一直保持稳定, 其三维精度 RMS 基本在 1 m 左右, 而 GEO 卫星的三维精度从十多米提升至 3 m 左右.

### 2.2.4 鉴定精度的可行性分析

国内针对北斗卫星轨道精度开展了较多的研究<sup>[10-16]</sup>, 对广播星历的轨道精度进行分析和统计, 从 2014 年至 2017 年, IGSO 和 MEO 卫星轨道精度一直保持稳定, 其三维精度 RMS 基本在 1 m 左右, 而 GEO 卫星的三维精度从十多米提升至 3 m 左右, 系统整体三维精度从 6 m 左右提升至 2 m 左右<sup>[13]</sup>. 北斗 GEO 卫星轨道高度约 36 000 km, 轨道误差折算至测量站约 0.015", 北斗 IGSO 卫星轨道高度约 35 800 km, 误差折算至测量站约 0.005", 北斗 MEO 轨道高度一般为 21 600 km, 轨道误差折算至测量站约 0.008".

对精密星历进行拉格朗日多项式插值法, 当多项式的阶数取 12 阶时, 北斗 GEO 在  $(x, y, z)$  三个方向的误差为 (1.95 cm, 1.75 cm, 0.94 cm)<sup>[9]</sup>, 三维综合误差约为 2.78 cm, 误差折算至测量站约 0.000 2". 北斗 IGSO 的精度约为在  $(x, y, z)$  三个方向的误差为 (1.38 cm, 1.59 cm, 1.80 cm), 三维综合误差约为 2.77 cm, 误差折算至测量站约 0.000 2". 北斗 MEO 的精度约为在  $(x, y, z)$  三个方向的误差为 (16.70 cm, 6.91 cm, 3.24 cm), 三维综合误差约为 18.36 cm, 误差折算至测量站约 0.001 5".

中高轨望远镜的测量精度一般为角秒量级, 按照精度检测理论, 北斗广播星历和精密星历的轨道精度完全能够满足中高轨望远镜测量精度鉴定的要求.

## 2.3 亮度分析

### 2.3.1 亮度模型

分析卫星的星等亮度有实验室模拟测试法、计算机切片仿真法、数值模型法<sup>[16-19]</sup>, 分析中高轨望远镜能否探测到北斗卫星, 对卫星亮度模型的精确性要求不高, 因此采用传统圆柱形粗糙表面亮度经验模型为

$$m = 1.0 - 2.5 \lg(r) - 2.5 \lg(D \times L) + 5 \lg\left(\frac{R}{100}\right) - 2.5 \lg[\sin(\phi) \sin(\varphi)] + \Delta m(\sigma) \quad (10)$$

式中,  $r$  为目标反射率,  $D$  为圆柱体直径,  $L$  为圆柱体长度,  $R$  为目标距离观测站的距离,  $\varphi$  为太阳入射方向与卫星轴线之间的夹角,  $\psi$  为测站观测方向与卫星轴线之间的夹角,  $\sigma$  为太阳至卫星和观测站至卫星两连线之间的夹角, 称为太阳相位角.  $\Delta m(\sigma)$  是与太阳相位角相关的函数,  $\Delta m(\sigma) = -2.5 \lg[\sin(\sigma) + (\pi - \sigma) \cos(\sigma)]$ ,  $\sigma$  取值范围为  $0^\circ \sim 180^\circ$ .

### 2.3.2 卫星尺寸

GEO 卫星高度 35 786 km, 展开后的尺寸为 12 m  $\times$  20 m  $\times$  5 m; IGSO 卫星为倾斜地球同步轨道, 倾角为  $55.9^\circ$ , 高度为 35 786 km, 展开后的尺寸为 10 m  $\times$  20 m  $\times$  5 m; MEO 卫星为中地球轨道, 倾角为  $55.3^\circ$ , 高度为 21 528 km, 展开后的尺寸为 2.5 m  $\times$  17 m  $\times$  3 m. 假设望远镜布设于地球上较远距离, 地球半径按照 6 400 km 计算, 则北斗 GEO 和 IGSO 距离观测站斜距约 43 000 km, MEO 距离观测站的斜距约为 29 000 km, 卫星反

射太阳光模型中,卫星近似为圆柱体,直径分别取为5 m、5 m和2.5 m,长度分别取为12 m、10 m和2.5 m,卫星反射率取为0.6,太阳入射方向与卫星轴线之间的夹角为60度,观测方向与卫星轴线之间的夹角为40°.

