

doi:10.3788/gzxb20184709.0919001

Parity-Time 对称 Scarff 势中多级孤子的传输特性

胡素梅, 钟婷婷, 吴红梅, 周青云, 陈海波

(广东石油化工学院 物理系, 广东 茂名 525000)

摘 要:研究了线性情况, 自聚焦和自散焦非线性情况下 Parity-Time 对称 Scarff 复合势中二级孤子和三级孤子的存在与稳定性. 对于线性情况, 数值得到了不同调制深度下的 Parity-Time 对称 Scarff 复合势中的 Parity-Time 对称破坏点、本征值和多级线性模. 对于非线性情况, 研究了自聚焦与自散焦介质中的二级孤子和三级孤子的存在与稳定性. 研究表明: 对于确定的调制深度, 二级线性模和三级线性模的本征值恰好等于相应的调制深度下二级孤子和三级孤子存在的临界传播常数 b_c . 在自聚焦与自散焦介质中, 多级孤子能稳定存在于靠近临界传播常数 b_c 的区域.

关键词:宇称-时间对称; Scarff 势; 本征值; 线性模; 多级孤子

中图分类号: O436

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2018)09-0919001-8

Transmission of Multipole Solitons in Parity-Time Symmetric Scarff Potentials

HU Su-mei, ZHONG Ting-ting, WU Hong-mei, ZHOU Qing-yun, CHEN Hai-bo

(Department of Physics, Guangdong University of Petrochemical Technology,
Maoming, Guangdong 525000, China)

Abstract: The existence and stability of dipole and tripole solitons in Parity-Time (PT) symmetric Scarff complex potentials are investigated, including linear case, and self-focusing and self-defocusing nonlinear cases. For linear case, the PT-breaking points, eigenvalues and multipole linear modes for different modulated depths of PT symmetry Scarff complex potential are obtained numerically. For nonlinear cases, the existence and stability of multipole solitons are studied in self-focusing and self-defocusing media. For a fixed modulated depth, the eigenvalue for multipole linear modes is equal to the critical propagation constant b_c of multipole solitons existence. Multipole solitons are stable with the propagation constants close to b_c both for self-focusing and self-defocusing nonlinearities.

Key words: Parity-Time symmetry; Scarff potentials; Eigenvalues; Linear modes; Multipole solitons

OCIS Codes: 190.0190; 190.5330; 190.6135; 200.0200

0 引言

1998 年, Bender 等发现哈密顿量算符虽然是非厄密的, 但其本征值也可都是实数, 只要该算符具有宇称-时间 (Parity-Time, PT) 对称, 并且 PT 对称的虚部不超过破坏点^[1]. 从那以后, PT 对称在物理学中成为了一个重要概念且发展应用到光学系统中^[2-12]. PT 操作要求势函数的实部是偶函数, 而虚部是奇函数. PT 对称光学系统中具有与许多传统系统没有的光学性质, 包括多种类型的 PT 对称光孤子^[4-6]、单向不可见性^[7]、光能

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 11504059), 广东省自然科学基金 (Nos. 2017A030307004, 2016A030307025, 2018A030307028, 2015A030313873), 广东省基础研究及应用研究重大项目 (No. 517042), 广东省科技计划项目 (No. 2015A010105032), 广东石油化工学院质量工程项目和教研项目 (Nos. 660470, 660635, 660677, 660684), 广东大学生科技创新培育专项项目 (No. pdjhb0342) 和大学生创新创业项目 (Nos. 201611656081, 201711656096) 资助

第一作者: 胡素梅 (1975—), 女, 教授, 博士, 主要研究方向为非线性光学. Email: sumeihu@163.com

收稿日期: 2018-05-25; **录用日期:** 2018-06-05

<http://www.photon.ac.cn>

量震荡现象^[9]等等.PT 对称所表现的这些奇特性质预示了该系统在光子信息处理方面具有重要的应用潜力.

当光束在介质中传播时,由于色散和衍射效应,光束将在纵向和横向会展览.但如果是强光在非线性介质中传播,介质的折射率会因非线性效应而改变并形成自生波导,且光束本身就是此自生波导的导模,这样可以使色散、衍射效应与非线性自聚焦效应之间达到了平衡,这时光束不会再有纵向或横向的展览.这种稳定的光束为光孤子.光孤子按形成的机制,被分为两种:空间光孤子以及时间光孤子.近年来,光学孤子的研究已引起了广大研究者的关注^[13-14].在局域克尔型非线性介质中,基态孤子总是稳定的,而多级孤子是不稳定的.

PT 对称光学系统中研究最多的就是周期晶格情况.PT 对称高斯势中能支持稳定的基态孤子和多级孤子.因此有必要研究其他的单 PT 对称势如 Scarff 对称势中孤子的传输特性,包括其线性情况与非线性情况的关系.近年来多级孤子的研究引起了研究者的普遍关注,多级孤子的研究主要是双级和三级孤子.在局域克尔介质中,基态孤子是稳定的,然而多极孤子是不稳定的.在非局域非线性介质中多级孤子在理论和实验上进行了研究^[15-17].很多学者也致力于研究晶格中的多级孤子^[18-20].