太阳相位角对目标亮度影响较大,为了获取较高的探测能力,要求观测时太阳仰角在地平线以下9°以上,北斗卫星还必须被照亮,因此适宜观测条件如图4所示,由图4可得,GEO和IGSO的太阳相位角范围为7°~81°,MEO的太阳相位角范围为10°~81°,不同相位角下北斗卫星的亮度如图5所示.由于在参数选择时,卫星尺寸按照最小计算,所以卫星理论应亮于图中的值.

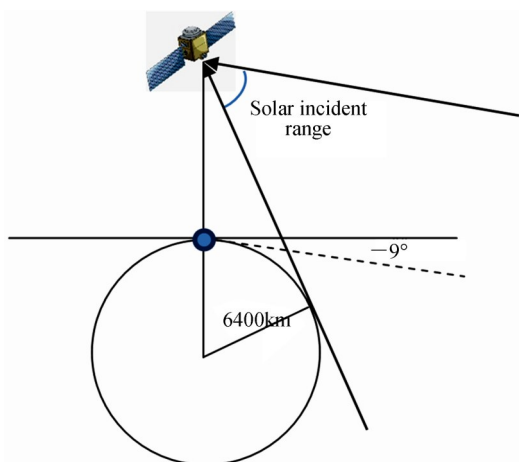


图4 太阳入射范围示意图  
Fig.4 Incidence range of sun light

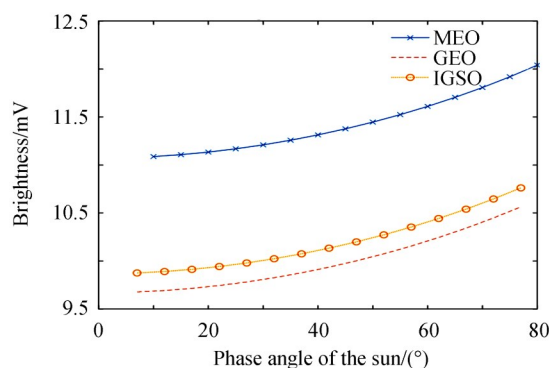


图5 不同太阳相位角下的北斗卫星亮度  
Fig.5 The brightness of Beidou satellites

由图4可知,按照太阳反射模型计算,北斗GEO和IGSO亮于11 m<sub>v</sub>,北斗MEO亮于12 m<sub>v</sub>.这与地基光电望远镜对北斗卫星测光结果基本一致.对于中高轨碎片望远镜,其口径直径一般大于300 mm,采用高灵敏度探测器和长曝光模式,其探测能力一般优于14 m<sub>v</sub>,因此中高轨望远镜可以探测到北斗导航系统的GEO、MEO、IGSO卫星.根据以上分析,北斗卫星的亮度可以被中高轨望远镜探测到,其广播星历和精密星历的轨道精度能够满足鉴定中高轨望远镜测量精度的要求,所以采用北斗卫星标定中高轨望远镜的测量精度在技术上是完全可行的.

### 3 测量精度鉴定方法

利用北斗卫星鉴定大口径望远镜的测量精度,首先必须获取望远镜测量时刻北斗卫星的精确位置,然后进行坐标转换,计算测量时刻北斗卫星相对测量站的视赤经、视赤纬、方位角和俯仰角,作为真值,真值与测量值的均方根值为望远镜的指向测量精度.

#### 3.1 北斗卫星精密位置计算

##### 3.1.1 时间关系转换

由于望远镜测量的时间系统为协调世界时(Coordinated Universal Time, UTC),而北斗坐标系统和时间系统中使用的为世界时(Universal Time, UT1)时,闰秒用于调整协调世界时以便确保UTC和UT1近似一致.两者的转换关系为

$$UT1=UTC+\Delta UTC \quad (11)$$

式中, $\Delta UTC$ 为UT1和UTC之差,其值由国际自转服务(International Earth Rotation Service, IERS)综合全球的地球自转观测数据计算而得,可从IERS的Bulletin A(每周更新)和Bulletin B(每月更新)得到,也可从Colok文件中查询.

##### 3.1.2 光行时间修正

由于北斗卫星距离观测站约29 000 km或43 000 km左右,北斗卫星发出的光达到地球表面约需96 ms或143 ms,导致观测站在 $T_1$ 时刻观测到的北斗卫星位置实际为 $T_2$ 时刻对应位置发出的光信号,因此必须对此光行进行时间修正.



$$T_2 = T_1 - t_1 \quad (12)$$

式中,  $t_1$  为北斗卫星光线传输延迟,  $t_1 = R/c$ ,  $R$  为北斗卫星相对观测站的距离, 在地固坐标系中实时计算观测时刻  $R$  的数值,  $c$  为光速.

### 3.2 天文定位坐标转换算法

精密星历是北斗卫星在协议地球坐标系中的坐标, 而天文定位测量结果是卫星在协议天球坐标系中的坐标, 因此需要进行坐标系转换<sup>[8]</sup>. 坐标系转换过程为: 协议地球坐标系经过极移旋转转换为真地球坐标系, 真地球坐标通过真春分点时角转为真天球坐标, 真天球坐标系经过章动旋转转换为平天球坐标系, 平天球坐标系经过岁差旋转转换为协议天球坐标系. 定义旋转矩阵如式(13)所示.

$$\begin{cases} \mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (13)$$

#### 3.2.1 协议地球坐标系至真地球坐标系

由于受到地球内部质量不均匀影响, 地球自转轴相对于地球体产生运动, 导致地极点在地球表面的位置随时间而变化, 这种现象称为地极移动, 简称极移. IERS 每月定期发布地球极移  $x_p, y_p$  的每日具体值(下载网址 <http://www.iers.org>). 真地球坐标系到协议地球坐标系的转换可通过绕  $X$  轴顺时针转动极移分量  $y_p$  和绕  $Y$  轴顺时针转动极移分量  $x_p$  实现, 因此, 协议地球坐标系至真地球坐标系的转换模型为

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_t = [\mathbf{R}_y(-x_p) \mathbf{R}_x(-y_p)]^T \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_0 = (\mathbf{E}_p)^T \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_0 \quad (14)$$

#### 3.2.2 真地球坐标系至真天球坐标系

根据真天球坐标系和真地球坐标系的定义, 二者坐标原点和纵轴指向均相同,  $x$  和  $X$  轴间夹角为春分点的格林威治恒星时(记为  $G_{AST}$ ), 则真地球坐标系  $(X, Y, Z)_t^T$  转换为真天球坐标系  $(x, y, z)_t^T$  的公式可表示为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_t = [\mathbf{R}_z(G_{AST})]^T \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_t = (\mathbf{E}_R)^T \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_t \quad (15)$$

#### 3.2.3 真天球坐标系至平天球坐标系

章动是在外力作用下, 地球自转轴在空间运动的短周期摆动部分. 真天球坐标系与平天球坐标系的转换关系为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_M = [\mathbf{R}_x(-\epsilon_0 - \epsilon) \cdot \mathbf{R}_z(-\psi) \cdot \mathbf{R}_x(\epsilon_0)]^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_t = (\mathbf{N}_R)^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_t \quad (16)$$

式中,  $\epsilon_0$  为标准历元  $t_0$  的平黄赤交角, 按式计算, 单位为角秒.

$$\epsilon_0 = 84381.448 - 46.815 \times t - 0.00059 \times t^2 + 0.001813 \times t^3$$

$\psi$  和  $\epsilon$  根据国际天文联合会所采用的最新章动理论计算, 表达式为包括 106 项的级数展开, 展开式系数值查询天文年历.

#### 3.2.4 平天球坐标系转换至协议天球坐标系

平天球坐标系与协议天球坐标系的转换关系为



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{ECI}} = [R_z(-Z_A) \cdot R_y(\theta_A) \cdot R_z(-\xi_A)]^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{M}} = (P_R)^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{M}} \quad (17)$$

式中,  $P_R$  为岁差旋转矩阵,  $Z_A$ 、 $\theta_A$ 、 $\xi_A$  为赤道岁差角, 其表达式为

$$\begin{cases} \xi_A = 2306.2181 \times t + 0.30188 \times t^2 + 0.017998 \times t^3 \\ \theta_A = 2004.3109 \times t - 0.42665 \times t^2 - 0.041833 \times t^3 \\ Z_A = 2306.2181 \times t + 1.094687 \times t^2 + 0.018203 \times t^3 \end{cases} \quad (18)$$