本文研究了 PT 对称 Scarff 势中多级孤子的传输特性,包括线性情况、自聚焦非线性和自散焦非线性情况.通过数值模拟,得到了不同调制深度下的 PT 对称破坏点、本征值和多级线性模以及非线性情况下二级孤子和三级孤子的传输特性.

1 理论方法与结构模型

本文研究了沿着 z 方向传输的光束在 $1+1$ 维局域单 PT 对称 Scarff 势中的传输特性,线性情况和非线性情况下的传输情况可以用局域非线性薛定谔方程来描述为

$$i \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + [V(x) + iW(x)]U + \sigma |U|^2 U = 0 \quad (1)$$

式中, U 是复合慢变场, x 是横向坐标,纵向方向即传输方向为 z 方向.PT 对称势是复合势,其实部和虚部分别用 $V(x)$ 和 $W(x)$ 表示, $\sigma=0$ 和 $\sigma=\pm 1$ 分别代表线性和自聚焦和自散焦情形.

复合 PT 对称 Scarff 势中的实部 $V(x)$ 和虚部 $W(x)$ 分别为

$$\begin{cases} V(x) = V_0 \operatorname{sech}^2(x) \\ W(x) = W_0 \operatorname{sech}(x) \tanh(x) \end{cases} \quad (2)$$

式中, V_0 和 W_0 分别代表 PT 对称 Scarff 势实部和虚部的深度.

在式(1)中,假设解具有 $U = f(x)e^{ibz}$ 的形式, b 在线性情况时代表本征值,而在非线性情况时表示传播常数.其中复合函数 $f(x)$ 满足

$$bf = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + [V(x) + iW(x)]f + \sigma |f|^2 f \quad (3)$$

求解式(3),可以得到线性模和孤子的解.在研究基态孤子的稳定性时,将 $U(x, z) = [f(x) + u(x, z) + iv(x, z)]e^{ibz}$ 的微扰解代入式(1), $u(x, z)$ 和 $v(x, z)$ 代表微扰的实部和虚部,假设都是呈指数增长,设其增长率为 δ 指数,这样 $u(x, z) = p_1(x)e^{\delta z}$,且 $v(x, z) = p_2(x)e^{\delta z}$,求解 $u(x, z)$ 和 $v(x, z)$ 的本征值问题,得到 $\operatorname{Re}(\delta)$ 的值.分析 $\operatorname{Re}(\delta)$ 的最大值,当孤子稳定时, $\operatorname{Re}(\delta)$ 的最大值等于 0,而当孤子不稳定时, $\operatorname{Re}(\delta) > 0$.本征值问题表示为

$$\delta v = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu + (Vu - Wv) + 2\sigma |f|^2 u + \sigma \{[\operatorname{Re}(f(x))]^2 -$$

$$[\operatorname{Im}(f(x))]^2\} u + 2\sigma \operatorname{Re}(f(x)) \operatorname{Im}(f(x)) v$$

$$\delta u = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + bv + (Vv - Wu) - 2\sigma |f|^2 v + \sigma \{[\operatorname{Re}(f(x))]^2 -$$

$$[\operatorname{Im}(f(x))]^2\} v + 2\sigma \operatorname{Re}(f(x)) \operatorname{Im}(f(x)) u$$

2 数值结果模拟与分析

2.1 线性情况

首先研究不同调制深度 V_0 和 W_0 下 PT 对称 Scarff 势中的线性情况.图 1 为不同调制深度 V_0 下的本征

值的实部与 W_0 的关系.可以看出,随着 V_0 的增加,本征值和本征函数的数目也增加,当 V_0 较大时,出现高阶的线性模.当 V_0 较小时(如图 1(a)中的 $V_0=1$),只有一支本征值曲线,曲线表明当 $W_0=1.8$ 时本征值 $b \rightarrow 0$.而当 $W_0 > 1.8$ 时,本征值消失,系统中不存在局域解.当 $V_0=5$ 时,可以得到两支本征值曲线,分别对应了基态和双级线性模.当 $W_0=3$ 时出现了另一基态线性模曲线,当 W_0 增加到 PT 破坏点时,这支基态线性模曲线与第一支基态线性模曲线相交.当 $W_0=W_{oc}$ 时,双级线性模消失,系统中不存在局域的双极线性模解.当 V_0 较大时(如图 1(d)中的 $V_0=18$,出现了四支本征值曲线.第一支和第二支的交点就是 PT 对称破坏点 W_{oc} .这一点与文献[2]给出的结果一致.