所以, 协议地球坐标系向协议天球坐标系转换的模型为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{ECI}} = [R_z(-Z_A) \cdot R_y(\theta_A) \cdot R_z(-\xi_A)]^T [R_x(-\epsilon_0 - \epsilon) \cdot R_z(-\psi) \cdot R_x(\epsilon_0)]^T \times [R_z(G_{\text{AST}})]^T [R_y(-x_p) R_x(-y_p)]^T \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_0 \quad (19)$$

### 3.2.5 相对观测站的视赤经和视赤纬

通过以上转换可计算得北斗卫星在 ECI 坐标系中的坐标  $[x_{\text{GPS}}, y_{\text{GPS}}, z_{\text{GPS}}]_{\text{ECI}}^T$  和观测站在 ECI 坐标系中的坐标  $[x_{\text{sta}}, y_{\text{sta}}, z_{\text{sta}}]_{\text{ECI}}^T$ , 由图 1(a) 可推导出

$$\begin{bmatrix} x_{\text{GPS}} \\ y_{\text{GPS}} \\ z_{\text{GPS}} \end{bmatrix}_{\text{ECI}} - \begin{bmatrix} x_{\text{sta}} \\ y_{\text{sta}} \\ z_{\text{sta}} \end{bmatrix}_{\text{ECI}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\delta) \\ \sin(\alpha) \cos(\delta) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (20)$$

## 3.3 轴系定位坐标转换算法

### 3.3.1 地固坐标系到测站坐标系的转换

地固坐标系到测站坐标系转换为

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{CC}} = R_y(-90^\circ) \cdot R_x(\varphi_c) \cdot R_z(-90^\circ + \lambda_c) \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_0 - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{OC}} \right) \quad (21)$$

式中,  $[X, Y, Z]_{\text{CC}}^T$  为目标的测站坐标系坐标;  $\lambda_c$ 、 $\varphi_c$  为测量原点的天文纬度和天文经度;  $[X, Y, Z]_0^T$  为北斗卫星在地心直角坐标系中的坐标;  $[X, Y, Z]_{\text{OC}}^T$  为测站原点的地心直角坐标。

### 3.3.2 测站坐标系到测量元素 $A$ 、 $E$ 的转换

测站坐标系与测量元素  $A$  和  $E$  的关系如图 1(b) 所示, 转换公式见式 (22), 以此可将北斗卫星的测站坐标  $[X_{\text{cc}}, Y_{\text{cc}}, Z_{\text{cc}}]_{\text{CC}}^T$  转换为相对测站方位值和俯仰值。

$$\begin{cases} X_{\text{cc}} = R \cos(A) \cos(E) \\ Y_{\text{cc}} = R \sin(E) \\ Z_{\text{cc}} = R \sin(A) \cos(E) \end{cases} \quad (22)$$

## 4 方法应用

2019 年 7 月 5 日和 8 月 27 日利用北斗卫星标定某光电望远镜, 测量了北斗 7 746 卫星、北斗 7 870 卫星、北斗 7 903 卫星、北斗 7 992 卫星, 在数据处理过程中, 根据望远镜能力和测量结果, 设计数据野值剔除准则为: 误差大于 6" 的数据作为野值进行处理, 图 6~7 分别是天文测量残差结果和轴系测量残差结果图。

7 月 5 日 14 时测量了北斗 7 746 卫星, 天文定位测量 1 130 个数据点, 剔除野值后有效数据 1 090 点, 资料利用率 96%, 赤经残差均值为 -0.4", 赤经残差方差为 0.5", 赤经总误差为 0.6", 赤纬残差均值为 0.4", 赤纬残差方差为 0.5", 赤纬总误差为 0.7"; 轴系定位 1 114 个数据点, 剔除野值后有效数据 1 078 点, 资料利用率

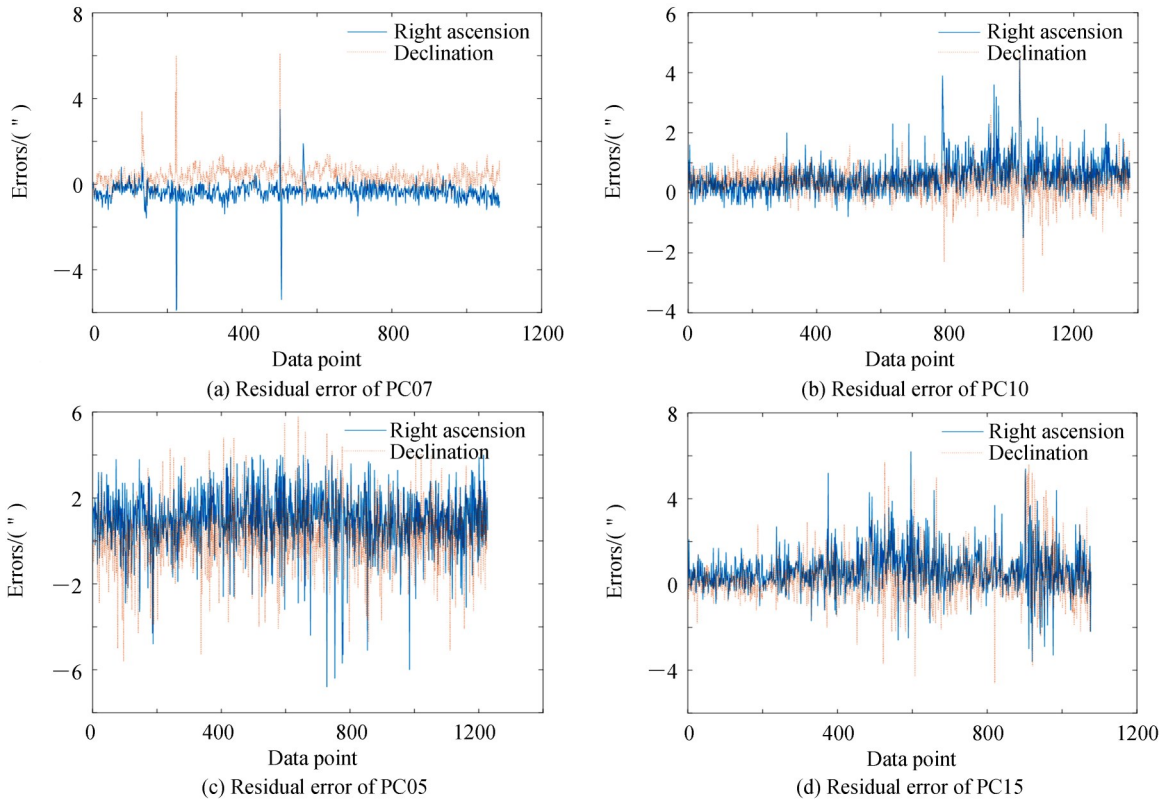


图6 天文定位测量精度鉴定结果  
Fig.6 The precision of astronomy orientation

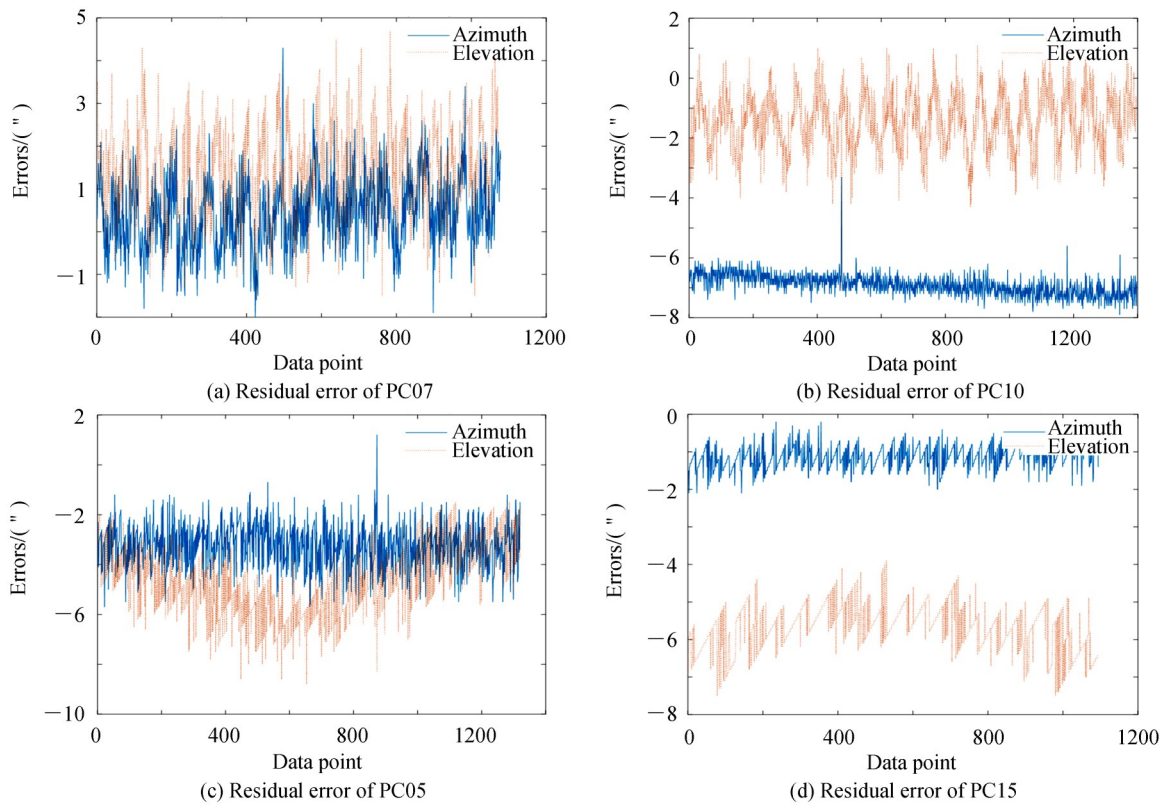


图7 轴系定位测量精度鉴定结果  
Fig.7 The precision of axis orientation

96%,方位残差均值为0.4",方位残差方差为0.8",方位总误差为0.9",俯仰残差均值为1.4",俯仰残差方差为1.1",俯仰总误差为1.8".

8月27日16时41分测量了北斗卫星7870卫星,天文定位测量1393个数据点,剔除野值后有效数据1377点,资料利用率98%,赤经残差均值为0.5",赤经残差方差为0.6",赤经总误差为0.8",赤纬残差均值为0.3",赤纬残差方差为0.5",赤纬总误差为0.6";轴系定位1401个数据点,剔除野值后有效数据1397点,资料利用率99%,方位残差均值为-6.9",方位残差方差为0.3",方位总误差为6.9",俯仰残差均值为-1.4",俯仰残差方差为1.0",俯仰总误差为1.8".