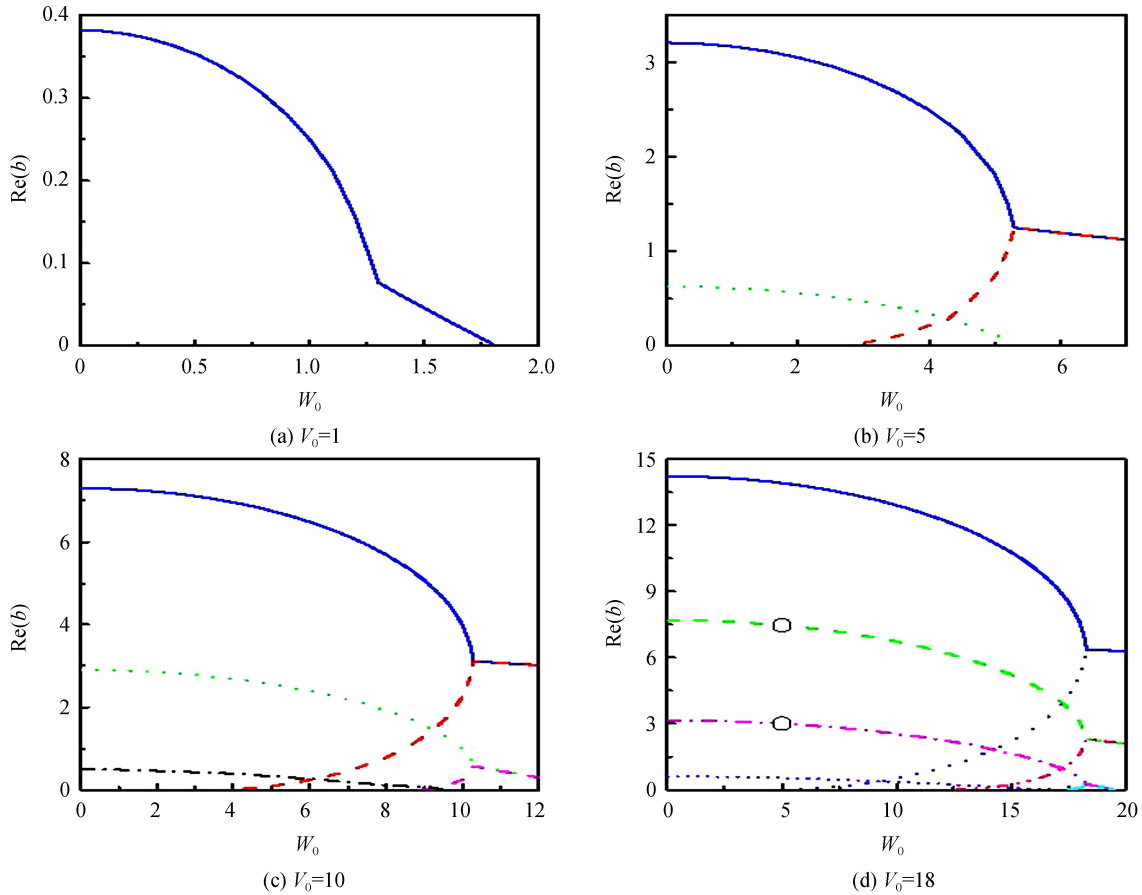
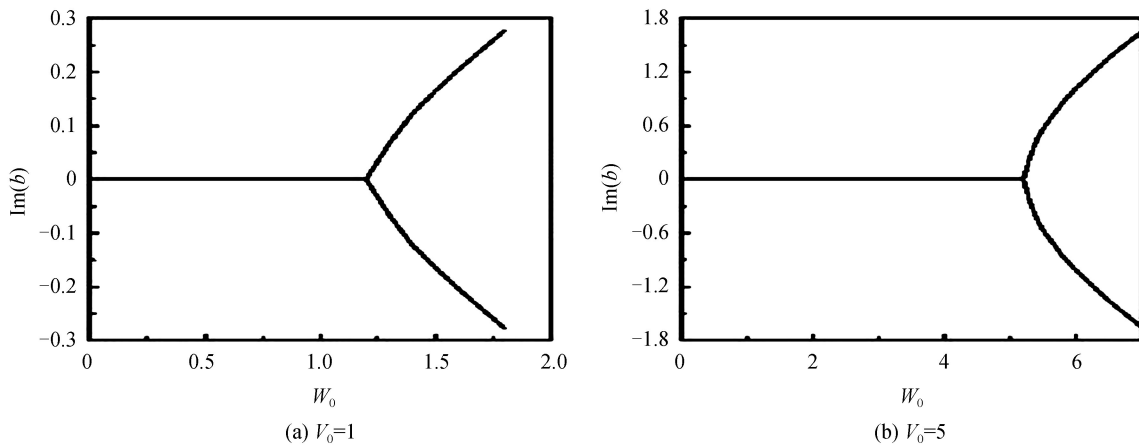


图 1 线性 PT 模本征值的实部与 W_0 的关系
Fig.1 The real part of eigenvalues for linear PT modes versus the value of W_0

图 2 为不同 V_0 下 PT 线性模的本征值的虚部与 W_0 的关系.对比图 1 和图 2 可知,对于每一个 V_0 ,当 $W_0 < W_{oc}$ 时,本征值的虚部为零.当 W_0 超过 W_{oc} 时,本征值的虚部呈现了一对非零值,这也证实了 W_{oc} 是 PT 对称破坏点.



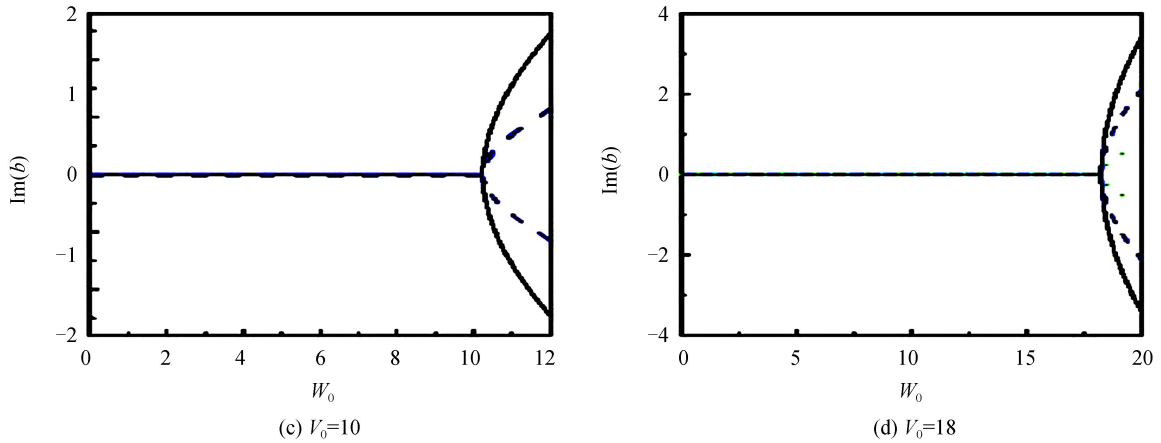


图 2 线性 PT 模本征值的虚部与 W_0 的关系

Fig.2 The imaginary part of eigenvalues for linear PT modes versus the value of W_0

图 3 为 $V_0=18$ 和 $W_0=5$ 时的多级线性模分布,即为低于 PT 破坏点的情况.可以看出,当 $V_0=18$ 时,出现了二级和三级线性模.二级线性模的实部是偶对称的,而虚部是奇对称的.三级线性模的实部是奇对称的,而虚部是偶对称的.所有线性模虚部的对称性与实部的对称性相反.

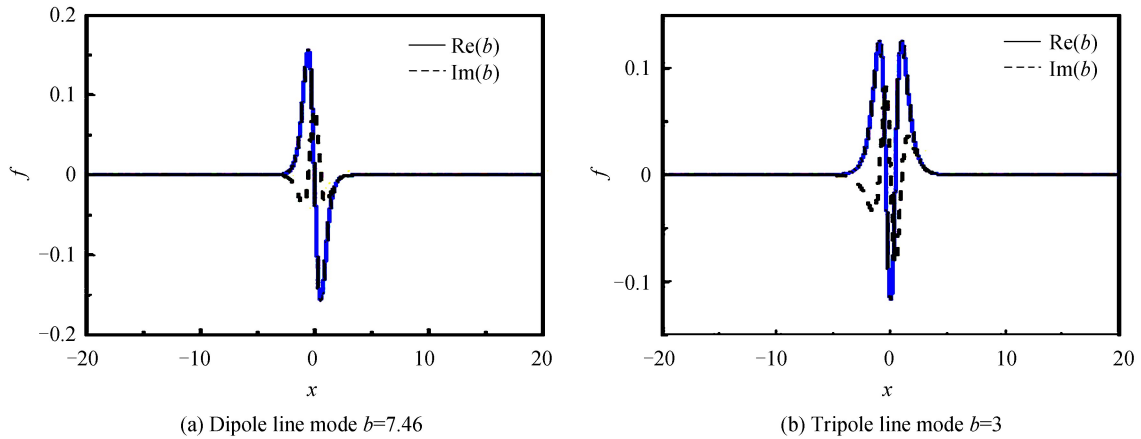


图 3 $V_0=18, W_0=5$ 时线性模的分布

Fig.3 The distribution of linear modes with $V_0=18$ and $W_0=5$

2.2 非线性情况

研究 PT 对称 Scarff 势中自聚焦和自散焦情况下的偶级亮孤子和三级亮孤子,也就是, $\sigma = \pm 1$, 在这里,偶级孤子代表的是双级孤子,在本文中称为二级孤子.在这部分,固定 $\frac{W_0}{V_0} = 0.2$, 且取 $V_0=10, W_0=2$ 以及

$V_0=8, W_0=1.6$.孤子的能量定义为 $P = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$.图 4 是二级孤子在自散焦和自聚焦介质中的能量,

束宽和稳定性分析的特性图.图中点线条代表自散焦介质的情况,实线条代表自聚焦介质的情况.图 4(a)为不同 V_0 和 W_0 下二级孤子能量与传播常数 b 的关系.可以看出,存在一零功率传播常数的临界值 b_c ,这一临界值恰好等于相同 V_0 和 W_0 下的线性二级模的本征值.当 $b > b_c$ 时,孤子存在于非线性自聚焦介质中,而当 $b < b_c$ 时,亮孤子存在自散焦介质中. b_c 的值随着 V_0 的增加而增加.随着传播常数的增加以及 V_0 的减小,自聚焦介质中亮孤子的能量增加,这一点与自散焦介质中的情况恰好相反.在整个范围内,光束宽度随着传播常数的增加而减小,但随着 V_0 的增加,光束宽度变化不大,如图 4(b)所示.图 4(c)是不同 V_0 时,双级孤子的微扰增长率与传播常数的关系.可以看出,双级孤子的稳定范围是 $b_{cdf} < b < b_{cf}$, 这里 b_{cdf} 和 b_{cf} 分别为双级孤子在自散焦和自聚焦介质中的稳定临界值.图 4(c)表明双级孤子在低能区域是稳定的,但在高能区域是不稳定的.随着 V_0 的增加,双级孤子的稳定范围在自散焦介质中减小,而在自聚焦介质中增加.