8月27日17时13分测量了北斗卫星7903卫星,天文定位测量1387个数据点,剔除野值后有效数据1287点,资料利用率92%,赤经残差均值为1.1",赤经残差方差为1.5",赤经总误差为1.9",赤纬残差均值为0.3",赤纬残差方差为1.5",赤纬总误差为1.6";轴系定位1386个数据点,剔除野值后有效数据1325点,资料利用率95%,方位残差均值为-3.3",方位残差方差为0.9",方位总误差为3.4",俯仰残差均值为-4.6",俯仰残差方差为1.4",俯仰总误差为4.8".

8月27日17时55分测量了北斗卫星7992卫星,天文定位测量1087个数据点,剔除野值后有效数据1081点,资料利用率99%,赤经残差均值为0.6",赤经残差方差为1.1",赤经总误差为1.2",赤纬残差均值为0.3",赤纬残差方差为1.1",赤纬总误差为1.2";轴系定位1094个数据点,剔除野值后有效数据1094点,资料利用率100%,方位残差均值为-1.1",方位残差方差为0.3",方位总误差为1.2",俯仰残差均值为-5.7",俯仰残差方差为0.6",俯仰总误差为5.7".

与理论真值对比后求得赤经、赤纬、方位角和俯仰角的测角总误差、系统差和随机差,经与真值比较结果如表1和表2所示,此台望远镜的天文定位精度在赤经赤纬方向均优于2",轴系定位精度在方位和俯仰两个方向均优于7".