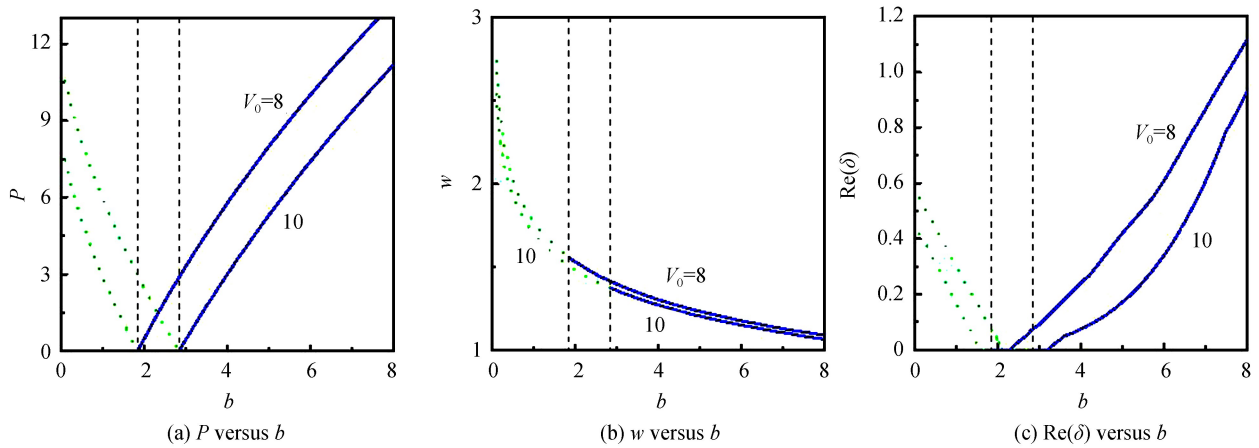


图 4 不同 V_0 时双级孤子能量 P , 束宽 w , 微扰增长率 $\text{Re}(\delta)$ 与传播常数 b 的关系

Fig.4 For dipole solitons, the power P , beam width w , and perturbation growth rate $\text{Re}(\delta)$ versus propagation constant b with different V_0

图 5(a)和(b)为自聚焦和自散焦介质中不同传播常数时双孤子的场分布.可以看出,场的实部是奇对称的,而虚部是偶对称的,实部与虚部的对称性相反.自散焦介质中孤子的束宽比自聚焦介质中的宽,这点与图 4(b)是一致的.

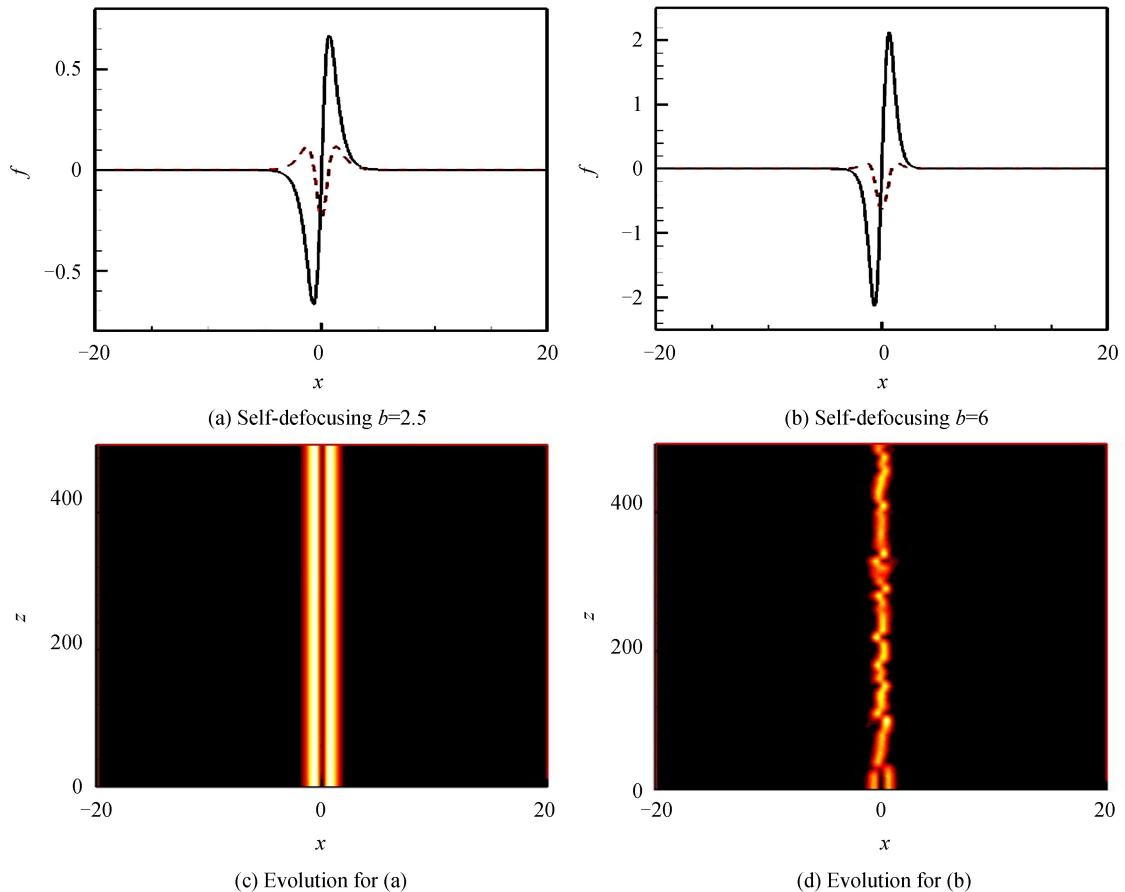


图 5 $V_0=10$ 和 $W_0=2$ 时双级孤子的场分布和演化图

Fig.5 The field distribution and evolution of of dipole solitons with $V_0=10$ and $W_0=2$

为了验证线性稳定性分析的结果,基于式(1),模拟孤子的传输情况.模拟时,采用了分步傅里叶方法,输入条件 $U(x, z=0) = f(x)[1 + \epsilon\eta(x)]$ 进行演化传输,这里 $\eta(x)$ 是从 0 与 1 之间的任意扰动函数, $\epsilon\eta(x)$ 代表了随机扰动,模拟时,取 ϵ 为一扰动常数 10%.图 5(c)和(d)为图 5(a)和(b)的孤子演化.可以看出,双级孤

子的传输与线性稳定性分析的结果一致.双级孤子在低能区域能稳定传输,但在高能区域是不稳定的.

图6和图7是PT对称 Scarff 势中的三级孤子的研究结果.图6是三级孤子在自散焦和自聚焦介质中的能量,束宽和稳定性分析的特性图.图中点线条代表自散焦介质的情况,实线条代表自聚焦介质的情况.图6(a)、(b)分别为不同 V_0 下三级孤子能量和束宽与传播常数 b 的关系,可以看出,三级孤子的临界传播常数 b_c 的值也恰好等于相同 V_0 和 W_0 下的线性三级线性模的本征值,且这一临界值低于双级孤子的临界值.随着传播常数 b 的增加以及调制深度 V_0 的减小,三级孤子的能量在自聚焦媒质中增加,在自散焦媒质中减小,但光束宽度随着传播常数增加在整个范围内都是减小的,这一点与双级孤子是类似的.与双级孤子不同的是随着 V_0 的增加,光束宽度很快减小.图6(c)是不同 V_0 时,三级孤子的微扰增长率与传播常数的关

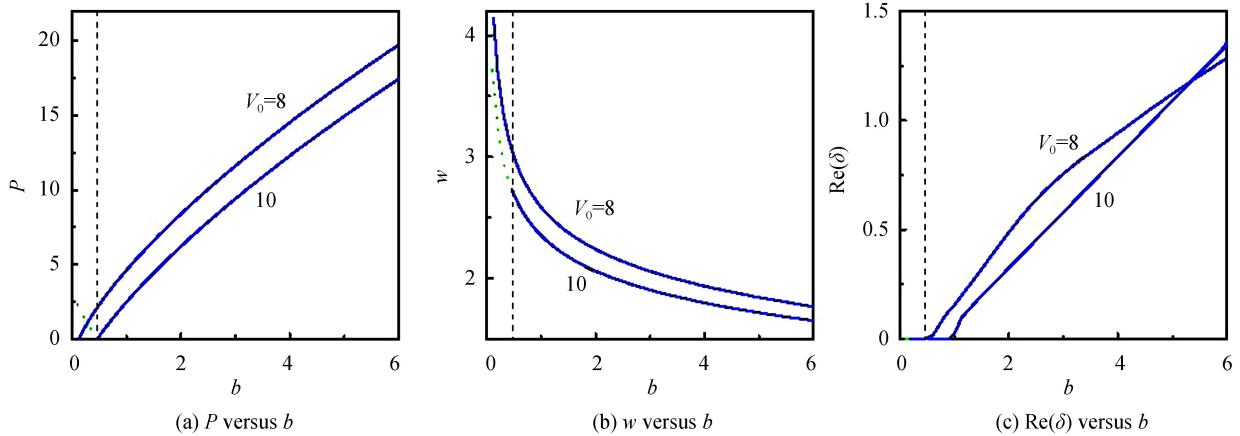


图6 不同 V_0 时三级孤子能量 P , 束宽 w , 微扰增长率 $\text{Re}(\delta)$ 与传播常数 b 的关系

Fig.6 For tripole solitons, the power P , beam width w , and perturbation growth rate $\text{Re}(\delta)$ versus propagation constant b with different V_0 .