表1 北斗卫星标定望远镜天文定位测角精度结果

Table 1 The result of a telescope's astronomy orientation precision by BDS

Beidou code	Total data	Used data	Right ascension (")			Declination (")		
			Total errors	Mean residual	Residual RMS	Total errors	Mean residual	Residual RMS
PC05	1387	1287	1.9	1.1	1.5	1.6	0.3	1.5
PC15	1087	1081	1.2	0.6	1.1	1.2	0.3	1.1
PC10	1393	1377	0.8	0.5	0.6	0.6	0.3	0.5
PC07	1130	1090	0.6	-0.4	0.5	0.7	0.4	0.5

表2 北斗卫星标定望远镜轴系定位精度结果

Table 2 The result of a telescope's axis orientation precision by BDS

Beidou code	Total data	Used data	Azimuth (")			Elevation (")		
			Total errors	Mean residual	Residual RMS	Total errors	Mean residual	Residual RMS
PC05	1386	1325	3.4	-3.3	0.9	4.8	-4.6	1.4
PC15	1094	1094	1.2	-1.1	0.3	5.7	-5.7	0.6
PC10	1401	1397	6.9	-6.9	0.3	1.8	-1.4	1
PC07	1114	1078	0.9	0.4	0.8	1.8	1.4	1.1

## 5 结论

北斗导航系统是我国完全自主可控的全球导航系统,本文将北斗导航系统的卫星用于鉴定中高轨望远镜或地基大口径光电望远镜的天文定位和轴系定位精度.依据北斗卫星的轨道分布、尺寸体积、精密星历精度和卫星亮度模型,分析计算了北斗卫星的亮度、覆盖性、理论真值精度等,研究了利用北斗卫星鉴定中高轨望远镜测量精度的技术可行性,通过定期公布的北斗卫星精密星历(大地直角坐标系),采用拉格朗日插值的方法,推导精密星历与测量元素的转换算法模型,解算望远镜观测时刻北斗卫星以观测者为中心在天

球惯性坐标系中相对测站的视赤经和视赤纬,以及卫星在测站坐标系中的方位俯仰值,作为理论真值鉴定天文定位和轴系定位测量精度.采用此方法验证了某中高轨望远镜天文定位精度优于2"和轴系定位精度优于7".此方法可用于中高轨望远镜检测验收、故障排查或日常标定中.