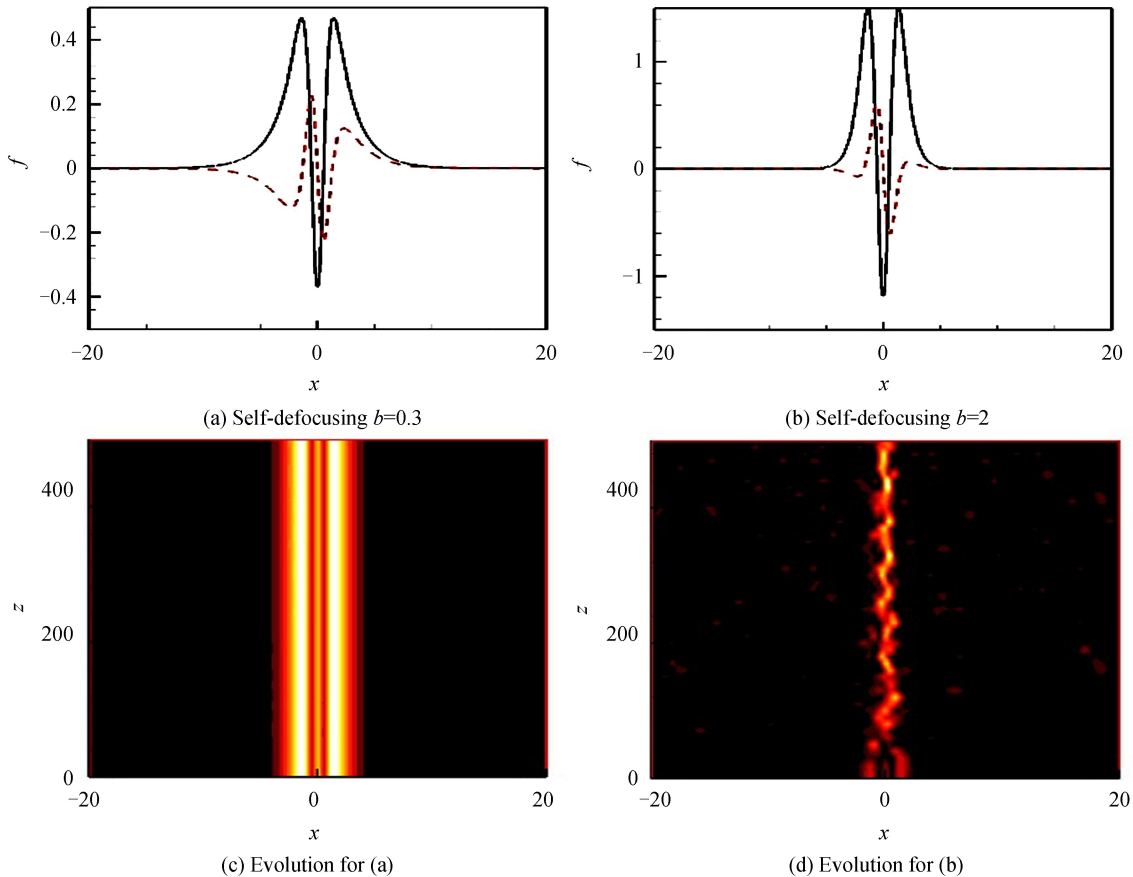


图7 $V_0=10$ 和 $W_0=2$ 时三级孤子的场分布和演化

Fig.7 The field distribution and evolution of of tripole solitons with $V_0=10$ and $W_0=2$

系.可以看出,随着调制深度 V_0 的增加,三级孤子的稳定范围增加.

图 7(a)和(b)给出了三级孤子的场分布图.类似于双级孤子,场的实部对称性与虚部相反.图 7(c)和(d)是对应图 7(a)和(b)三级孤子的演化传输.可以看出,在自散焦介质中,当传播常数靠近临界传播常数 b_c 时三级孤子是稳定的,但在自聚焦介质中,当传播常数远离 b_c 时三级孤子是不稳定的,与图 6(c)中的稳定性分析结果一致.

3 结论

本文研究了光束在 PT 对称 Scarff 复合势中多级孤子的传输特性.对于线性情形,得到了本征值,本征函数和 PT 对称破坏点.研究结果表明:高阶线性模的本征值和本征函数存在于较深的 PT 势中.对于非线性情形,研究了 PT 对称 Scarff 复合势中的二级孤子和三级孤子的存在与稳定性.零功率时的临界传播常数 b_c 恰好是对应相同势深度 V_0 和 W_0 下的线性模的本征值.随着传播常数 b 的增加和调制深度 V_0 的减小,自散焦媒质中二级孤子和三级孤子的能量减小,而自聚焦媒质中二级孤子和三级孤子的能量增加.但二级孤子和三级孤子的束宽在整个范围内随着传播常数的增加而减小,且三级孤子的束宽比二级孤子的束宽随着传播常数的增加减小得更快.二级孤子和三级孤子场分布的实部与虚部对称性都是相反的.稳定性分析表明,二级和三级孤子在自散焦介质和自聚焦介质中靠近临界传播常数 b_c 的区域中能稳定存在,即在低能区域中是稳定的,高能区域不稳定.

参考文献

- [1] BENDER C M, BOETTCHER S. Real spectra in non-hermitian hamiltonians having PT symmetry[J]. *Physical Review Letters*, 1998, **80**(24): 5243-5247.
- [2] MUSSLIMANI Z H, MAKKRIS K G, ELGANAINY R, *et al.* Optical solitons in PT periodic potentials[J]. *Physical Review Letters*, 2008, **100**(3): 030402.
- [3] HUANG Chang-ming, LI Chun-yan, DONG Liang-wei. Stabilization of multipole-mode solitons in mixed linear nonlinear lattices with a PT symmetry[J]. *Optics Express*, 2013, **21**(3): 3917-3923.
- [4] NIXON S, YANG Jian-ke. All-real spectra in optical systems with arbitrary gain-and-loss distributions[J]. *Physical Review A*, 2016, **93**(3): 031802.
- [5] KARTASHOV Y V, MALOMED B A, TORNER L. Unbreakable PT symmetry of solitons supported by inhomogeneous defocusing nonlinearity[J]. *Optics Letters*, 2014, **39**(19): 5641-5644.
- [6] WANG Hon, WANG Jian-dong. Defect solitons in Parity-Time periodic potentials[J]. *Optics Express*, 2011, **19**(5): 4030-4036.
- [7] MAKKRIS K G, ELGANAINY R, CHRISTODOULIDES D N, *et al.* Beam dynamics in PT symmetric optical lattices [J]. *Physical Review Letters*, 2008, **100**(10): 103904.
- [8] GUO A, SALAMO G J, DUCHESNE D, *et al.* Observation of PT-symmetry breaking in complex optical potentials[J]. *Physical Review Letters*, 2009, **103**(9): 093902.
- [9] CHONG Y D, GE L, STONE A D. PT-symmetry breaking and laser-absorber Modes in optical scattering systems[J]. *Physical Review Letters*, 2011, **106**(9): 093902.
- [10] MIROSHNICHENKO A E, MALOMED B A, KIVSHAR Y S. Nonlinearly PT-symmetric systems: spontaneous symmetry breaking and transmission resonances[J]. *Physical Review A*, 2011, **84**(1): 012123.
- [11] LIN Z, RAMEZANI H, EICHELKRAUT T, *et al.* Unidirectional invisibility induced by PT-symmetric periodic structures[J]. *Physical Review Letters*, 2011, **106**(21): 213901.
- [12] MOSTAFAZADEH A. Invisibility and PT symmetry[J]. *Physical Review A*, 2013, **87**(1): 012103.
- [13] JIANG Qi-chang, SU Yan-li. New type spatial soliton pairs based on two-photon photorefractive effect [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2015, **44**(9): 0919001.
姜其畅,苏艳丽.基于双光子光折变效应的新型空间孤子对[J].光子学报,2015, **44**(9):0919001.
- [14] ZHAO Chong, LU Ke-qing, GAO Li-xu, *et al.* Surface gap solitons at the interface between a metal and a self-defocusing periodic medium[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2018, **47**(3): 0324003.
赵冲,卢克清,高立许,等.金属和自散焦周期性介质界面表面间隙孤子的研究[J].光子学报,2018, **47**(3):0324003.
- [15] DONG Liang-wei, YE Fang-wei. Stability of multipole-mode solitons in thermal nonlinear media[J]. *Physical Review A*, 2010, **81**(1): 013815.
- [16] LASHKIN V M. Two-dimensional nonlocal vortices, multipole solitons, and rotating multisolitons in dipolar Bose-Einstein Condensates[J]. *Physical Review A*, 2007, **75**(4): 043607.
- [17] MA Xue-kai, YANG Zheng-jun, LU Da-quan, *et al.* Multi-type solutions for multipole interface solitons in thermal nonlinear media[J]. *Physical Review A*, 2007, **75**(3): 033802.

- [18] XU Zhi-yong. Multipole-mode interface solitons in quadratic nonlinear photonic lattices[J]. *Physical Review A*, 2009, **80**(5): 053827.
- [19] HE Ying-ji, WANG He-zhou. (1+1)-dimensional dipole soliton supported by optical lattice[J]. *Optics Express*, 2006, **14**(21): 9832-9837.
- [20] WU Xiao-lin, YANG Rong-cao. Dipole solitons in an optical lattice with longitudinal modulation[J]. *Optik*, 2010, **121**(16): 1466-1471.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(No.11504059), Guangdong Province Natural Science Foundation of China (Nos. 2017A030307004, 2016A030307025, 2018A030307028, 2015A030313873), Guangdong Province Major Project in Fundamental Research and Basic Research for Application(No.517042), Science and Technology Plan of Guangdong Province, China (No. 2015A010105032), Quality Engineering Project and Teaching Research (Nos.660470,660635,660677, 660684), Guangdong Academician Science and Technology Innovation Training Special Project (No. pdjhb0342), and Guangdong Academician Innovation Project (Nos. 201611656081, 201711656096)

引用格式: HU Su-mei, ZHONG Ting-ting, WU Hong-mei, *et al.* Transmission of Multipole Solitons in Parity-Time Symmetric Scarff Potentials[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2018, **47**(9): 0919001

胡素梅,钟婷婷,吴红梅,等.Parity-Time 对称 Scarff 势中多级孤子的传输特性[J].光子学报,2018,**47**(9):0919001