#### 参考文献

- [1] GAO Yang, ZHAO Jin-yu, LIU Jun-chi, *et al.* Ground-based photoelectric surveillance for mid-high orbit target[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2017, **25**(10): 2584-2590.  
高扬, 赵金宇, 刘俊池, 等. 中高轨目标的地基光电监视[J]. 光学精密工程, 2017, **25**(10): 2584-2590.
- [2] 张晓祥. 空间目标光学观测研究[D]. 南京: 中科院紫金山天文台, 2007.
- [3] ZHAO Huai-xue, ZHAO Jian-ke, TIAN Liu-de, *et al.* Detection method of random error for dynamic measurement accuracy of photoelectric theodolite[J]. *Journal of Applied Optics*, 2013, **34**(6): 1010-1013.  
赵怀学, 赵建科, 田留德, 等. 光电经纬仪动态测角精度随机误差检测方法研究[J], 2013, **34**(6): 1010-1013.
- [4] CHE Shuang-liang, ZHANG Yao-ming. Theory and practice of optical-electronic theodolite calibration method with star in range[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(10): 1255-1259.  
车双良, 张耀明. 光电经纬仪外场星校方法的理论与实践[J]. 光子学报, 2004, **33**(10): 1255-1259.
- [5] GONG Zhi-hua, DUAN Peng-wei, XU Xu, *et al.* Analysis on a method of convenient dynamic accuracy appraisal for optical theodolite[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, **34**(11): 1112004.  
宫志华, 段鹏伟, 徐旭, 等. 一种经纬仪动态精度简易鉴定方法分析[J]. 光学学报, 2014, **34**(11): 1112004.
- [6] YU Huan-huan, SHEN Ming, GAO Peng-qi, *et al.* Observational accuracy analysis of space object with APOSOS photoelectric telescope[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2017, **46**(1): 0117002.  
于欢欢, 沈鸣, 高鹏骐, 等. APOSOS 光电望远镜空间目标观测精度分析[J]. 红外与激光工程, 2017, **46**(1): 0117002.
- [7] WU Yu-xiang, ZHANG Hong-bo, KONG De-qing, *et al.* Astronomical refraction model based on real-time parameters and research of radio telescope pointing calibration method[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2019, **48**(8): 0811001.  
武宇翔, 张洪波, 孔德庆, 等. 基于实时参数的大气折射模型和射电望远镜指向修正方法[J]. 光子学报, 2019, **48**(8): 0811001.
- [8] 郝晓宁, 王威, 高玉东. 近地航天器轨道基础[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2003.
- [9] WANG Wei, CHEN Ming-jian, YAN Jian-qiao, *et al.* Three kinds of compass satellite precise ephemeris interpolation method analysis comparative[J]. *GNSS World of China*, 2016, **41**(2): 60-65.  
汪威, 陈明剑, 闫建巧, 等. 北斗三类卫星精密星历内插方法分析比较[J]. 全球定位系统, 2016年, **41**(2): 60-65.
- [10] YANG Yu-fei, YANG Yuan-xi, HU Xiao-gong, *et al.* Comparison and analysis of two orbit determination methods for BDS-3 satellites[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2019, **48**(7): 831-839.  
杨宇飞, 杨元喜, 胡小工, 等. 北斗三号卫星两种定轨模式精度比较分析[J]. 测绘学报, 2019, **48**(7): 831-839.
- [11] YAN Xing-yuan, WANG Le, HUANG Guan-wen, *et al.* Precise orbit and clock offset determination for beidou-3 test satellites and the accuracies analysis[J]. *Journal of Geomatics Science and Technology*, 2018, **35**(1): 27-31.  
燕兴元, 王乐, 黄观文, 等. BeiDou-3 试验卫星精密定轨及钟差精度分析[J]. 测绘科学技术学报, 2018, **35**(1): 27-31.
- [12] CHEN Ming, WU Jun-li, LI Zhi-cai. Precise orbit determination and broadcast ephemeris accuracy assessment and analysis for BDS[J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 2016, **25**(11): 1-6.  
陈明, 武军邴, 李志才. 北斗精密定轨及广播星历轨道精度评估[J]. 测绘工程, 2016, **25**(11): 1-6.
- [13] HE Qian-qian, CHEN Guo, WANG Guang-xing, *et al.* Long-term orbit accuracy analysis of beidou navigation satellite system broadcast ephemeris[C]. China Satellite Navigation Conference CSNC, 2018.  
何倩倩, 陈国, 王广兴, 等. 北斗卫星导航系统广播星历轨道精度的长期统计与分析[C]. 中国卫星导航学术年会—S08 测试评估技术, 2018年.
- [14] GENG Tao, SU Xing, XU Xiao-long, *et al.* Research on precise and broadcast ephemeris orbit of BeiDou navigation satellite system[J]. *China Sciencepaper*, 2015, **10**(9): 1023-1032.  
耿涛, 苏醒, 许小龙, 等. 北斗卫星导航系统精密定轨和广播星历轨道精度分析[J]. 中国科技论文, 2015年, **10**(9): 1023-1032.
- [15] GUO Zhong-chen, GAO Jing-xiang, CAO Xin-yun. Accuracy analysis on orbit and clock of BDS satellite broadcast ephemeris[J]. *Coal Technology*, 2015, **34**(7): 113-116.  
郭忠臣, 高井祥, 曹新运. 北斗广播星历轨道及钟差精度分析[J]. 煤炭技术, 2015, **34**(7): 113-116.
- [16] YANG Li, LV Xiang-yin, JIN Wei, *et al.* Model and calculation of orbital satellite apparent magnitude[J]. *Journal of Applied Optics*, 2014, **35**(3): 365-370.  
杨莉, 吕相银, 金伟, 等. 在轨卫星星等建模与计算[J]. 应用光学, 2014, **35**(3): 365-370.
- [17] 李权. 天空背景与卫星目标的动态仿真技术研究[D]. 苏州: 苏州大学, 2015.
- [18] 吴森. 卫星目标与天空背景的仿真研究[D]. 苏州: 苏州大学, 2016.
- [19] TAN Bin, YAO Dong-sheng, XIANG Chun-sheng, *et al.* Star magnitude computing model of space targets like prism[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2008, **35**(7): 33-37.  
谈斌, 姚东升, 向春生, 等. 类柱体空间目标的星等计算模型研究[J]. 光电工程, 2008, **35**(7): 33-37.